

## Вопросы теории пластичности

### РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ НА ОСНОВЕ МКЭ В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Н. А. ГУРЕЕВА, канд. техн. наук,

Д.П. АРЬКОВ, аспирант

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия,  
400002, Волгоград, Университетский пр., 26;

В рамках плоской задачи теории упругости для решения проблемы учета смещения конечного элемента как жесткого целого предлагается использование аппроксимаций перемещений и напряжений как величин векторных и тензорных полей. Разработан конечный элемент четырехугольной формы, узловыми неизвестными которого приняты перемещения и напряжения. Для формирования матрицы деформирования конечного элемента использован смешанный функционал Рейснера.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

1. Основные соотношения теории пластичности на шаге нагружения. В плоской задаче искомые перемещения  $u$  и  $w$  являются функциями только двух переменных  $x$  и  $z$ . В теле возникает плоская деформация, если перемещения будут происходить только параллельно плоскости  $xoz$

$$u = u(x, z); w = (x, z); v = 0. \quad (1)$$

Если в нагруженном теле функциями координат являются напряжения

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, z); \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, z); \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, z); \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = \sigma_{xy} = 0, \quad (2)$$

то тело находится в условиях плоского напряженного состояния.

Указанные типы задач в настоящей работе решаются на основе деформационной теории пластичности при реализации шагового нагружения.

1.1 Основные соотношения деформационной теории пластичности при плоской деформации. Гипотеза о пропорциональности компонентов девиаторов деформаций и напряжений записывается в виде [1]

$$\sigma_{xx} - \sigma_c = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_c); \sigma_{zz} - \sigma_c = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_c); \sigma_{xz} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \gamma_{xz}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  – линейные деформации;  $\gamma_{xz}$  – деформация сдвига;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  – нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_c = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 \text{ – среднее нормальное напряжение;}$$

$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})/3 \text{ – средняя деформация;}$$

$$\sigma_0 = \left[ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3\sigma_{xz}^2 \right]^{1/2} \text{ –}$$

интенсивность напряжений;

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}) + \frac{3}{4} \gamma_{xz}^2 \right]^{1/2} \text{ – интенсивность деформаций.}$$

Зависимость между средним напряжением и средней деформацией принимается в виде [1]

$$\sigma_c = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_c, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации.

С учётом (4) напряжения (3) представляются в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \varepsilon_{xx} \left( \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4}{9} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) + \varepsilon_{zz} \left( \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{2}{9} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right); \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{zz} \left( \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4}{9} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) + \varepsilon_{xx} \left( \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{2}{9} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right); \quad \sigma_{xz} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \gamma_{xz}.\end{aligned}\quad (5)$$

Зависимость между приращением напряжений и приращениями деформаций на шаге нагружения представим в таком общем виде

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{xx} &= \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}} \Delta\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{zz}} \Delta\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\gamma_{xz}} \Delta\gamma_{xz}; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta\sigma_{xz} &= \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\varepsilon_{xx}} \Delta\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\varepsilon_{zz}} \Delta\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\gamma_{xz}} \Delta\gamma_{xz}.\end{aligned}\quad (6)$$

При вычислении производных (6) принято во внимание соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_0} \left( \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0} \varepsilon_0 - \sigma_0}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} [E_k - E_c], \quad (7)$$

где  $E_k, E_c$  – касательный и секущий модули диаграммы деформирования.

Соотношения (6) можно представить в матричном виде

$$\{\Delta\sigma\} = [C_\varepsilon^II] \{\Delta\varepsilon\}; \quad \{\Delta\varepsilon\} = [C_\varepsilon^II]^{-1} \{\Delta\sigma\}, \quad (8)$$

где  $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{xx} \Delta\varepsilon_{zz} \Delta\gamma_{xz}\}$  – вектор–строка приращений деформаций;

$\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{xx} \Delta\sigma_{zz} \Delta\sigma_{xz}\}$  – вектор–строка приращений напряжений,

$[C_\varepsilon^II]$  – матрица упруго – пластической жёсткости материала при плоской деформации.

1.2. Соотношения деформационной теории пластичности при плоском напряжённом состоянии. В этом случае среднее напряжение и средняя деформация имеет вид

$$\sigma_c = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}); \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}). \quad (9)$$

С учётом (4), (9) соотношения (3) запишутся выражениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \sigma_{xx} \left( \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) + \sigma_{zz} \left( \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right); \\ \varepsilon_{zz} &= \sigma_{zz} \left( \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) + \sigma_{xx} \left( \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right); \quad \gamma_{xz} = 3 \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \sigma_{xz}.\end{aligned}\quad (10)$$

Приращения деформаций на шаге нагружения через приращения напряжений представим зависимостями

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial\sigma_{xx}} \Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial\sigma_{zz}} \Delta\sigma_{zz} + \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial\sigma_{xz}} \Delta\sigma_{xz}; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta\gamma_{xz} &= \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial\sigma_{xx}} \Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial\sigma_{zz}} \Delta\sigma_{zz} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial\sigma_{xz}} \Delta\sigma_{xz}.\end{aligned}\quad (11)$$

При вычислении производных принято во внимание соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0} \left( \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) = \frac{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \sigma_0} \sigma_0 - \varepsilon_0}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_c} \right]. \quad (12)$$

Приращения деформаций (11) можно представить в матричном виде

$$\{\Delta \varepsilon\} = [C_\sigma^{\text{II}}] \{\Delta \sigma\}; \quad \{\Delta \sigma\} = [C_\sigma^{\text{II}}]^{-1} \{\Delta \varepsilon\}, \quad (13)$$

где  $[C_\sigma^{\text{II}}]$  – матрица упруго–пластических податливости материала при плоском напряжённом состоянии.

2. Матрица деформирования конечного элемента на  $(j + 1)$ -ом шаге нагружения. Равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил может быть записано в виде функционала Лагранжа [2]

$$\int_V \left[ \{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta \sigma\}^T \right] \{\Delta \varepsilon\} dV = \int_S \{\Delta v\}^T \left[ \{q\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta q\}^T \right] dS, \quad (14)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{zz} \sigma_{xz}\}$  – вектор строка напряжений, полученных в результате  $j$  шагов нагружения;  $\{\Delta v\}^T = \{\Delta u \Delta w\}$  – вектор-строка приращений перемещений;  $\{q\}^T = \{q_x q_z\}$  – вектор-строка полных нагрузок за  $j$  шагов нагружения;  $\{\Delta q\}^T = \{\Delta q_x \Delta q_z\}$  – вектор-строка приращений на  $(j + 1)$ -ом шаге нагружения.

Представим удельную потенциальную энергию в (14) разностью полной и удельной дополнительной энергии

$$\frac{1}{2} \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\Delta \sigma\}^T [C^{\text{II}}] \{\Delta \sigma\}, \quad (15)$$

где  $[C^{\text{II}}] = [C_\varepsilon^{\text{II}}]^{-1}$  – при плоской деформации;  $[C_\sigma^{\text{II}}] = [C_\sigma^{\text{II}}]$  – при плоском напряженном состоянии.

С учётом (15) функционал (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta \varepsilon\} dV - \int_V \{\Delta \sigma\}^T [C^{\text{II}}] \{\Delta \sigma\} dV = \\ & = \frac{1}{2} \int_S \{\Delta v\}^T \{\Delta q\} dS + \int_S \{\Delta v\}^T \{q\} dS - \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta \varepsilon\} dV. \end{aligned} \quad (16)$$

В работе [3] был разработан конечный элемент в смешанной формулировке в виде произвольного четырёхугольника для исследования плоского напряжённого состояния в упругой постановке. Следуя [3], используем для аппроксимации приращений перемещений и приращений напряжений внутренней точки конечного элемента билинейные функции формы

$$\{\Delta v\} = [A] \{\Delta v_y\}; \quad \{\Delta \sigma\} = [S] \{\Delta \sigma_y\}, \quad (17)$$

где  $\{\Delta v_y\}^T = \{\Delta u^i \Delta u^j \Delta u^k \Delta u^l \Delta w^i \Delta w^j \Delta w^k \Delta w^l\}$  – вектор – строка приращений узловых неизвестных перемещений;

$\{\Delta \sigma_y\}^T = \{\Delta \sigma_{xx}^i \Delta \sigma_{xx}^j \Delta \sigma_{xx}^k \Delta \sigma_{xx}^l \Delta \sigma_{zz}^i \Delta \sigma_{zz}^j \Delta \sigma_{zz}^k \Delta \sigma_{zz}^l\}$  – вектор-строка приращений узловых напряжений;

$$[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\} \\ \{0\} & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\varphi\}^T & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{\varphi\}^T \end{bmatrix};$$

$\{\varphi\}_{1 \times 4}^T$  – строка билинейных полиномов. Приращения деформаций через приращения узловых перемещений определяется матричным соотношением [3]

$$\{\Delta \varepsilon\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 8} \{\Delta v_y\}_{8 \times 1}. \quad (18)$$

С учётом (17), (18) равенство (14) примет вид

$$\begin{aligned} & \{\Delta \sigma_y\}_{1 \times 12}^T \int_{V_{12 \times 3}} [S]^T [B] dV \{v_y\}_{8 \times 1} - \frac{1}{2} \{\Delta \sigma_y\}_{1 \times 12}^T \int_{V_{12 \times 3}} [S]^T [C] [S] dV \{\Delta \sigma_y\}_{12 \times 1} = \\ & = \frac{1}{2} \{\Delta v_y\}_{1 \times 8}^T \int_{S_{8 \times 2}} [A]^T [\Delta q] dS + \{\Delta v_y\}_{1 \times 8}^T \left[ \int_{S_{8 \times 2}} [A]^T [q] dS - \int_{V_{8 \times 3}} [B]^T \{\sigma\}_{3 \times 1} dV \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Минимизируя функционал (19) по узловым неизвестным  $\{\Delta \sigma_y\}^T$  и  $\{\Delta v_y\}^T$ , получим систему уравнений

$$[Q] \{\Delta v_y\} - [H] \{\Delta \sigma_y\} = 0; \quad [Q]^T \{\Delta \sigma_y\} - \{\Delta f_q\} - \{R\} = 0,$$

$$\text{где } [Q] = \int_{V_{12 \times 3}} [S]^T [B] dV; \quad [H] = \int_{V_{12 \times 3}} [S]^T [C] [S] dV; \quad \{\Delta f_q\} = \int_{S_{8 \times 2}} [A]^T [\Delta q] dS; \quad (20)$$

$$\{R\} = \int_{S_{8 \times 2}} [A]^T \{q\} dS - \int_{V_{8 \times 3}} [B]^T \{\sigma\} dV.$$

Систему (20) представим в конечно-элементной формулировке

$$[k] \{z_y\} = \{f_y\}, \quad (21)$$

где  $[k] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$  – матрица деформирования конечного элемента;

$\{z_y\}^T = \{\{\Delta \sigma\}^T \{v_y\}^T\}$  – вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\{f_y\}^T = \{\{0\}^T (\{\Delta f_q\}^T + \{\Delta R\}^T)\}$  – вектор узловых нагрузок.

Матрица деформирования всей конструкции формируется с применением традиционной процедуры МКЭ [2].

3. *Пример расчёта.* Рассмотрено напряженно-деформированное состояние заделанной по концам пластинки, нагруженной распределенной линейной нагрузкой в середине пролёта пластинки рис.1.

Были приняты следующие исходные данные:  $l = 40$  см,  $P = 58,43$  дан/см, высота поперечного сечения пластинки  $h = 1$  см, упруго-пластические свойства материала пластинки описываются диаграммой деформирования с нелинейным упрочнением.

Предел текучести  $\sigma_{iT} = 2000$  дан/см<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{iT} = 0,00203918$  – деформация соответствующая пределу текучести. Нелинейное упрочнение описывалось зависимостью  $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i + c$ .

На рис. 2 показана диаграмма деформирования материала пластинки, где  $a = 789018,28611$ ;  $b = 86782,099383$ ;  $c = 1819,7547393$ . Ввиду симметрии пластинки рассматривалась её половина, которая разбивалась по толщине на 10 равных промежутков и на 41 часть вдоль оси пластинки.

На рис. 3 по толщине центрального сечения пластинки показана эпюра нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$ . Как видно, в самых удаленных волокнах проявляется значительная нелинейность.

Полученные значения напряжений незначительно отличались от результатов при дискретизации пластинки на 6 элементов по толщине и на 21 часть по

длине. Уравнение статики: сумма проекций внутренних сил на ось пластинки равна нулю выполняется с точностью  $\Delta = 0,64\%$ . Уравнение статики: сумма моментов внутренних сил равна моменту внешних сил в центральном сечении пластинки выполняется с точностью до  $0,51\%$ .

Изложенный алгоритм вполне приемлем для учёта упруго – пластического материала в инженерных расчётах.

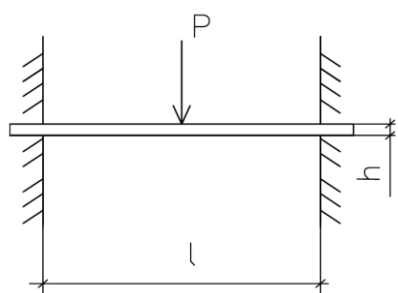


Рис. 1

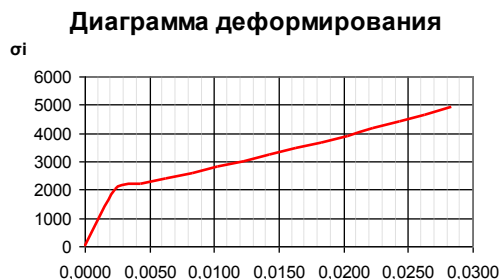


Рис. 2

**Изменение напряжения в зависимости от сечения пластинки**

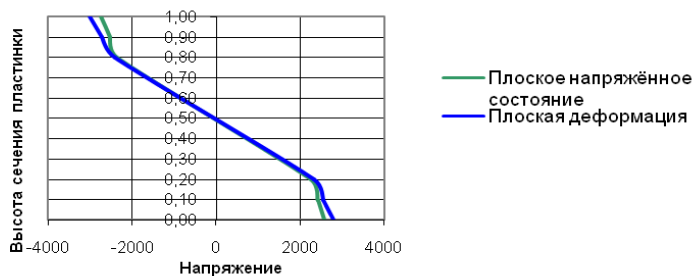


Рис. 3

**Л и т е р а т у р а**

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1970. – 288с.
2. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчётах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. - 344с
3. Гуреева Н.А. Плоская задача теории упругости на основе МКЭ в смешанной формулировке с узловыми перемещениями и напряжениями// Труды Всероссийской научно- практической конференции «Инженерные системы -2008», Москва, 7-11 апреля 2008 г. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С. 226-229.

**FLAT PROBLEM OF THEORY OF JUMP IN BASE METHOD OF FINAL ELEMENTS IN MIXED UNDERSTANDING IN ACCOUNT PHYSICAL NONLINEARITY**

N.A. Gureeva, D.P. Ar'kov

For the calculation of developments in conditions of flat problem of theory of jump is designed matrix an deforming tetragonal end element on the count of physical material uneven line in base deformation theories of plasticity.

On the measure that as a node unknown finite element were taken incriminations of displacing and incriminations of voltages. Incriminations of voltages and moving an internal spot of end element were approximated through node values of sought values by correlations of two linear sought values.

KEYWORDS: algorithm, finite element, displacement, voltages, functional.