

Теория упругости

**РАСЧЕТ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ
С КРЕСТООБРАЗНОЙ ФОРМОЙ ПОДОШВЫ**

С. П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, проф.*,
А.В. ГЛУШКОВ, *аспирант*,
Поволжский государственный технологический университет,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3,
e-mail: sp-ivanov@mail.ru, IvanovSP@volgatech.net, 256289@gmail.com.

Представлены результаты аналитических и численных расчетов оснований крестообразных фундаментов, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой. Установлен характер распределения напряжений и перемещений в активной зоне крестообразных фундаментов. Выполнено сравнение расчетных и экспериментальных значений осадок штампов со сложной формой подошвы. Получены многофакторные степенные зависимости осадок фундаментов крестообразной формы в связных и несвязных грунтах. Показана возможность проектирования фундаментов по предельно допустимым осадкам.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод конечных элементов, метод угловых точек, крестообразный фундамент, анализ напряженно-деформированного состояния основания.

В практике строительства для зданий с каркасной схемой, как правило, используются отдельно стоящие фундаменты на естественном основании квадратной и прямоугольной формы подошвы. Для снижения материалоемкости нулевого цикла целесообразно использование эффективных конструкций фундаментов с крестообразной формой подошвы.

Основное достоинство крестообразных фундаментов по сравнению с типовыми решениями является качественно лучшая совместная работа с основанием как под подошвой, так и в промежутках между выступами.

По данным профессора Е. А. Сорочана установлено, что изменение формы фундамента от квадратной к крестообразной оказывает значительное влияние на все компоненты напряженно-деформированного состояния грунтового основания [1]. Оптимизация формы подошвы фундаментов, устройство выступов позволяет включить в работу больший объем грунта, трансформировать эпюру контактных напряжений, снизить осадки фундаментов. В современных нормах отсутствует методика расчета фундаментов со сложной формой подошвы.

Для загрузки прямоугольной площади поверхности основания равномерно распределенной нагрузкой А. Лявом [2] были определены величины вертикальных сжимающих напряжений σ_z . В. Г. Короткин [3], используя функции напряжений акад. Б. В. Галеркина, получил формулы для всех составляющих напряжений и перемещений при действии равномерно распределенной нагрузки по прямоугольной площадке. Значения вертикальных напряжений представлены в виде:

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{(x+a)(y+b)}{z\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \arctg \frac{(x+a)(y-b)}{z\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} + \right.$$

$$+ \arctg \frac{(x-a)(y-b)}{z\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \arctg \frac{(x-a)(y+b)}{z\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} +$$

$$+ \frac{z(x+a)(y+b)[(x+a)^2 + (y+b)^2 + 2z^2]}{[(x+a)^2 + z^2][(y+b)^2 + z^2]\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} -$$

$$- \frac{z(x+a)(y-b)[(x+a)^2 + (y-b)^2 + 2z^2]}{[(x+a)^2 + z^2][(y-b)^2 + z^2]\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} +$$

$$+ \frac{z(x-a)(y-b)[(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2z^2]}{[(x-a)^2 + z^2][(y-b)^2 + z^2]\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} -$$

$$\left. - \frac{z(x-a)(y+b)[(x-a)^2 + (y+b)^2 + 2z^2]}{[(x-a)^2 + z^2][(y+b)^2 + z^2]\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right\}.$$

При $x = y = 0$ выражение для σ_z принимает вид:

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi} \left[\arctg \frac{ab}{z\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} + \frac{abz(a^2 + b^2 + 2z^2)}{(a^2 + z^2)(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right].$$

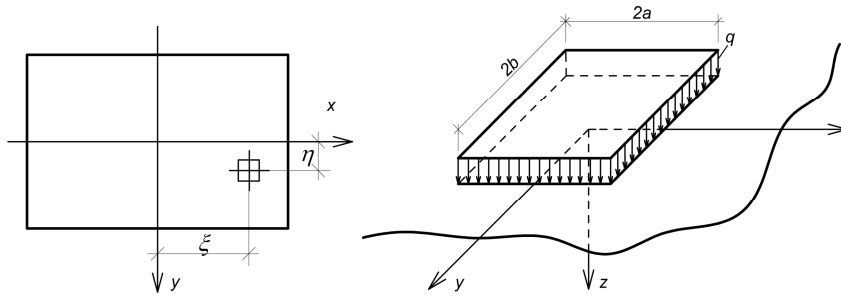


Рис. 1. Расчетная схема приложения прямоугольной нагрузки на основание

Напряжения для точек, расположенных на глубине z на прямой, проходящей через одну из угловых точек прямоугольной площадки загрузки, принимают вид [4]:

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4abz}{(4a^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{4ab} + (1 - 2\mu) \left[\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{az} \right] \right\}, \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4abz}{(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{4ab} + (1 - 2\mu) \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{bz} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{4abz(4a^2 + 4b^2 + 2z^2)}{(4a^2 + z^2)(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{4ab}{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (3)$$

$$\tau_{zy} = \frac{qz^2}{\pi} a \left[\frac{1}{z^2\sqrt{4a^2 + z^2}} - \frac{1}{(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{qz^2}{\pi} b \left[\frac{1}{z^2\sqrt{4b^2 + z^2}} - \frac{1}{(4a^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (5)$$

$$\tau_{yx} = \frac{q}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{4b^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{4a^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} + (1 - 2\mu) \left[\ln \frac{2z}{z + \sqrt{4b^2 + z^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{z + \sqrt{4a^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (6)$$

Вертикальные напряжения σ_z по оси прямоугольной площадки загрузки равны учетверенным значениям напряжений σ_z в соответствующих точках, расположенных на удвоенной глубине на вертикалях, проходящих через углы площадки нагружения:

$$\sigma_z[z = z_{ii}; y = 0; x = 0] = 4\sigma_z[z = 2z_{ii}; y = a; x = b].$$

Для удобства вычислений составлены таблицы значений σ_z и Θ и эпюры распределения напряжений $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ [3],[4].

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (7)$$

Для определения напряжений в основании крестообразного фундамента используем метод угловых точек.

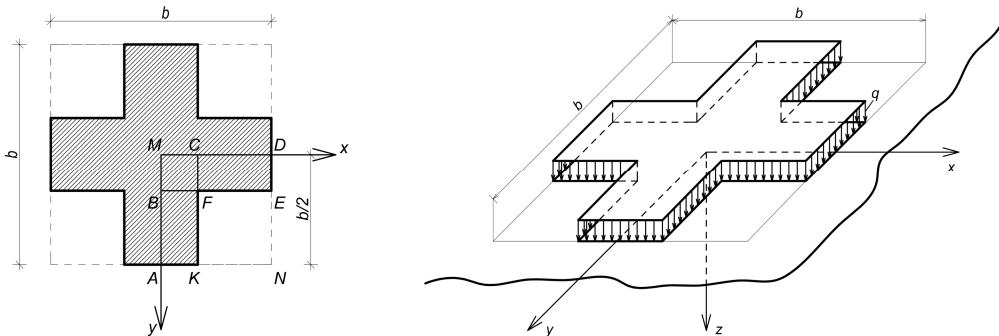


Рис. 2. Расчетная схема крестообразного фундамента при определении напряжений по методу угловых точек

Для определения напряжений в точке M на прямой, не проходящей через одну из угловых точек, целесообразно разделить площадь загрузки на три прямоугольника $AMCK$, $BMDE$ и $BMCF$. Затем определяются напряжения в точке M от загрузки каждого из указанных прямоугольников в отдельности, и полученные результаты суммируются:

$$\sigma = \sigma_{AMCK} + \sigma_{BMDE} - \sigma_{BMCF} \quad (8)$$

Вертикальные напряжения под углом загруженного прямоугольника определяются по формуле:

$$\sigma_z = K_c p, \quad (9)$$

где K_c – табличный коэффициент для определения сжимающих напряжений по вертикали, проходящей через угловую точку загруженного прямоугольника [3-5]. Вертикальные сжимающие напряжения под центром крестообразного фундамента на глубине $z/2$ равны учетверенной величине напряжений σ_z на некоторой глубине z под углом загруженного прямоугольника в точке M .

На рис. 3 представлены эпюры распределения вертикальных напряжений от единичной нагрузки в основании крестообразного фундамента: точка M – под центром фундамента; точка D – по краю; точка N – между выступами фундамента.

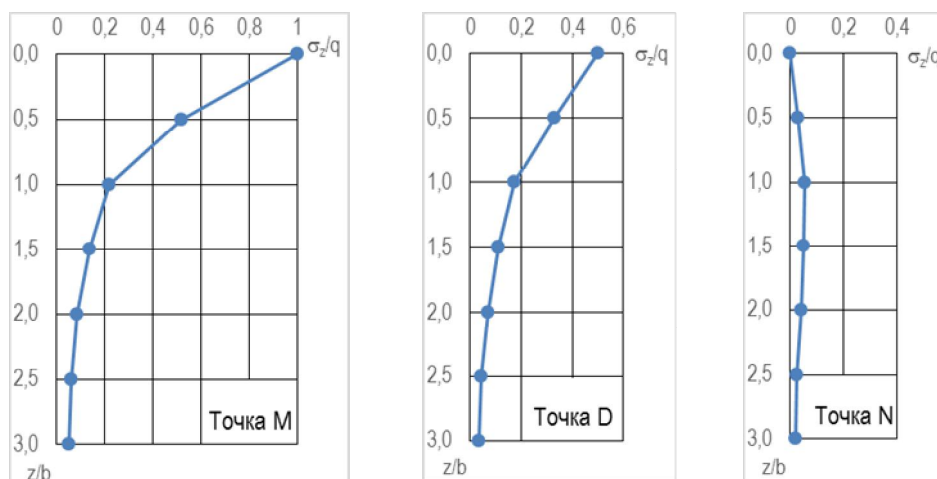


Рис. 3. Распределение вертикальных напряжений σ_z в основании крестообразного фундамента

Вертикальное перемещение точки на глубине z под углами прямоугольной загруженной площадки со сторонами a и b определяются по формуле [6]:

$$\omega_{\text{угл}}(z) = \frac{\alpha q}{2E} (1 - \mu^2) \left(A - \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} B \right), \quad (10)$$

$$A = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+m}{\sqrt{1+m^2+n^2}-m} + m \ln \frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+1}{\sqrt{1+m^2+n^2}-1} \right);$$

где

$$B = \frac{m}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m}{n\sqrt{1+m^2+n^2}}; \quad m = \frac{b}{a}; \quad n = \frac{z}{a}; \quad \mu - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Значения A и B приведены в таблице, составленной М. Е. Харром [6].

Применяя принцип суперпозиции можно определить вертикальное перемещение любой точки в массиве грунта.

Для частного случая вертикальных перемещений поверхности грунта ($z = 0$) значения коэффициента B в уравнении (10) равны нулю. Имеют смысл только величины коэффициента A , соответствующие $n = 0$.

При приложении нагрузки по прямоугольной площади шириной $2a$ и длиной $2b$ можно определить соответствующие вертикальные перемещения по формуле:

$$\omega = \frac{2\alpha q}{E} (1 - \mu^2) K_0. \quad (11)$$

Значения безразмерного коэффициента K_0 определяются по табл. 1 [5]. Осадку крестообразного фундамента можно определить по методу эквивалентного слоя угловых точек [5]. Осадка угловой точки загруженной прямоугольной области равна $1/2$ осадки ее центра.

Соотношение между коэффициентами эквивалентного слоя для угловой точки прямоугольной, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, и ее центром имеет вид:

$$A\omega_c = \frac{1}{2} A\omega_0, \quad (12)$$

где $A\omega_c$ – коэффициент эквивалентного слоя для угловых точек прямоугольной площади загрузки, определяется по таблице [5].

Для определения осадки крестообразного фундамента используем метод угловых точек, согласно которому рассматриваемую точку M (рис. 2) располагают так, чтобы она была угловой. В этом случае осадка точки M поверхности грунта под действием равномерно распределенной нагрузки будет равна алгебраической сумме осадок грунта от соответствующих прямоугольных площадок загрузки, для которых она является угловой:

$$s_M = (h_{2AMCK} + h_{2BMDE} - h_{2BMCF}) m_{\text{уп}}, \quad h_2 = (A\omega_c) b, \quad (13)$$

где $h_{2AMCK} = (A\omega_c)_{AMCK} \cdot b/6$; $h_{2BMDE} = (A\omega_c)_{BMDE} \cdot b/6$; $h_{2BMCF} = (A\omega_c)_{BMCF} \cdot b/6$.

Используя принцип суперпозиции, осадку центра крестообразного фундамента определяем как сумму осадок угловой точки M симметричных прямоугольных площадей загрузки.

Произведем сравнение теоретических данных с результатами полевых натурных штамповых испытаний крестообразного фундамента. Для полевых экспериментов использовался штамп с крестообразной формой подошвы при $b = 94,8$ см, площадь подошвы 5000 см² в соответствии с ГОСТ 20276-2012. На опытной площадке №1 в основании штампа залегает связный грунт (суглинок мягкопластичный) с $\gamma = 19,2$ кН/м³; $c = 25,0$ кПа; $\varphi = 19^\circ$; $E = 17,0$ МПа. Результаты штамповых испытаний крестообразного фундамента показаны на рис. 4.

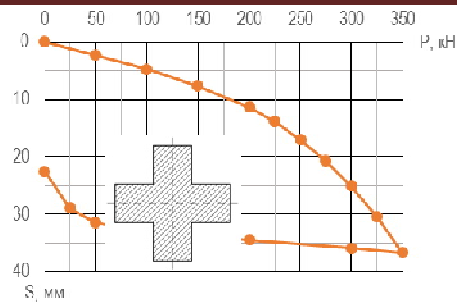


Рис. 4. Зависимость $S=f(P)$ для крестообразного штампа (связный грунт)

По данным экспериментальных исследований в пределах линейной зависимости $S = f(P)$ осадка крестообразного фундамента при $P = 0,100$ МПа составляет $S = 4,8$ мм; при $P = 0,150$ МПа соответственно $S = 7,6$ мм.

Вычислим теоретическую осадку крестообразного фундамента площадью подошвы 5000 см^2 для инженерно-геологических условий площадки №1 по методу эквивалентного слоя угловых точек (рис. 8):

$$h_{2AMCK} = (A\omega_c)_{AMCK} \cdot \frac{b}{6} = 1,092 \cdot 15,8 = 17,25 \text{ см};$$

$$h_{2BMDK} = (A\omega_c)_{BMDK} \cdot \frac{b}{6} = 1,092 \cdot 15,8 = 17,25 \text{ см};$$

$$h_{2BMDP} = (A\omega_c)_{BMDP} \cdot \frac{b}{6} = 0,687 \cdot 15,8 = 10,85 \text{ см}.$$

При $P = 0,100$ МПа:

$$s_M = (h_{2AMCK} + h_{2BMDK} - h_{2BMDP})m_{UP} = \\ = (17,25 + 17,25 - 10,85) \cdot \frac{0,793}{17,0} \cdot 0,100 = 0,110 \text{ см} = 1,10 \text{ мм}.$$

Осадка центра крестообразного фундамента составляет $S = 4s_M = 4,40$ мм.

При $P = 0,150$ МПа:

$$s_M = (h_{2AMCK} + h_{2BMDK} - h_{2BMDP})m_{UP} = \\ = (17,25 + 17,25 - 10,85) \cdot \frac{0,793}{17,0} \cdot 0,150 = 0,159 \text{ см} = 1,59 \text{ мм}.$$

Осадка центра крестообразного фундамента составляет

$$S = 4s_M = 6,37 \text{ мм}.$$

Таким образом, предложенный метод позволяет оценить напряженно-деформированное состояние основания крестообразного фундамента в пределах линейной зависимости $S = f(P)$ [7].

Для оценки напряженно-деформированного состояния основания крестообразного фундамента была решена пространственная задача методом конечных элементов [8] с одновременным учетом прочностных и деформационных свойств грунта с использованием геотехнического комплекса Plaxis. Грунт в до предельного состояния представляет собой сплошную линейно деформируемую среду, переходящую с последующим нагружением в предельное (пластическое) состояние в соответствии с критерием текучести (прочности) Мора-Кулона [9]. Расчет выполняется с использованием шаговой процедуры приложения нагрузки. По контакту подошвы фундамента с основанием принято условие полного прилипания. Расчетная область основания принималась с размерами $10,0 \times 10,0 \times 15,0$ м (рис. 5).

Рассмотрим основные результаты исследования осадок фундаментов, представленные на рис. 6. Исследованиями установлено, что осадка фундамента

крестообразной формы при давлении $P = 400$ кПа в связном грунте в 1,27 раза меньше осадки фундамента квадратной формы.

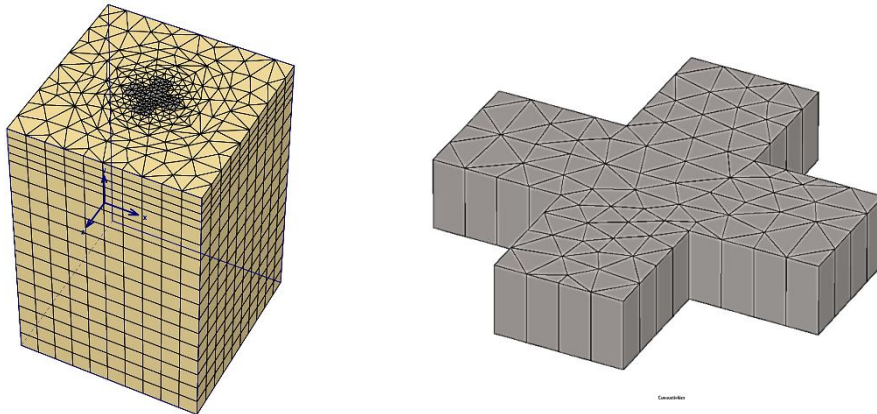


Рис. 5. Расчетная схема МКЭ (пространственная задача)

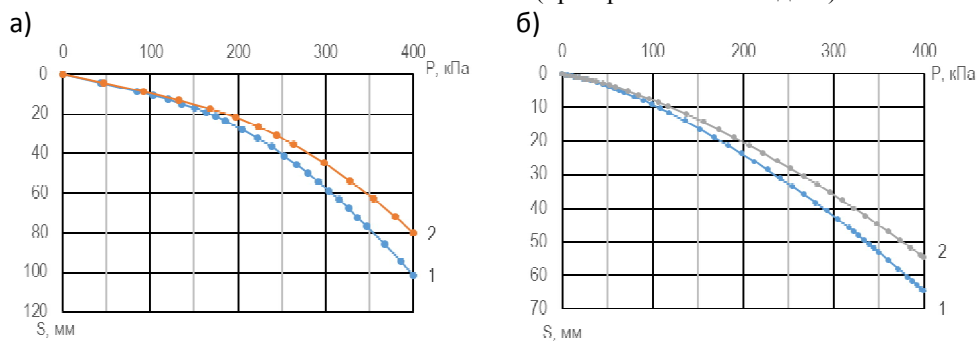


Рис. 6. Зависимости $S=f(P)$ для связного (а) и несвязного грунта (б):
1 – квадратный штамп; 2 – крестообразный штамп

Наличие выступов по подошве фундамента положительно влияет на работу грунта в основании по сравнению с моделью квадратной формы [7], [10].

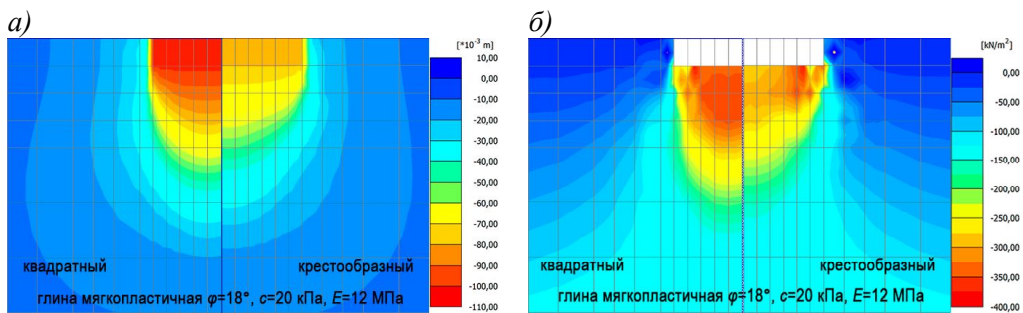


Рис. 7. Изолинии вертикальных перемещений (а) и вертикальных напряжений (б) в основании квадратного и крестообразного фундаментов для связного грунта при $P = 400$ кПа

На рис. 7,а приведены изолинии вертикальных перемещений в основании (связный грунт) для квадратного и крестообразного фундаментов. Переход к крестообразной форме подошвы фундамента приводит к снижению величины наибольших вертикальных перемещений на уровне подошвы в 1,27 раза при $P = 400$ кПа. Ширина зоны деформации для крестообразного фундамента в 1,25 раза больше, чем для квадратного фундамента за счет включения в работу большего объема грунта в активной зоне. На глубине $0,5b$ вертикальные пе-

ремещения U_z составляют соответственно 82 мм (квадратный) и 63 мм (крестообразный штамп). Глубина зоны деформации квадратного и крестообразного фундамента при $P = 400$ кПа соответственно составляет $1,82b$ и $1,76b$.

Анализ распределения вертикальных напряжений σ_z в связном грунте показывает, что зафиксирована концентрация напряжений в плоскости подошвы, максимальные значения σ_z при $P = 400$ кПа для квадратного и крестообразного штампов составили соответственно 380,9 кПа и 386,3 кПа. Из приведенных данных видно (рис. 7,б), что для фундаментов имеет место различный характер распределения и затухания напряжений σ_z с глубиной. Для крестообразного фундамента напряжения σ_z распределяются в активной зоне по большей площади и быстрее затухают с глубиной. На глубине $0,75b$ от подошвы квадратного штампа значения σ_z снижаются 1,17 раза, для крестообразного штампа снижаются соответственно в 1,72 раза.

Для использования в проектной практике решений нелинейных задач механики грунтов представляется возможным выявить влияние факторов (φ ; c ; E ; ν ; p ; H/b ; K) на осадку S крестообразного фундамента. В качестве математической модели, связывающей величину осадки крестообразного фундамента с исходными параметрами, принята многофакторная степенная зависимость:

$$S = \frac{0,12 \cdot p^{1,90} \cdot (H/b)^{0,37} \cdot K^{1,05}}{E^{0,89} \cdot c^{0,66} \cdot \varphi^{1,49} \cdot \nu^{0,71}} \quad (\text{для связного грунта}); \quad (14)$$

$$S = \frac{2441,06 \cdot p^{1,60} \cdot (H/b)^{0,49} \cdot K^{0,82}}{E^{1,33} \cdot \varphi^{1,31}} \quad (\text{для несвязного грунта}), \quad (15)$$

где H – мощность сжимаемого слоя; K – масштабный коэффициент.

Сопоставление полученных нелинейных решений с данными статических испытаний фундаментов с различной формой подошвы указывает на их хорошее соответствие и возможность проектирования эффективных фундаментов со сложной формой подошвы, исходя из условия достижения предельно допустимых осадок.

Л и т е р а т у р а

1. Сорочан Е. А. Фундаменты промышленных зданий. – М.: Стройиздат, 1986. – 303 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
3. Короткин В. Г. Объемная задача для упругого изотропного полупространства // Сб. Гидроэнергопроект, 1938. – №4. – С. 52-85.
4. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. 1. – Ленинград: Госстройиздат, 1959. – 356 с.
5. Цытович Н. А. Механика грунтов. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
6. Харп М. Е. Основы теоретической механики грунтов. М.: Стройиздат, 1971. – 320 с.
7. Van Baars S. The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings // Soils and Foundations. –2014. – Vol. 54. – №1. – P. 985-992.
8. Tezzon E., Tullini N, Minghini F. Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE–BIE model // Engineering Structures. – 2015. – Vol. 104. – №1. – P. 32-50.
9. Esen I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass// Finite Elements in Analysis and Design. – 2013. – Vol. 66.–№66.– P. 26-35.
10. Wei H.W., Wu Y.Z., Yu Z.H. Design parameter optimization of beam foundation on soft soil layer with nonlinear finite element // Journal of Central South University. – 2012. – Vol. 19. – №6. – P. 1753-1763.

References

1. Sorochan, E.A.(1986). *Fundamenty Promyshlennykh Zdaniy*, Moscow: Stroyizdat, 303 p.
2. Lyav, A. (1935). *Matematicheskaya Teoriya Uprugosti*, Moscow: ONTI, 674 p.

3. Korotkin, V.G. (1938). Obyomnaya Zadacha dly Uprugogo Izotropnogo Poluprostranstva, *Sb. Gidroenergoproekta*, №4, p. 52-85.
4. Florin, V. A. (1959). *Osnovy Mekhaniki Gruntov*, tom 1. Leningrad: Gosstroyizdat, 356 p.
5. Tzytovich, N. A. (1963). *Mekhanika Gruntov*, Moscow: Gosstroyizdat, 636 p.
6. Kharr, M. E. (1971). *Osnovy Teoreticheskoy Mekhaniki Gruntov*, Moscow: Stroyizdat, 320 p.
7. Van Baars, S. (2014). The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings, *Soils and Foundations*, Vol. 54, №1, p. 985-992.
8. Tezzon, E., Tullini, N, Minghini, F. (2015). Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE–BIE model, *Engineering Structures*, Vol. 104, №1, p. 32-50.
9. Esen, I. (2013). A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 66, № 66, p. 26-35.
10. Wei, H.W., Wu, Y.Z., Yu, Z.H. (2012). Design parameter optimization of beam foundation on soft soil layer with nonlinear finite element, *Journal of Central South University*, Vol. 19, №6, p. 1753-1763.

SOIL BASEMENT ESTIMATIONS OF THE CROSS-SHAPED ISOLATED FOUNDATIONS

S.P. Ivanov, A. V. Glushkov,
Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola.

The article presents the results of analytical numerical calculations of the cruciform foundations under the uniformly distributed load. The distributions of the stresses and displacements in active zone of the cross-shaped foundations are featured. The comparison of experimental and analytical settlements of complex form foundations is carried out. Multifactor power dependences are gained to define the settlements of cruciform foundations on cohesive and non-cohesive soil basement. The ability of the effective foundation forms using the condition of the maximum allowable settlement is featured.

KEY WORDS: finite element method, corner point method, cruciform foundation, stress-strain analysis.

