ДЕЙСТВИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕСТАХ СОПРИКОСНОВЕНИЯ КОЛЕСА И ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ НА ТРЕЩИНЫ ПО ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Ш.Г. ГАСАНОВ, *канд. техн. наук, доцент*
Бакинский филиал Московского государственного открытого университета, AZ 1012, Азербайджан, г. Баку, Тбилисский просп., д.69 а,
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассматривается плоская задача механики разрушения о трещинах-расслоении, возникающих на границе раздела дорожного покрытия сцепленного с упругим основанием другого материала, когда в поверхность дорожного покрытия вдавливается колесо под действием произвольной системы сил.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дорожное покрытие, упругое основание, трещина- расслоение границе раздела.

Анализ [1, 2] современного состояния дорожных покрытий на упругом основании выявил, что материалам дорожных одежд свойственны трещиновидные несплошности. Между покрытием и основанием могут образовываться переходные зоны, в которых физико-механические свойства материала отличаются от свойств основных материалов. Эти повреждения на границе раздела сред дорожного покрытия и упругого основания могут иметь как естественное происхождение (расслоения, включения, поры), так и вызываться техноогическими процессами. Несмотря на большое значение перечисленных факторов на прочность дорожной одежды до настоящего времени эти вопросы не нашли должного внимания в методах расчета. Разработка расчетных моделей исследования повреждений дорожного покрытия является актуальной проблемой. Значительный интерес в связи с этим представляют дефекты типа трещин. Примем следующие упрощающие предположения относительно работы дорожного покрытия:

а) дорожное покрытие является неразрезной полосой бесконечной длины неизменного поперечного сечения, лежащего на сплошном упругом основании,

б) вертикальные силы приложены в плоскости симметрии дорожного покрытия.

На основании принятых предположений для расчета напряженно- деформированного состояния пары «дорожное покрытие–упругое основание» приходим к следующей задаче теории упругости.

В декартовых координатах x,y имеем двухслойное тело, состоящее из покрытия толщины h с упругими характеристиками G_1 (модуль сдвига) и μ_1 (коэффициент Пуассона), сцепленного с упругой полуплоскостью с характеристиками G_2 и μ_2. Рассмотрим контактную задачу теории упругости для двухслойного тела, когда к наружной поверхности вдавливается колесо (каток) под действием произвольной системы сил. Можно считать, что к каждой единице длины площади контакта приложена нормальная сила P_k (усилие прижима) и момент M. Основание твердого колеса характеризуется достаточно гладкой функцией $f_*(x)$. Пусть под действием этой нагрузки на линии раздела упругих сред y=0 в силу недостаточной адгезионной прочности между покрытием и полуплоскостью (основанием) образуются трещины. В плоскости y=0 двухслойное тело имеет полости, проекцией которых на плоскость комплексного переменного является N разрезов $L_j = a_j b_j$ (j = 1, 2, …, N) оси x. Совокупность этих разрезов обозначим через L. Берега трещины считаются свободными от внешних нагрузок.

На основании вышесказанного краевые условия рассматриваемой контактной задачи механики разрушения имеют вид:

$$\text{при } y = h \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{вне контактной площадки}$$

$$\text{при } y = h \quad v_n = f(x) + \alpha x + C, \ \tau_{nt} = f\sigma_n \ \text{на контактной площадке} \tag{1}$$

$$\text{при } y = 0 \ \ (\sigma_y - i\tau_{xy})_I = (\sigma_y - i\tau_{xy})_{II}, \ \ (u+iv)_I = (u+iv)_{II} \quad \text{вне } L \tag{2}$$

$$\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L. \tag{3}$$

При $y \to -\infty$ перемещения и напряжения исчезают. Здесь принято, что на участке внешней поверхности покрытия, где в него вдавливается колесо, имеют место силы сухого трения, вне участка контакта поверхность покрытия свободна от внешних усилий. На границе раздела сред (покрытие–упругое основание) имеет место равенство напряжений и перемещений, i – мнимая единица; C – поступательное перемещение индентора (колеса); α – угол поворота индентора. Кроме того, имеют место соотношения, связывающие P_k и M с контактным давлением. Для решения поставленной контактной задачи используем принцип суперпозиции. Рассматриваемое состояние двухслойного тела можно представить в виде суммы двух состояний:

1) адгезионное соединение материалов без трещин-расслоений под действием вдавливания колеса в покрытие.

2) адгезионное соединение материалов с N прямолинейными трещинами на границе сред, на берега трещины действуют напряжения, взятые с обратным знаком, имеющие место на оси *x,* где расположены трещины в первом напряженном состоянии.

Граничные условия задачи для первого напряженно-деформированного состояния имеют вид (1) - (2). Решение этой задачи было построено в [3]. Поэтому первое напряженно-деформированное состояние считаем известным. Из первого напряженно-деформированного состояния находим напряжения $\sigma_y^1(x)$ и $\tau_{xy}^1(x)$. Граничные условия на берегах трещин для второго напряженно- деформированного состояния будут

$$\sigma_y^2 - i\tau_{xy}^2 = -(\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1) \ \text{ на } L. \tag{4}$$

Второе напряженно-деформированное состояние в окрестности системы N трещин определяем приближенно в том смысле, что будем удовлетворять граничным условиям задачи на берегах трещин (условие (4)), и требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещин напряженное состояние в покрытии совпадало с напряженно-деформированным состоянием, вызванным вдавливанием колеса для бездефектной пары полосы на упругом основании.

Перейдем к решению задачи для второго напряженного состояния.

С помощью формул Колосова-Мусхелишвили [4] имеем

$$\sigma_x^{(k)} + \sigma_y^{(k)} = 2\left[\Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)}\right] \qquad (z = x + iy), \tag{5}$$

$$\sigma_x^{(k)} + i\tau_{xy}^{(k)} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \bar{z}\Phi_k'(z) + \Psi_k(z),$$

$$2G_k(u^{(k)} + iv^{(k)}) = k_k\varphi_k(z) - z\overline{\Phi_k(z)} - \overline{\psi_k(z)} \quad (k{=}1,\ 2)$$

Здесь $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ – аналитические функции при $y > 0$; $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ – аналитические функции при $y < 0$.

Введем [5] функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, аналитические во всей плоскости z, кроме, может быть, оси x:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{G_1(1+k_2)}{G_1+k_1G_2}\Phi_2(z)+\dfrac{G_2-G_1}{G_1+k_1G_2}\left[\overline{\Phi_1}(z)+z\overline{\Phi_1'}(z)+\overline{\Psi_1}(z)\right] & (\operatorname{Im} z<0)\\ \Phi_1(z) & (\operatorname{Im} z>0)\end{cases}, \quad (6)$$

$$\Omega(z)=\begin{cases}\dfrac{G_1(1+k_1)}{G_2+k_2G_1}\left[\overline{\Phi_2}(z)+z\overline{\Phi_2'}(z)+\overline{\Psi_2}(z)\right]-\dfrac{G_1k_2-G_2k_1}{G_2+k_2G_1}\Phi_1(z) & (\operatorname{Im} z>0)\\ \overline{\Phi_1}(z)+z\overline{\Phi_1'}(z)+\overline{\Psi_1}(z) & (\operatorname{Im} z<0)\end{cases}.$$

Из этих формул получаем необходимые в дальнейшем основные соотношения для компонент тензора напряжений и производных по x от компонент вектора смещений через функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

В покрытии (Im z>0):

$$\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\Phi(z), \quad (7)$$

$$\sigma_x-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)},$$

$$2G_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=k_1\Phi(z)-\Omega(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)},$$

в нижней полуплоскости (Im z<0):

$$\sigma_x+\sigma_y=4\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\operatorname{Re}\left[\Phi(z)+\frac{G_1-G_2}{G_1+k_1G_2}\Omega(z)\right], \quad (8)$$

$$\sigma_x-i\tau_{xy}=\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z)+\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z)+\frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar z)+$$

$$+\frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar z)+(z-\bar z)\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)}+\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right],$$

$$2G_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=k_2\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z)+k_2\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z)-\frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar z)-$$

$$-\frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar z)-(z-\bar z)\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)}+\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right].$$

Считается, что $\lim y\Phi'(x+iy)=0$, $\lim y\Omega'(x+iy)=0$ при $y\to0$ для всех x..

Учитывая соотношения (7) и (8), граничные условия (4) запишем в виде:

$$\Phi^+ +\Omega^- = f^+(x) \qquad \text{на } L, \quad (9)$$

$$(G_1+k_1G_2)\Phi^- +(G_1-G_2)\Omega^- +(G_1k_2-G_2k_1)\Phi^+ +(G_2+k_2G_1)\Omega^+ =$$

$$=(G_1+k_2G_1)f^-(x),$$

где $f^+(x)=f^-(x)=-(\sigma_y^1-i\tau_{xy}^1)$ на L.

Умножая второе условие (9) на $-1/G_1(1+k_2)$ и $1/G_2(1+k_1)$ и складывая с первым условием, получаем две, решаемые порознь, краевые задачи линейного сопряжения для одной функции

$$F_1^+ - F_1^- = f^+ - f^-, \quad (10)$$

$$F_2^+ + gF_2^- = f_0.$$

Здесь

$$F_1(z)=\frac{1}{G_1(1+k_2)}\left[(G_1+k_1G_2)\Phi(z)-(G_2+k_2G_1)\Omega(z)\right],$$

$$F_2(z)=\Phi(z)+\Omega(z),\quad g=\frac{G_1+k_1G_2}{G_2+k_2G_1},$$

$$f_0=\frac{1}{G_2+k_2G_1}\left[G_2(1+k_1)f^{+}+G_1(1+k_2)f^{-}\right].$$

В классе функций, имеющих в концах разрезов $x=a_k$, $x=b_k$ (k = 1,2,…,N) интегрируемую бесконечность, общее решение краевой задачи имеет вид

$$F_1(z)=C, \tag{11}$$

$$F_2(z)=\frac{1}{2\pi iX(z)}\left[\int_L\frac{f_0X(x)}{x-z}dx+P_n(z)\right],$$

где

$$X(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{1/2+i\beta}(z-b_k)^{1/2-i\beta},\ \beta=\frac{1}{2\pi}\ln g,\ P_n(z)=C_nz^n+...+C_0.$$

Для функции $X(z)$ выбирается такая ветвь, что при больших значениях z функция $X(z)=z^n+O(z^n)$. Из условия на бесконечности следует, что

$$C=0,C_n=0.$$

Остальные n неизвестных коэффициентов полинома $P_n(z)$ определяются из условия однозначности смещений подобно случаю однородного тела [4]. Выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z)=\frac{G_2+k_2G_1}{G_1+G_2+k_1G_2+k_2G_1}F_2(z); \tag{12}$$

$$\Omega(z)=\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+G_2+k_1G_2+k_2G_1}F_2(z).$$

С помощью найденных формул (7), (8), (11) и (12) исследуется напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия на упругом основании.

Коэффициенты интенсивности напряжений для трещины связаны с распределением напряжений на ее продолжении [6]

$$K_I+iK_{II}=\lim_{c\to\infty}\sqrt{2\pi c}\left[\sigma_y(c)+i\tau_{xy}(c)\right]c^{-i\beta}, \tag{13}$$

где $c=x-l$ – расстояние от вершины трещины; l – полудлина трещины; $x\ge l$; $\sigma_y(c)$, $\tau_{xy}(c)$ – напряжения на продолжении трещины при нагрузках $\sigma_y^1(x)$ и $\tau_{xy}^1(x)$ на ее берегах.

Для случая одной трещины с вершинами a и b имеем

$$\sigma_y(c)+i\tau_{xy}(c)=\frac{ch(\pi\beta)}{\pi\sqrt{(x-a)(x-b)}}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{i\beta}\times$$

$$\times\int_a^b\frac{(b-\xi)(\xi-a)}{\xi-x}\left(\frac{a+\xi}{b-\xi}\right)^{i\beta}(\sigma_y^1(\xi)+i\tau_{xy}^1(\xi))d\xi.$$

Окончательно находим

$$K_I + iK_{II} = \frac{ch(\pi\beta)}{(b-a)^{1/2+i\beta}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^b \left(\frac{a+\xi}{b-\xi} \right)^{1/2+i\beta} (\sigma_y^1(\xi) + i\tau_{xy}^1(\xi)) d\xi \,. \qquad (14)$$

Для облегчения расчетов при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений поступим следующим образом.

Найдем максимальные значения $\sigma_y^1(x)$ и $\tau_{xy}^1(x)$:

$$\sigma_0 = \max \sigma_y^1(x),$$

$$\tau_0 = \max \tau_{xy}^1(x), \qquad a \le x \le b.$$

Тогда для коэффициентов интенсивности напряжений находим

$$K_I + iK_{II} = (\sigma_0 + i\tau_0)(1+2i\beta)(2l)^{-i\beta}\sqrt{\pi l} \,. \qquad (15)$$

Выражение для скорости высвобождения энергии деформации для трещины, расположенной на границе раздела дорожного покрытия и упругого основания определяются следующим соотношением

$$G_b = \left(\frac{k_1+1}{G_1} + \frac{k_2+1}{G_2} \right) \frac{K_0^2}{16ch(\pi\beta)},$$

где $K_0 = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ – модуль коэффициентов интенсивности напряжений.

Таким образом, полученные соотношения между внешней нагрузкой и длиной трещины, а также механическими и геометрическими характеристиками пары «дорожное покрытие–упругое основание» позволяют на стадии проектирования оценивать гарантированный ресурс дорожного покрытия с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения, устанавливать допустимый уровень дефектности и максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающих достаточный запас надежности.

Литература

1. *Бабков В.Ф., Андреев О.В.* Проектирование автомобильных дорог. Часть 1, – М.: Транспорт. 1987..– 368 с.

2. *Həsənov Ş.H., Piriyev Y.M., Qaraisayev N.M.* Avtomobil yolların nəqliyyat-istismar göstəricilərin yüksəldirməsi. II nəşr. – Bakı: Azərbaycan nəşriyyəti, 2009. – 360 s.

3. *Гасанов Ш.Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния в дорожном покрытии // Ученые записки Азерб. Арх.-Стр. Университета, 2007, №2, с.151-159.

4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

5. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами// Изв.АН СССР. ОТН, механика и машиностроение, 1962. №1. С.131-137.

6. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks // Trans.ASME J.Appl. Mech.1985, v.55, p.98-103.

EFFECT OF CONTACT STRESSES IN PLACES OF CONTACT OF WHEEL AND ROAD COVERING FOR INTERFACE CRACKS

Sh.H. Hasanov

The plane problem of mechanics of fracture cracks cracks-stratification, arising at the interface of road covering coupled with the elastic basis of another material, when the wheel is pressed into the road surface under the influence of an arbitrary system of forces is considered.

KEYWORDS: road covering, elastic foundation, interface crack - stratification