РАСЧЕТ БИФУРКАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ «СООРУЖЕНИЕ – СЛОЙ ОСНОВАНИЯ» С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОСНОВАНИЯ

В.К. ИНОЗЕМЦЕВ, *доктор технических наук, профессор*
О.В. ИНОЗЕМЦЕВА, *кандидат технических наук, доцент*
К.А. СТРЕЛЬНИКОВА, *аспирант*
Саратовский государственный технический университет,
Тел.: + 7 (8452) 52-63-01; E-mail: ksynikt@mail.ru

В статье рассматриваются в рамках плоской задачи результаты расчета критической нагрузки для системы «сооружение – фундаментная плита – слой основания». Показана модель системы, объединяющая абсолютно жесткое сооружение на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей с физически нелинейным слоем основания, позволяющая свести проблему устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: критическая нагрузка, нелинейность, точка бифуркации, упругий эквивалент, экспоненциальный закон.

Развитие деформационной неоднородности физически нелинейного слоя основания в процессе нагружения системы с высокорасположенным центром тяжести (рис. 1) приводит к снижению запаса ее устойчивости и потери устойчивости процесса деформирования [1]. Употребление здесь понятия «процесс деформирования» вместо понятия потери устойчивости состояния равновесия говорит о том, что определяемая бифуркационная нагрузка является «наиранней» и соответствует бифуркации скорости процесса деформирования [2]. Бифуркация скорости процесса деформирования основания сооружения приводит к тому, что исходный процесс деформирования, симметричный относительно оси симметрии системы «сооружение – основание», перестает быть устойчивым, что и является следствием начала развития несимметричного процесса деформирования. Для реальной системы «сооружение – основание» с наличием начальных несовершенств значение бифуркационной критической нагрузки определяет тот уровень нагружения системы при приближении, к которому начинается активный рост начальных несовершенств системы.

Рассмотрим в рамках плоской задачи результаты расчета критической нагрузки для системы «сооружение – фундаментная плита – слой основания». В данном случае строится математическая модель системы, объединяющая абсолютно жесткое сооружение на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей с физически нелинейным слоем основания. Модель позволяет свести проблему устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях в форме:

$$M(x) = \lambda N(x). \qquad (1)$$

Здесь x – неизвестная собственная функция, λ – собственное значение, M и N линейные дифференциальные операторы с соответствующими граничными условиями.

Для постановки задачи бифуркационной устойчивости неупругого процесса деформирования основания системы, объединяющей сооружение с высокорасположенным центром тяжести, фундаментную плиту и основание, необходимо в статических уравнениях плоской задачи, следующих из фундаментальной системы уравнений механики деформируемого твердого тела, использовать однородные линеаризованные соотношения для приращений напряжений

$$\frac{\partial \Delta\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_{13}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_3}{\partial z} = 0, \qquad \{\Delta\sigma\} = \lfloor E_{ij} \rfloor \{\Delta e\},$$

$$\Delta R_z(x) = -EJ\,\frac{\partial^4 \Delta W(x)}{\partial x^4}\,,$$

$$\Delta e_1 = \frac{\partial \Delta U}{\partial x};\quad \Delta e_3 = \frac{\partial \Delta W}{\partial z};\quad \Delta e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial x} + \frac{\partial \Delta U}{\partial z}\right), \tag{2}$$

где $\Delta R_z(x)$ – приращение реактивного вертикального отпора на части поверхности основания, взаимодействующей с нагруженной фундаментной плитой, связанное условием равновесия балки с величиной ее изгибной жесткости (EJ).

Неоднородность в уравнении (параметр нагрузки от высотного сооружения) содержится в граничных условиях задачи изгиба фундаментной плиты. Так естественным условием для свободных краев плиты является равенство нулю приращения момента $\Delta M = 0$ и равенство приращения перерезывающей силы ΔQ приращению левой и правой опорных реакций сооружения на текущем шаге нагружения. Таким образом:

$$\Delta M = EJ\,\frac{\partial^2 \Delta W_k}{\partial x^2} = 0;\quad \Delta Q_k = -EJ\,\frac{\partial^3 \Delta W_k}{\partial x^3} = \Delta P_k^{\,0,L}\,, \tag{3}$$

где $\Delta P_k^{0,L}$ – приращение левой (ΔP_k^0) и правой (ΔP_k^L) опорных реакций сооружения на k-том шаге нагружения:

$$\Delta P_k^{\,0,L} = \frac{\Delta P_k}{2}\left(1 - \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\Delta W_n^L - \Delta W_n^0\right)\right) \mp \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Delta P_n}{2}\right)\left(\Delta W_k^L - \Delta W_k^0\right). \tag{4}$$

Граничные значения для приращений функций перемещений в случае односвязной области принимаем нулевыми по всему контуру области за исключением границы поверхности основания (рис. 2).

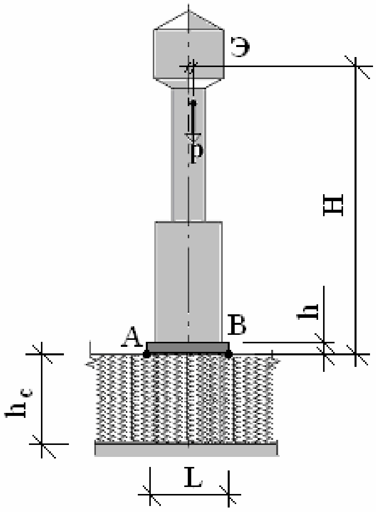

Рис. 1

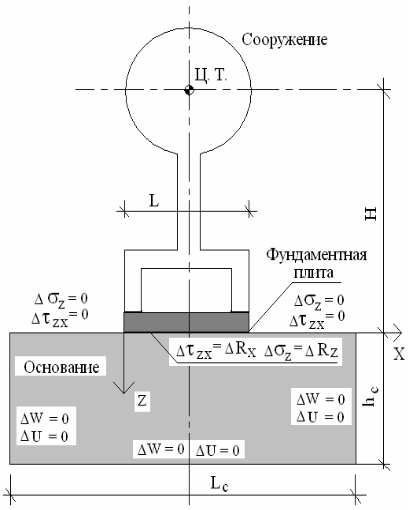

Рис. 2

Величина приращения вертикального давления, передаваемого на поверхность основания со стороны плиты, будет равна приращению вертикального отпора $\Delta R_z(x)$. Для сведения проблемы устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях на текущем k – том шаге нагружения следует по терминологии, принятой в литературе [1], «заморозить» параметр шага нагружения, то есть считать приращение ΔP_k равным нулю.

Физические соотношения основаны на экспоненциальном законе со следующими значениями параметров $\alpha = 70$ кПа; $\beta = 0.01$; $\gamma = 3000$ кПа:

$$\sigma_i = \alpha\left(1-\exp\left(-e_i/\beta\right)\right)+\gamma e_i \qquad (5)$$

где σ_i, e_i – интенсивности напряжений и деформаций.

Касательный модуль диаграммы деформирования равен

$$E_k = \frac{d\sigma_i}{de_i} = \frac{\alpha}{\beta}\exp\left(-\frac{e_i}{\beta}\right)+\gamma\ . \qquad (6)$$

Этот закон позволяет при различных значениях коэффициентов получить три вида диаграмм. Первая диаграмма соответствует линейно деформируемому материалу. При этом коэффициенты диаграммы принимают следующие значения: α = 0; γ = 10000 кПа. Вторая диаграмма представляет собой экспоненциальный закон со следующими значениями параметров: α = 100 кПа; β = 0.01; γ = 0 кПа. Промежуточному случаю будет соответствовать экспоненциальный закон с упрочнением α = 70 кПа; β = 0.01; γ = 3000 кПа. Для сравнения эти три вида диаграмм приведены на рис. 3.

В качестве примера расчета приведем результаты решения ряда задач при следующих исходных данных:

- изгибная жесткость балочного элемента очень большой (как для абсолютно жесткого тела) $EJ = 175 \cdot 10^7$ кН $\cdot$ м^2;

-коэффициент, характеризующий работу упругого основания на обжатие

$$k = E_0/(h_c\,(1-\nu_0^2)),$$

-коэффициент, характеризующий работу упругого основания на сдвиг или срез для линейно деформируемого тела

$$r = E_0 h_c/(6(1+\nu)) = 4444 \text{ кН/м}.$$

В случае нелинейно деформируемого слоя основания принимается экспоненциальный закон с упрочнением (рис. 3).

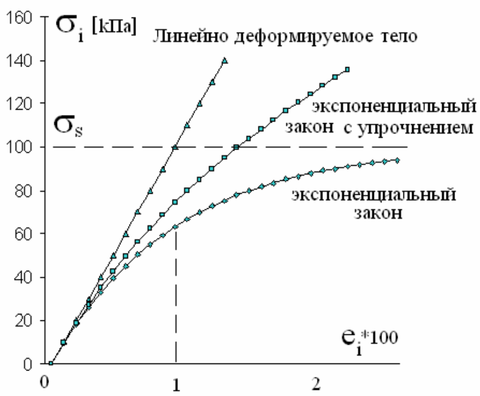

Рис. 3

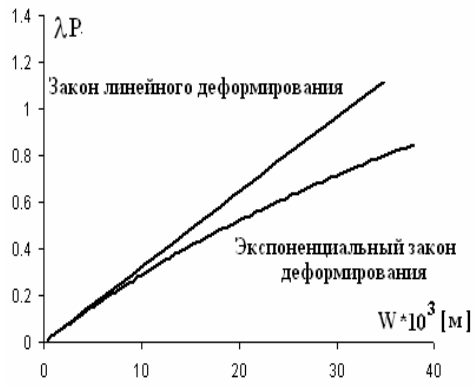

Рис. 4

На рис. 4 приведены графики зависимости осадок сооружения от безразмерного параметра нагрузки для упругого основания и для нелинейно деформируемого основания.

Точка бифуркации линейно деформируемого решения может быть найдена из условия равенства нулю определителя системы уравнений устойчивости. На рис. 5 приведена зависимость определителя системы уравнений в условиях линейно деформируемого основания. Для нелинейно деформируемого основания определитель линеаризованной системы нелинейно зависит от величины осадки основания и также обращается в ноль в точке бифуркации решения (рис. 5).

Используя концепцию упругого эквивалента системы можно определить величину критической нагрузки упругого эквивалента как собственное значение линеаризованной системы уравнений. При этом для линейно деформируемого основания критическая нагрузка упругого эквивалента является постоянной величиной и равна критической нагрузке самой системы «сооружение - основание».

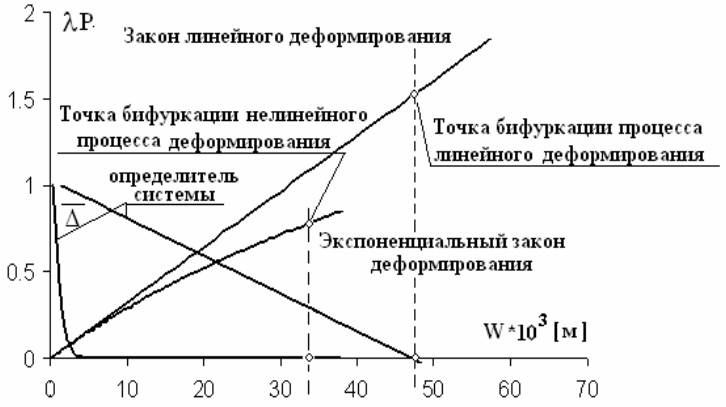

Рис. 5

Для нелинейно деформируемого основания критическая нагрузка упругого эквивалента зависит от уровня нагружения системы «сооружение – основание» и снижается по мере нагружения нелинейно деформируемого основания (рис. 6). Критическая нагрузка системы «сооружение – основание» определяется положением точки бифуркации решения, которая находится на пересечении графиков критической нагрузки упругого эквивалента системы и зависимости нагрузки от величины осадки основания (рис. 6).

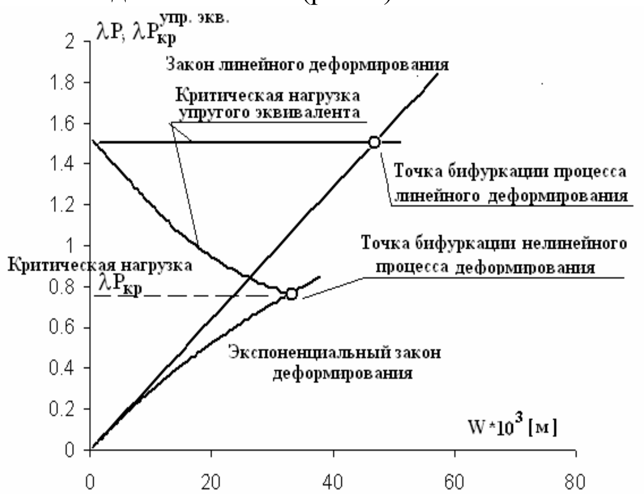

Рис. 6

Точка бифуркации или точка ветвления решения обычно имеет место для идеализированных систем, то есть для систем, не имеющих каких либо несовершенств геометрии, эксцентриситетов приложения нагрузки или несимметрично распределенной неоднородности материала. Реальные системы являются не идеализированными и имеют, как правило, малые начальные несовершенства. В этом случае отклонения системы от начального положения равновесия (для упругой системы) или нарушение исходного процесса деформирования (для нелинейно деформируемой системы) проявляются несколько ранее достижения критической бифуркационной нагрузки. По мере приближения уровня нагружения системы к точке бифуркации решения отклонения от исходного состояния равновесия или от исходного процесса деформирования начинают неограниченно возрастать. Продемонстрируем это на примере расчета (рис. 6) для нелинейно деформируемого основания с экспоненциальным законом деформирования для неидеализированной системы имеющий малый начальный эксцентриситет положения центра тяжести системы. Конкретная величина малого эксцентриситета в данном случае не имеет значения. Значение имеет наличие малого эксцентриситета, вследствие чего уравнения устойчивости становятся неоднородными. Точка бифуркации при этом трансформируется в предельную точку решения (рис. 7).

На рис. 7 приведены графики зависимости приращений осадок опор сооружения для идеализированной системы и точка бифуркации решения. На этом же рисунке приведены графики приращения осадок опор сооружения для неидеализированной системы. Можно отметить, что при приближении уровня нагружения к критической бифуркационной нагрузке «креновые» деформации сооружения возрастают.

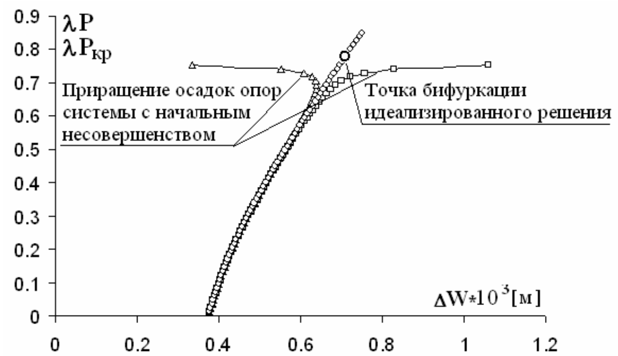

Рис. 7

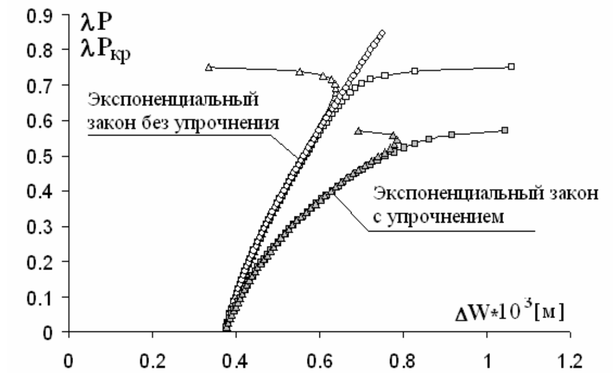

Рис. 8

Все результаты, приведенные для нелинейно деформируемого основания, получены с использованием экспоненциального закона деформирования с упрочнением. Сопоставим полученные графики зависимости приращений вертикальных перемещений от нагрузки для неидеализированной системы с аналогичными графиками, полученными для экспоненциального закона без упрочнения (рис. 8). Очевидно, что при экспоненциальном законе деформирования основания без упрочнения боковой крен сооружения развивается интенсивнее, а значение критической нагрузки снижается на 25%.

Литература

1. *Иноземцева О.В.* Статическая устойчивость высотного сооружения на фундаментной плите, взаимодействующей с неоднородным основанием// Совершенствование методов расчета строительных конструкций и технологий строительства: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СГТУ, 2006. – С. 26-33.

2. *Иноземцев В.К.* Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно-деформируемом основании: монография/ В.К. Иноземцев, Н.Ф. Синева, О.В. Иноземцева. Саратов: Сарат. Гос. Техн. Ун-т, 2008. 242 с.

BIFURCATIONAL STABILITY OF A SYSTEM "CONSTRUCTION BASED ON A FOUNDATION LAYER WITH NON-LINEARITY OF ITS PROPERTIES"

V.K. Inozemtzev, O.V. Inozemtzeva, and K.A. Strelnikova

In the article results of calculation of a critical load for system «a construction – a base plate – a layer of the basis » are considered within the limits of a flat problem. The model of system uniting absolutely rigid construction on a deformable base plate, cooperating with physically nonlinear layer of the basis is shown, allowing to reduce a problem of stability of a construction to a problem about own values.

KEY WORDS: critical load, nonlinearity, bifurcation point, the elastic equivalent, the exponential law.