

Геометрия срединных поверхностей оболочек

**ТОНКОСТЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ
НА ОСНОВЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИОАХИМСТАЛЯ**

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
 ВАЛЕНСИЯ РОДРИГЕС Э. Г., *бакалавр техники и технологий*
 Российский университет дружбы народов,
 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы конструирования тонкостенных пространственных конструкций с использованием поверхностей Иоахимсталя. Каналовые поверхности Иоахимсталя образуются системой окружностей, лежащих в плоскостях пучка, что позволяет возводить такие конструкции на строительной площадке без использования сложных видов опалубки. В то же время эти поверхности позволяют формировать самые разнообразные формы пространственных конструкций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: циклические поверхности, каналовые поверхности, поверхности с образующими кривыми в плоскостях пучка, тонкостенные пространственные конструкции.

Каналовые поверхности Иоахимсталя являются циклическими поверхностями с образующими окружностями переменного радиуса в плоскостях пучка, являющимися семейством линий кривизны поверхности [1-4]. Каналовые поверхности Иоахимсталя являются подвидом каналовых поверхностей [2-5]. Геометрия каналовых поверхностей Иоахимсталя рассматривалась в работах [6-13]. В работе [7] доказано, что имеется три способа образования каналовых поверхностей Иоахимсталя: 1) вращение окружности переменного радиуса вокруг оси так, что расстояние от полюса (точки на оси вращения) до точки касания образующей окружности остается постоянным (рис. 1,а); 2) вращение окружности переменного радиуса вокруг общей хорды (рис. 1,б); 3) вращение окружности переменного радиуса вокруг касательной.

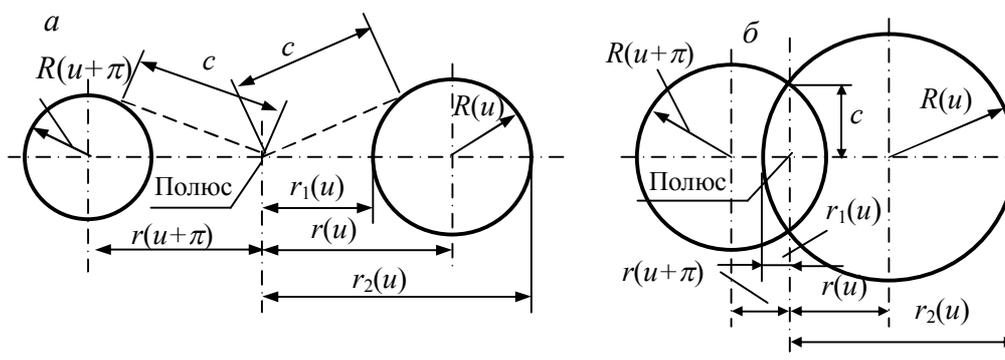


Рис. 1. Схемы образования каналовых поверхностей Иоахимсталя

Третий способ образования каналовой поверхности Иоахимсталя можно считать предельным случаем второго способа образования поверхности и переходным от 1-го ко 2-му способу.

Векторное уравнение каналовой поверхности Иоахимсталя имеет вид:

$$\rho(u, v) = r(u)h(u) + R(u)e(u, v), \quad (1)$$

где $r(u)h(u)$ - уравнение плоской линии центров образующих окружностей поверхности в полярной системе координат; $h(u) = i(u)\cos u + j \sin u$ - уравнение окружности единичного радиуса в плоскости линии центров образующих ок-

ружностей; $r(u)$ - полярный радиус линии центров; $R(u)$ - радиус образующей окружности; $e(u, v) = h(u)\cos v + k \sin v$ - уравнение окружности единичного радиуса в плоскостях пучка; i, j, k - орты прямоугольной системы координат.

Для образования поверхности необходимо задать направляющую кривую и начальный радиус образующей окружности поверхности $R_0 = R(u_0)$ или параметр c . Из условий образования каналовой поверхности Иоахимстала определяется параметр $c = \sqrt{|r(0)^2 - R_0^2|}$.

Радиус образующей окружности далее определяется по формуле:

$$R(u) = \sqrt{r^2(u) - pc^2}, \quad (2)$$

$p = \text{sign}(r(u_0) - R_0)$ определяет способ образования поверхности. Можно задаваться параметрами c и $p = \pm 1$.

При выполнении условий образования каналовых поверхностей Иоахимстала образующие окружности является линиями кривизны. В то же время, координатные линии $v = \text{const}$ при использовании уравнения поверхности (1) не является линиями кривизны. В работе [8] получены уравнения поверхности в линиях кривизны. Эти уравнения приводятся также в «Энциклопедии аналитических поверхностей» [3, 4] и монографии [13]. Уравнения поверхностей в линиях кривизны используются при расчете оболочек на прочность. Для построения оболочек могут использоваться любые варианты уравнения поверхности, в частности (1)

В качестве направляющих кривых каналовых поверхностей Иоахимстала могут использоваться кроме линии центров образующих окружностей линии, кривые, очерчиваемые диаметрами образующих окружностей в плоскости линии центров $r_1(u)$, $r_2(u)$ (рис. 1). Это позволяет определять поверхность по линиям, ограничивающим поверхность в плане, что бывает удобно при проектировании конструкций. В уравнении поверхности (1) при этом достаточно положить $r(u) = r_1(u) + R(u)$ или $r(u) = r_2(u) - R(u)$, соответственно.

При построении каналовых поверхностей Иоахимстала необходимо использовать полярную систему координат. Однако многие кривые (например, синус) не имеют прямой записи уравнений в полярной системе координат. Кроме того полюс поверхности (ось вращения пучка плоскостей) может не совпадать с началом координат полярной кривой. В работе [12] показано как записать уравнение любой направляющей кривой в полярной системе координат при любом расположении полюса поверхности и для любой направляющей кривой поверхности.

Зададимся направляющей кривой в форме круговой косинусоиды

$$f(u) = a[1 + \mu(1 + \cos(ku))] . \quad (3)$$

Кривая $f(u)$ описывает косинусоиду с амплитудой $a\mu$ вокруг окружности радиуса a , касаясь окружности отрицательной амплитудой. Параметр k определяет число волн косинусоиды при обходе круга.

Если за направляющую кривую принимается кривая, описываемая внутренним диаметром направляющих окружностей $f(u) = r_1(u)$, то получаем каналовую поверхность Иоахимстала поверхность 1-го типа при любом значении R_0 . Если за направляющую кривую принимается линия центров образующих окружностей или кривая $f(u) = r(u)$, описываемая внутренним диаметром образующих окружностей $f(u) = r_2(u)$, то тип поверхности зависит от значения начального радиуса R_0 .

На кафедре прочности материалов и конструкций РУДН аспирантом (в настоящее время кандидатом наук) Насром Аббуши построены макеты каналовых поверхностей Иоахимсталя с направляющими круговыми косинусоидами, отражающими три типа построения поверхностей (рис. 2)



Рис. 2.
Макеты каналовых
поверхностей Иоахимсталя
с направляющей кривой - круго-
вой косинусоидой

Ниже приведены рисунки каналовых поверхностей Иоахимсталя с направляющей круговой косинусоидой с различным числом амплитуд (рис.3).

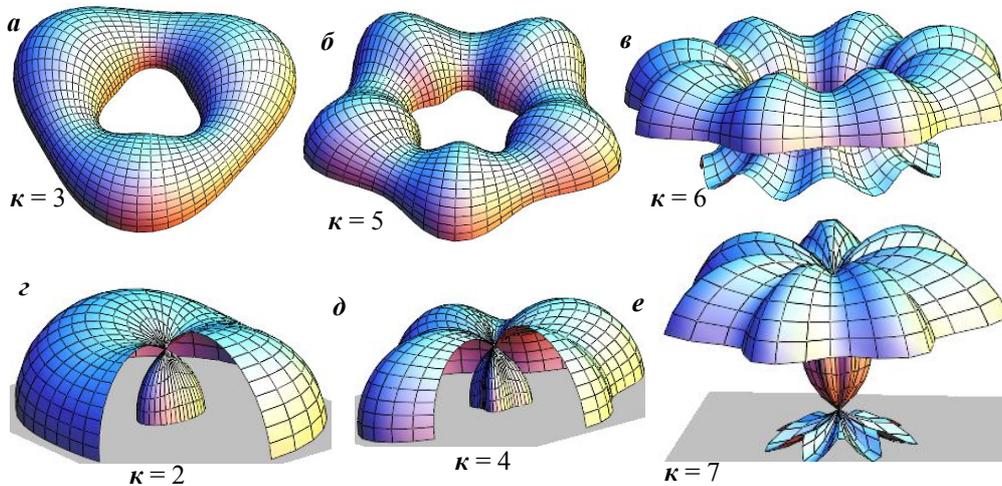


Рис. 3. Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющей круговой косинусоидой

В верхнем ряду каналовые поверхности Иоахимсталя 1-го типа, в нижнем ряду - поверхности 2-го типа. На рис. 4,а,б,в,е - $0 \leq u \leq 2\pi$; рис. 4,г, - $0 \leq u \leq 1,5\pi$; рис. 4,а,б,г,д $0 \leq v \leq \pi$; рис. 4,и,е $0 \leq v \leq 1,5\pi$.

Каждая из приведенных форм может использоваться при строительстве торговых, развлекательных и выставочных центров, спортивных сооружений и т.п. Например конструкция в форме поверхности на рис. 4,к может использоваться для покрытия беседки или торговой точки в зоне отдыха. Эти поверхности могут использоваться для покрытия сооружений повторяющих в плане форму контура поверхности (рис. 4)

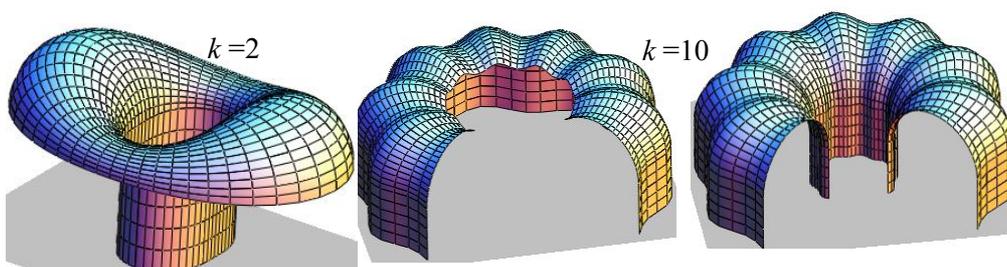


Рис. 4. Покрытия сооружений на волнистых планах

Территория таких сооружений может иметь ограждения, повторяющих в плане форму сооружений (рис. 5).

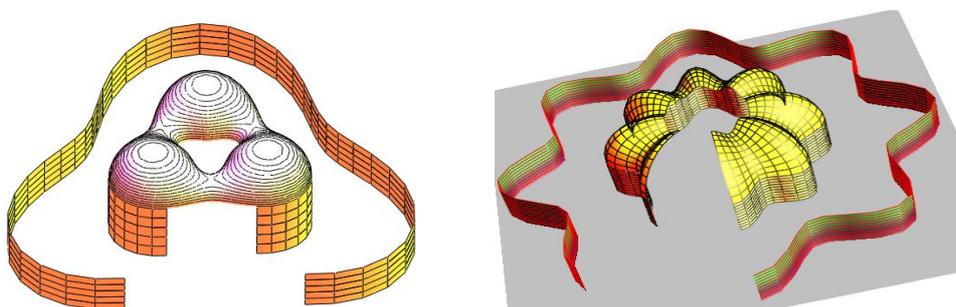


Рис. 5. Ограждение территорий сооружений с волнистыми планами

Из отсеков каналовых поверхностей Иоахимсталя могут создаваться комбинации тонкостенных пространственных конструкций (рис. 6). Рис. 6,а - $\kappa = 8$, рис. 6,б - $\kappa = 2$.

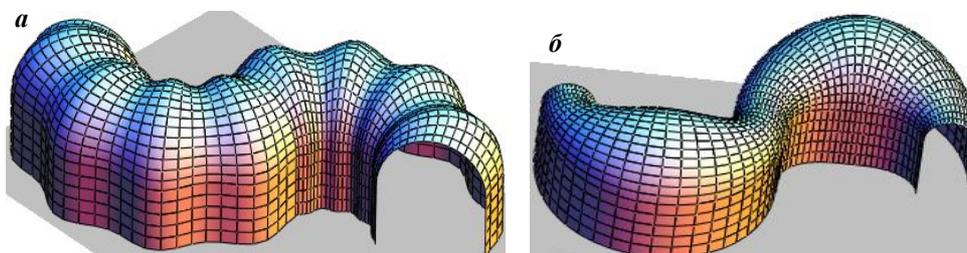


Рис. 6. Комбинированные пространственные конструкции из оболочек в форме каналовых поверхностей Иоахимсталя

В качестве направляющих каналовых поверхностей Иоахимсталя могут использоваться, в частности, кривые 2-го порядка: эллипс, гипербола, парабола. Кривые 2-го порядка имеет полярную форму уравнений при совмещении начальной точки с фокусом кривой или центром эллипса. Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющими кривыми 2-го порядка приведены на рис. 7. В верхнем ряду поверхности с направляющим эллипсом, в среднем ряду с направляющей параболой, в нижнем ряду направляющая кривая - гипербола.

На рис. 8 приведены рисунки комбинированных пространственных конструкций из отсеков каналовых поверхностей Иоахимсталя с направляющими кривыми второго порядка.

В предыдущих примерах для направляющих каналовых поверхностей Иоахимсталя использовались заданные (3) или известные в математической литературе уравнения в полярной системе координат, в частности для кривых 2-го по-

рядка. Если уравнение направляющей кривой задается в параметрической форме $x = x(u)$, $y = y(u)$, то, как показано в работе [12], в формуле (1) принимают:

$$r(u) = \sqrt{[x(u) - x_0]^2 + [y(u) - y_0]^2} ;$$

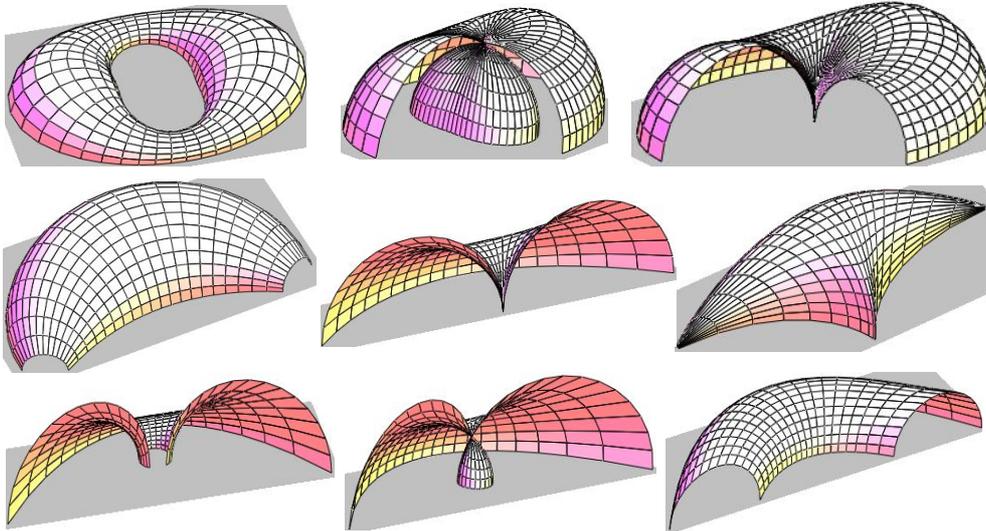


Рис. 7. Каналовые поверхности Иоахимстеля с направляющими кривыми 2-го порядка

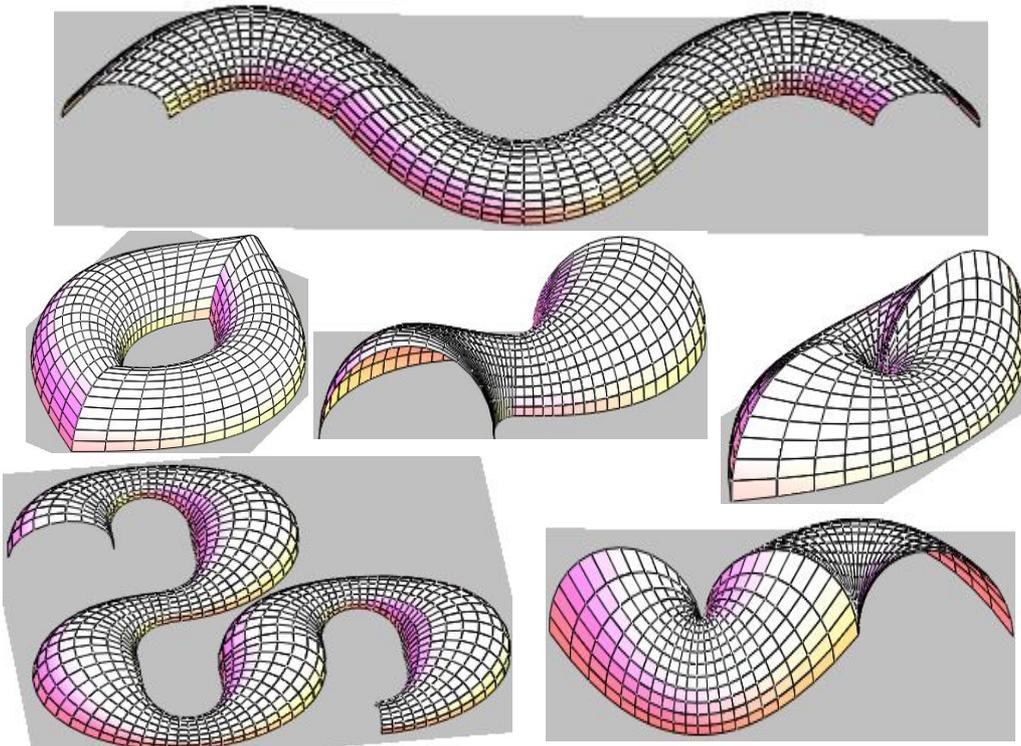


Рис. 8. Комбинированные пространственные конструкции в форме каналовых поверхностей Иоахимстеля с направляющими кривыми 2-го порядка

$$\cos u = \cos \theta(u) = \frac{x(u) - x_0}{\sqrt{[x(u) - x_0]^2 + [y(u) - y_0]^2}} ; \quad \sin u = \sin \theta(u) = \frac{y(u) - y_0}{r(u)} , \quad (4)$$

где: x_0, y_0 - координаты полюса каналовой поверхности.

Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющим косинусом $x = au$; $y = b \cos(\pi u)$; $-0,5 \leq u \leq 0,5$ представлены на рис. 9.

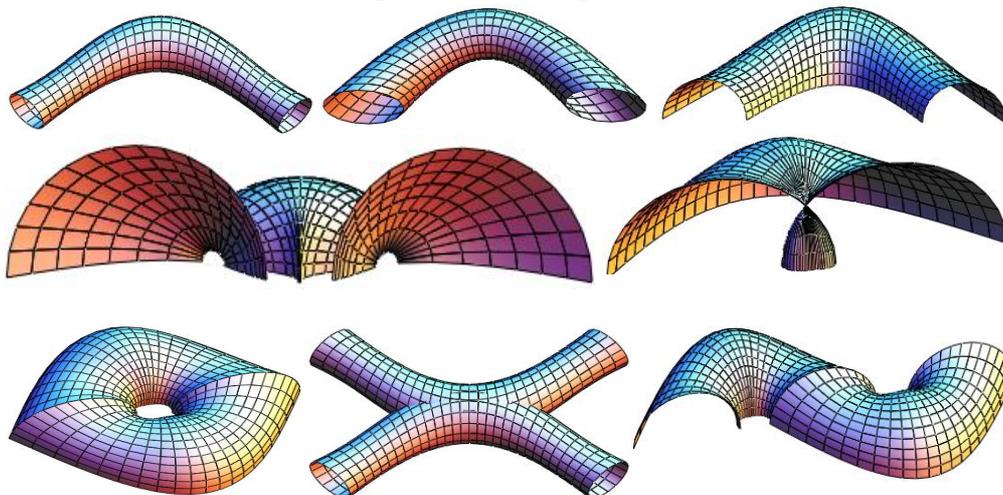


Рис. 9 Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющей косинусоидой

Л и т е р а т у р а

1. *Joachimsthal F.* J. reine und angew. Math., 1846.
2. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
4. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
5. *Marc Dohm.* The implicit equation of a canal surface// Journal of Symbolic Computation. – 2009. – Vol. 44, Iss. 2. – P. 111-130.
6. *Иванов В.Н., Жиль-улбе Матье.* К вопросу о геометрии и конструировании оболочек в форме каналových поверхностей Иоахимсталя//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвуз. сб. научных тр., вып.4. – М.: МБК «Био-контроль», 1994. - С. 68-75.
7. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с плоской линией центров// Исследования пространственных систем: Материалы семинара кафедры сопротивления материалов РУДН. - М.: Изд-во РУДН, 1996. - С. 32-36.
8. *Иванов В.Н., Насер Юнес Аббуши.* Исследования геометрии каналových поверхностей Иоахимсталя// Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях: Труды XXXIII научной конференции РУДН. – М.: РУДН, 1997. – С. 115-118.
9. *Иванов В.Н.* Конструирование оболочек на основе каналových поверхностей Иоахимсталя// Вестник Российского университета дружбы народов/ Специальный выпуск: «Инженерные исследования». – № 1. – 2000. – С. 57-61.
10. *Насер Юнес Ахмед Аббуши.* Применение каналových поверхностей Иоахимсталя в различных отраслях строительства// Вестник Российского университета дружбы народов/ Серия: «Инженерные исследования»/ Специальный выпуск «Геометрия и расчет тонкостенных пространственных конструкций». – № 1. – 2002. – С. 80-89.
11. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющими кривыми 2-го порядка// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – № 4. – С. 3-10.
12. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с произвольной направляющей кривой// Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование/ Материалы VI международной научно-практической конференции. 21-24 апреля 2009 г. – Харьков: ХПИПИТ, 2009. – С. 46-51.
13. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: Изд-во РУДН, 2010. – 540 с.

References

1. Joachimsthal F. (1846). *J. reine und angew. Math.*
2. Shulikovskiy, V.I. (1963). *Classic Differential Geometry*, Moscow: GIFML, 540 p.
3. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Moscow: 'LIBROKOM', 560 p.
4. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
5. Dohm, Marc (2009). The implicit equation of a canal surface, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 44, Iss. 2, p. 111-130.
6. Ivanov, V.N. Mathieu, Gil-oulbe. (1994). On question of geometry and design of the shells in the form of Joachimsthal's canal surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, Iss. 4, Moscow, p. 68-75.
7. Ivanov, V.N. (1996). Joachimsthal's canal surfaces with a plane center line, *Issledovaniya Prostranstvennyh Sistem*, Moscow: RUDN, p. 32-36.
8. Ivanov, V.N., Abbushy, Nasr Unes (1997). Investigation of the geometry of Joachimsthal's canal surfaces, *Problemy Teorii i Praktiki v Inzhenernyh Issledovaniyah*, Moscow: RUDN, p. 115-118.
9. Ivanov, V.N. (2000). Construction of the shells on the base of Joachimsthal's canal surfaces, *Vestnik Rossiyskogo Universiteta Druzhy Narodov*, «Engineering Investigation», № 1, p. 57-61.
10. Abbushy, Nasr Unes (2002). The application of Joachimsthal's canal surfaces in various branches of building, *Vestnik Rossiyskogo Universiteta Druzhy Narodov*, «Engineering Investigation», № 1, p. 80-89.
11. Ivanov, V.N. (2008). Joachimsthal's canal surfaces with a directrix curve of the second order, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p. 3-10.
12. Ivanov, V.N. (2009). Joachimsthal's canal surfaces with any directrix curve, *VIth International Conference: Geometric Design and Computer Technologies: Theory, Practice, Education*, April 21-24, 2009, Kharkov: HPIPiT, p. 46-51.
13. Ivanov, V.N., Krivoshapko, S.N. (2010) Analytical Methods of Analysis of Shells of Non-canonic Form, Moscow: Izd-vo RUDN, 540 p.

**THIN-WALLED SHELL STRUCTURES
ON THE BASE OF JOACHIMSTHAL'S CANAL SURFACES**

V.N. Ivanov, Valensya Rodrigues Edward G.
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

The article concerns with the questions of the forming of the space thin-walled structures on the base of the Joachimsthal's canal surfaces. The Joachimsthal's canal surfaces are formed by the system of the circles lying in the planes of pencil. This allows making such structures without using of complex types of shuttering and these surfaces give an opportunity to create different interesting forms of the spatial thin-walled construction.

KEY WORDS: cyclic surfaces, canal surfaces, surface with the generating curves in the planes of pencil, thin-walled space structures.

