АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

ГОЛЬДШТЕЙН Ю. Б., *к-т техн. наук, профессор*
Петрозаводский государственный университет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина,33, кафедра механики

Решается задача устойчивости упругой конструкции с односторонними связями, находящейся под воздействием консервативных и активных сил, или имеющей начальные несовершенства. На примере системы с двумя степенями свободы показано, что анализ равновесных состояний таких конструкций требует в общем случае обращения к решению нелинеаризованной задачи устойчивости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: рабочая система, нелинеаризованная задача, параметр нагружения, перескок.

Рассматривается задача устойчивости упругой конструкции с односторонними связями, к которой приложена консервативная параметрическая нагрузка. Кроме того, конструкция подвержена действию активных сил и/или имеет начальные несовершенства. Во многих случаях анализ равновесных состояний таких систем требует обращения к решению нелинеаризованной задачи устойчивости, что демонстрируется ниже на примере системы с двумя степенями свободы.

На рис. 1, *а* изображена конструкция с двумя жесткими односторонними связями, воспринимающими только сжатие. Нагрузки P и Q пропорциональны параметрам λ и μ соответственно. Первую из них принято называть параметрической, а вторую – активной [1]; история приложения этих нагрузок весьма важна. Сказанное далее относится к случаю, когда сила Q прикладывается до потери устойчивости конструкции. Через r на рисунке обозначена жесткость линейно упругих пружин, равная реактивному моменту, который возникает при взаимном повороте на единицу соединяемых пружиной элементов. На рис. 1, *b* приведены возможные рабочие системы рассматриваемой конструкции.

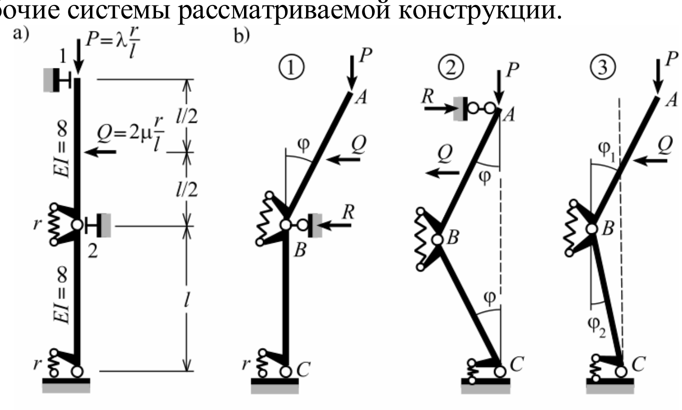

Рис. 1. Исследуемая конструкция и ее рабочие системы

При $\mu = 0$ решение линеаризованной задачи устойчивости для данной конструкции было дано в статье [2]. Оказалось, что отклоненные состояния равновесия поддерживаются первой $(\lambda \geq 1)$ и второй $(\lambda \geq 2{,}5)$ рабочими системами, тогда как рабочая система 3 не имеет нетривиальных равновесных форм, согласованных с характером односторонних связей. Конструкция теряет устойчивость при $\lambda = 1$ тогда, когда теряет устойчивость ее первая рабочая система.

Чтобы решить задачу при наличии активной нагрузки, придется от допущения о малости перемещений φ_1 и φ_2 отказаться. Поскольку рабочие системы 1 и 2 отличаются от рабочей системы 3 только наличием дополнительных связей, имеет смысл записать необходимые условия экстремума полной потенциальной энергии П именно для рабочей системы 3 с тем, чтобы несложной корректировкой полученных для нее соотношений переходить к уравнениям состояния рабочих систем 1 и 2. Из рис. 2 видно, что

$$\Pi = 0{,}5r[(\varphi_1+\varphi_2)^2+\varphi^2]-\lambda r(2-\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\mu r(2\sin\varphi_2-\sin\varphi_1).$$

Тогда

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1} = r(\varphi_1+\varphi_2-\lambda\sin\varphi_1+\mu\cos\varphi_1),\quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2} = r(\varphi_1+2\varphi_2-\lambda\sin\varphi_2-2\mu\cos\varphi_2),$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2} = r(1-\lambda\cos\varphi_1-\mu\sin\varphi_1),\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_2^2} = r(2-\lambda\cos\varphi_2+2\mu\sin\varphi_2),\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = r. \qquad (1)$$

Необходимые условия экстремума функционала П таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1-\lambda\sin\varphi_1+\mu\cos\varphi_1+\varphi_2=0,\\ &\varphi_1-\lambda\sin\varphi_2-2\mu\cos\varphi_2+2\varphi_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения, определяющие состояние рабочей системы 1, получаются при отбрасывании второго из уравнений (2), исключением двух последних соотношений из формул (1) и с учетом того, что $\varphi_2 = 0$:

$$\lambda\sin\varphi-\varphi = \mu\cos\varphi,\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = r(1-\lambda\cos\varphi-\mu\sin\varphi). \qquad (3)$$

При $\mu = 0$ и сколь угодно малом значении перемещения φ следует упомянутый выше результат: $\lambda_{кр} = 1$. Но если активная нагрузка присутствует, то при малом наклоне верхнего стержня равенство $(3)_1$ примет вид:

$$(\lambda - 1)\varphi = \mu.$$

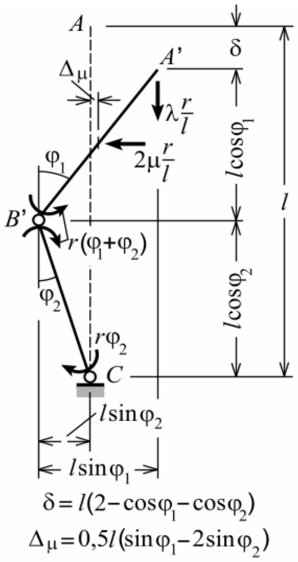

Рис. 2. Рабочая система 3

Следовательно, первая рабочая система не может находиться в состоянии равновесия до тех пор, пока параметр нагружения λ меньше единицы. Возникает вопрос: об устойчивости какого положения равновесия следует вести речь? Хотя бы по этой причине целесообразно обращение к постановке задачи, учитывающей большие (конечные) перемещения системы.

Необходимым условием равновесия рабочей системы 1 является не только соблюдение равенства $(3)_1$, но и требование замыкания второй односторонней связи, т. е. неотрицательности реакции R (см. рис 1, *b*). Эта реакция определяется равенством, вытекающим из условия равновесия $\Sigma M_C = 0$:

$$R = r[\lambda\sin\varphi - \mu(2+\cos\varphi)]/l.$$

Отсюда с учетом формулы $(3)_1$ следует

$$R = r(\varphi - 2\mu)/l.$$

Таким образом, нетривиальное положение равновесия рабочей системы 1 возможно лишь при $\varphi \geq 2\mu$.

Остается проверить, когда допустимые положения равновесия рассматриваемой рабочей системы устойчивы. Для этого формулы (3) удобнее представить в виде:

$$\lambda = \frac{\varphi + \mu\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = \frac{r(\sin\varphi - \mu - \varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi}, \qquad (3a)$$

после чего найти на интервале $2\mu \leq \varphi \leq \pi$ корень φ^* уравнения

$$\sin\varphi - \mu - \varphi\cos\varphi = 0.$$

(При $\varphi = \pi$ система устойчива, ибо стержень AB растянут, а стержень BC неподвижен; состояния равновесия при $\varphi > \pi$ неинтересны.)

Можно проверить, что первая производная от параметра $(3a)_1$ по аргументу φ обращается в нуль в той же точке φ*, в которой становится равной нулю вторая производная от энергии П. Следовательно, на интервале $\varphi \in [2\mu\ \pi]$ параметр нагружения λ минимален в точке $\varphi = \varphi^*$: $\min\lambda = \lambda(\varphi^*) \equiv \lambda^*$. Это означает, что указанный интервал изменения перемещения φ может быть разбит на зону $[2\mu\ \varphi^*]$ неустойчивых состояний равновесия и зону $[\varphi^*\ \pi]$ устойчивых состояний равновесия первой рабочей системы:

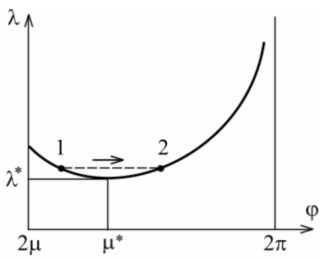

Рис. 3. Смена равновесных состояний при перескоке

$$1)\ 2\mu \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad \frac{\mu(2+\cos 2\mu)}{\sin 2\mu} \geq \lambda \geq \lambda^*; \quad 2)\ \varphi^* < \lambda \leq \pi, \quad \lambda^* \leq \lambda < \infty. \qquad (4)$$

Величины φ^* и λ^*, зависящие только от параметра μ, могут быть найдены численно. Например, при $\mu = 0,5$

$$1)\ 1 \leq \varphi \leq 1,20249,\ 1,50944 \geq \lambda \geq 1,48189;\ 2)\ 1,20249 < \lambda \leq \pi,\ 1,48189 \leq \lambda < \infty. \quad (4a)$$

Таким образом, говорить о потере устойчивости рабочей системы 1 можно лишь в том аспекте, что каким-то образом удалось реализовать неустойчивое равновесное состояние, которому отвечает точка 1 на нисходящей ветви кривой $\lambda(\varphi)$, после чего происходит перескок в устойчивое состояние, характеризуемое точкой 2 на восходящей ветви той же кривой (рис. 3).

Аналогично исследуются состояния второй рабочей системы. Теперь $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ и активна только первая односторонняя связь, реакция R которой не может быть отрицательной (см. рис. 1 и 2). Единственное уравнение состояния рабочей системы 2 получается сложением равенств (2). Другими словами,

$$5\varphi - 2\lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = r(5 - 2\lambda\cos\varphi + \mu\sin\varphi). \tag{5}$$

Реакция R, определяемая условиями равновесия отсеченного стержня AB, такова:

$$R = \frac{r}{2l}\left(3\mu - \frac{\varphi}{\cos\phi}\right). \tag{6}$$

Видно, что эта реакция положительна лишь тогда, когда

$$3\mu \ge \frac{\varphi}{\cos\phi}. \tag{7}$$

При $\mu = 0$ из формулы $(5)_1$ немедленно следует решение линеаризованной задачи: $\lambda_{кр} = 2{,}5$. Для анализа равновесных состояний в случае $\mu \ne 0$ и конечных перемещениях соотношения (5) удобнее записать иначе:

$$\lambda = \frac{5\varphi - \mu\cos\varphi}{2\sin\varphi}, \qquad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = \frac{5\sin\varphi - 5\phi\cos\varphi + \mu}{\sin\varphi}. \tag{5a}$$

Сила P направлена вертикально вниз, т. е. $\lambda \ge 0$. По первой из формул (5a) видно, что это возможно лишь тогда, когда $5\varphi - \mu\cos\varphi \ge 0$. Знаку равенства в этом условии отвечает загружение конструкции только активной силой Q, а потому корень φ_0 уравнения $5\varphi - \mu\cos\varphi = 0$ есть не что иное, как наименьший угол наклона жестких стержней второй рабочей системы, находящейся в состоянии равновесия. Верхнюю границу параметра φ определяет корень φ^{**} уравнения $\varphi - 3\mu\cos\varphi = 0$, диктуемого условием (7). На интервале $\varphi \in [\varphi_0 \;\; \varphi^{**}]$ обе функции (5a) положительны, так что состояния равновесия системы на указанном интервале изменения перемещения φ устойчивы. Другими словами, устойчивые положения равновесия второй рабочей системы возможны при

$$\varphi_0 \le \varphi \le \varphi^{**}, \qquad 0 \le \lambda \le \lambda^{**}, \tag{8}$$

где $\lambda^{**} = \lambda(\varphi^{**})$. В частности, при $\mu = 0$

$$0{,}019996 \le \varphi \le 0{,}914856, \qquad 0 \le \lambda \le 2{,}693668. \tag{8a}$$

Из формул (6) и (5,a) видно, что при $\varphi \ge \pi/2$ величины R, λ и Π'' положительны при любом неотрицательном значении параметра μ. Если же $\varphi = \pi/2$, то согласно зависимости $(5a)_1$ $\lambda = 5\pi/4$. Это означает существование устойчивых состояний равновесия рабочей системы 2 на интервале

$$\pi/2 \le \varphi \le \pi, \qquad 5\pi/4 \le \lambda \le \infty.$$

Особого интереса эти состояния не вызывают.

Если, вернувшись к рассмотрению линеаризованной задачи, записать формулы $(5)_1$ и (6) в виде $\varphi = \dfrac{\mu}{5 - 2\lambda}$, $\quad R = \dfrac{r}{2l}(3\mu - \varphi)$, то тут же можно установить, что

$$R = \mu\frac{r(7 - 3\lambda)}{l(5 - 2\lambda)}.$$

Следовательно, при $\lambda > 7/3$, но $\lambda < 5/2$, реакция R отрицательна, а потому согласно решению линеаризованной задачи равновесные состояния на интервале $2{,}333333 < \lambda < 2{,}5$ изменения параметра нагружения невозможны. Однако за пределами указанного интервала рабочая система 2 дееспособна. Такого рода «мертвые зоны» обнаруживаются при решении не только этой, довольно простой задачи, выполненном в предположении о малости перемещений. Сам факт появления таких зон должен рассматриваться как свидетельство в необходимости отказа от линеаризации.

Итак, на верхних границах интервалов (8), т. е. при $\varphi = \varphi^{**}$, $\lambda = \lambda^{**}$, реакция R обращается в нуль и обе односторонние связи становятся неактивными. Именно такие состояния конструкции поддерживает рабочая система 3. К рассмотрению ее равновесных состояний и следует теперь приступить.

При малых перемещениях φ_1 и φ_2 уравнения состояния (2) становятся линейными (см. рис. 1 и 2):

$$\left.\begin{aligned} &(1-\lambda)\varphi_1 + \varphi_2 = -\mu, \\ &\varphi_1 + (2-\lambda)\varphi_2 = 2\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

Решение этой системы единственно:

$$\varphi_1 = \mu\frac{\lambda-4}{\lambda^2-3\lambda+2}, \quad \varphi_2 = \mu\frac{3-2\lambda}{\lambda^2-3\lambda+2}. \qquad (9)$$

Найденные перемещения неограниченно возрастают при

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \mp \sqrt{5}\right), \qquad \lambda_1 < \lambda_2,$$

поэтому $\lambda_{кр} = \lambda_1$. Такой же результат был получен и в статье [2], в которой рассматривалась та же самая конструкция при отсутствии активной нагрузки и при малых перемещениях. Было также отмечено, что собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_{1,2}$, в рабочей системе 3 реализоваться не могут (противоречат характеру односторонних связей), а потому данное решение отбрасывалось. Однако наличие активной нагрузки меняет дело. При помощи формул (9) можно убедиться, что требования $\varphi_2 \ge 0$ и $\varphi_1 - \varphi_2 \ge 0$ функционирования рабочей системы 3 выполняются в диапазоне $1{,}5 \le \lambda \le 0{,}5(3+\sqrt{5})$ изменения параметра нагружения и любом положительном μ. На верхней границе указанного интервала перемещения φ_1 и φ_2 становятся бесконечно большими, поэтому следует положить, что $\lambda_{кр} = \lambda_2$.

Описанные результаты в ходе решения нелинеаризованной задачи подтверждаются только частично. Точнее, подтверждается только тот факт, что при $\mu = 0$ нетривиальные положения равновесия рабочей системы отсутствуют: нелинейные уравнения (2) в этом случае имеют лишь нулевое решение.

Если же $\mu \ne 0$, то простой подстановкой можно проверить, что системе (2) удовлетворяют два следующих решения:

$$\text{(a)} \quad \varphi_1 = 2\mu, \quad \varphi_2 = 0, \quad \lambda_a = \frac{\mu(2+\cos 2\mu)}{\sin 2\mu};$$

$$\text{(b)} \quad \varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi = 3\mu\cos\varphi, \quad \lambda_b = \frac{5\varphi - \mu\cos\varphi}{2\sin\varphi},$$

возвращающих нас к решениям (4), (7), (5*a*), полученным при анализе равновесных состояний рабочих систем 1 и 2. Кроме этих решений имеется множество решений

$$2\mu \ge \varphi_1 \ge \varphi^{**}, \quad 0 \le \varphi_2 \le \varphi^{**}, \quad \lambda_a \le \lambda \le \lambda^{**}, \qquad (10)$$

которые можно найти численно. Границы интервалов (10) зависят от значения параметра μ. Например, при $\mu = 0{,}5$:

$$1 \ge \varphi_1 \ge 0{,}914856, \quad 0 \le \varphi_2 \le 0{,}914856, \quad 1{,}509441 \le \lambda \le 2{,}693688. \qquad (10a)$$

Видно, что истолкованное при решении линеаризованной задачи устойчивости значение $\lambda = \lambda_2 = 2{,}618034$ как критическое на самом деле является рядовым. Но более важно, что на всем интервале (10) вторая производная от энергии П по переменной φ_1 отрицательна (см. формулу $(1)_1$), что говорит о неустойчивости любых равновесных состояний рабочей системы 3.

После всего сказанного выше механизм потери устойчивости рассматриваемой конструкции становится ясным. Ниже он комментируется для случая $\mu = 0{,}5$. Если после приложения силы Q нагрузка P наращивается плавно, то рабочая система 2, воспринимающая такое воздействие, будет столь же плавно деформироваться вплоть до достижения параметром λ значения 2,693688. По достижению этого значения обе односторонние связи станут пассивными, т. е. конфигурация конструкции станет исходной для рабочей системы 3. Но так как рабочая система 3 устойчивых равновесных состояний не поддерживает, произойдет перескок к конфигурации рабочей системы 1. Перемещение φ_2 остается равным нулю, а перемещение φ_1 скачкообразно меняет свое значение 0,914856 на 2, 317132, ибо именно при таком угле поворота стержня AB рабочая система 1 находится в состоянии устойчивого равновесия при $\mu = 0{,}5$ и $\lambda = 2{,}693688$.

Однако перескок из любого устойчивого состояния равновесия рабочей системы 2 в устойчивое состояние равновесия рабочей системы 1 может случиться в любой момент времени, как только параметр нагружения достигнет значения λ^*. Это произойдет при условии, что появится приток энергии извне (вследствие случайного импульса, например) или сыграют свою роль начальные несовершенства. Стало быть, силу $P^* = \lambda^* r / l$ можно квалифицировать как нижнюю критическую силу рассматриваемой конструкции, а силу $P^{**} = \lambda^{**} r / l$ – как верхнюю критическую силу (при $\mu = 0{,}5$ будет $\lambda^* = 1{,}481885,\ \lambda^{**} = 2{,}693688$).

Обращает на себя внимание тот факт, что воздействия P^* и P^{**} не являются критическими силами ни для одной из рабочих систем. Более того, ни одна рабочая система сама по себе устойчивости не теряет вообще, хотя перескок и произошел именно в ту рабочую систему, которая теряет устойчивость при отсутствии активной нагрузки. Следует отметить, что о принципиальной возможности потери устойчивости конструкции с односторонними связями при силе, не являющейся критической для любой из рабочих систем, говорилось еще в работе [3].

Итак, в общем случае решение линеаризованной задачи устойчивости для конструкции с односторонними связями может оказаться неудовлетворительным. Но ясно и то, что даже при довольно невысоком числе степеней свободы решение нелинеаризованной задачи весьма громоздко, строить его приходится численно, как правило, шаговыми методами, сходимость которых в случае конструктивной нелинейности, на которую накладывается геометрическая нелинейность, исследована недостаточно. Поэтому там, где это возможно, решать надо линеаризованную задачу. Если же в ходе ее решения обнаружится отсутствие невозмущенных форм равновесия или наличие зон, названных выше мертвыми, то переход к решению нелинеаризованной задачи неизбежен.

Имеется еще один чисто внешний признак, указывающий на возможность решения задачи устойчивости конструкции с односторонними связями в самой простой постановке. В рассмотренном выше примере активная нагрузка играет стабилизирующую роль: она препятствует отклонению конструкции в допускаемых односторонними связями направлениях (см. рис. 1). Будь эта нагрузка направлена иначе (например, если бы решалась задача при $\mu < 0$), то роль нагрузки изменилась бы на дестабилизирующую. Задача устойчивости конструкции с односторонними связями при дестабилизирующей активной нагрузке может быть решена в линеаризованной постановке.

Литература

1. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем / А. Р. Ржаницын. – М.: Гостехиздат, 1955. – 248 с.

2. *Шулькин Ю. Б.* Об устойчивости систем с односторонними связями / Ю. Б. Шулькин // Исслед. по теорет. основам расчета строит. конструкций: Межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ. – Л.: Изд-во ЛИСИ, 1983. – С. 28-31.

3. *Ляхович Л. С.* Метод отделения критических сил и собственных частот упругих систем / Л. С. Ляхович. – Томск: ТГУ, 1970. – 192 с.

EQUILIBRIUM STATE ANALYSIS OF A SYSTEM WITH UNILATERAL CONSTRAINTS BY FINITE DISPLACEMENTS

Yu. B. Goldshtein

A stability problem for an elastic structure subjected to conservative and active forces is considered. The structure has unilateral constraints and initial imperfections. An example of a system with two degrees of freedom shows that in general case, the analysis of stable states of such structures may be performed only on the basis of a non-linearized problem of stability.

KEYWORDS: Working system, Non-linearized problem of stability, Loading parameter, Bifurcation.