

**О ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В  
ОБЪЕКТАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

В.К. МУСАЕВ, доктор технических наук, профессор  
Российский университет дружбы народов,  
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Россия  
musayev-vk@yandex.ru

*Рассматриваются вопросы оценки достоверности и точности результатов решения различных задач при нестационарных динамических волновых воздействиях, выполненных с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Сопоставление производится с результатами аналитического решения и динамической фотоупругости. Исследуемая задача представлена в виде сооружений с основанием при воздействии нестационарных волн напряжений.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** динамическая задача, дифференциальные уравнения в частных производных, математическое моделирование, метод конечных элементов, нестационарные волны напряжений, явная двухслойная схема, аналитическое решение, фотоупругость, фотограмма, сопоставление, достоверность, свободное круглое отверстие, объект сложной формы.

Импульсное воздействие характеризуется внезапностью приложения и кратковременностью действия, измеряемого микросекундами. Интенсивность их достаточно велика, для того чтобы произвести разрушение и большие необратимые изменения в теле, на которые они действуют.

Возмущения, распространяясь в теле, образуют области, которые расширяются с течением времени и ограничены частью поверхности тела и поверхностью фронта волны напряжений. Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении [1–5].

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме работ [6–10].

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости при различных начальных и граничных условиях работ [6–15]. Рассматриваются области различной формы и модели уравнений состояния кусочно-неоднородной изотропной среды, которые подчиняются упругому закону Гука при малых упругих деформациях работ.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики и алгоритма и результаты решенных нестационарных динамических задач о распространении волн напряжений в деформируемых областях рассмотрены в следующих работах [6–17].

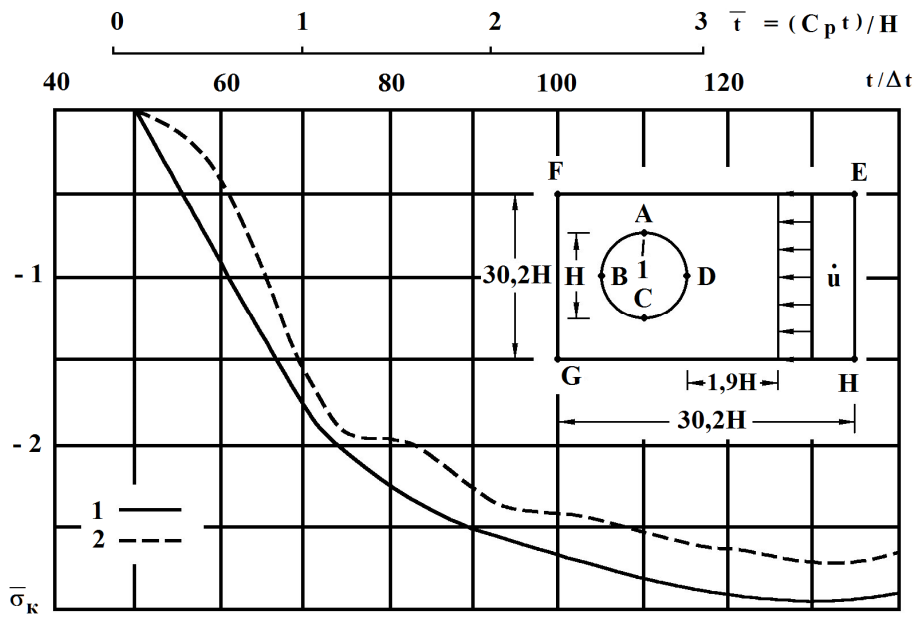
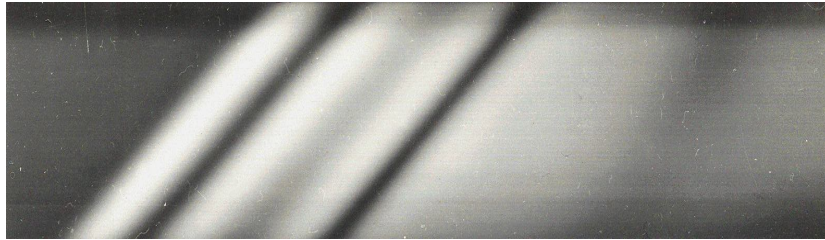


Рис. 1. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точке 1 во времени  $\bar{t}$  на контуре свободного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда

a)



b)

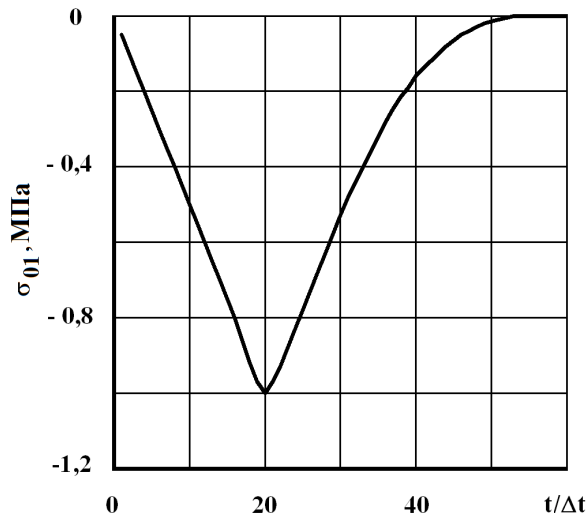


Рис. 2. Экспериментальное воздействие  $\sigma_{01}$  во времени  $\bar{t}$ , полученное методом динамической фотоупругости: a – фотограмма картин полос; б – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях

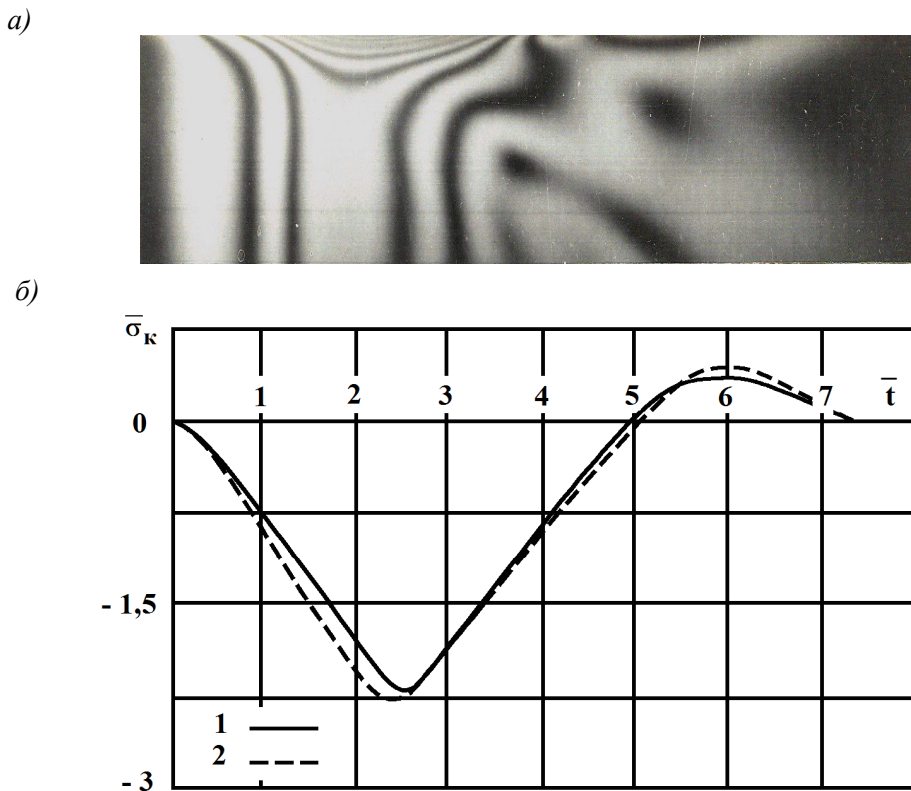


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точке  $l$  во времени  $\bar{t}$  на контуре свободного круглого отверстия при воздействии  $\sigma_{01}$ : а) фотограмма картин полос; б): 1 – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях

Приводится информация о практической реализации метода конечных элементов в перемещениях.

Для решения волновых задач разработан комплекс программ на алгоритмических языках Фортран-90 и С++.

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми.

В сечении на расстоянии  $1,9H$  (рис. 1) при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) скорость упругого перемещения  $\dot{u}$  изменяется линейно от 0 до  $P$  ( $P = \sigma_0 / (\rho C_p)$ ) ( $\sigma_0 = -0,1$  МПа ( $-1$  кгс/см<sup>2</sup>)), а при  $n \geq 10$   $\dot{u} = P$ . Контур круглого отверстия  $ABCD$  предполагается свободным от нагрузок при  $t > 0$ . Граничные условия для контура  $EFGH$  при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ .

Отраженные волны от контура  $EFGH$  не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 260$ .

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками.

На рис. 1 показано изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  ( $\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$ ) в точке  $l$  во времени  $\bar{t}$  ( $\bar{t} = (C_p t) / H$ ): 1 – результаты аналитического решения [1, 2]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [7–10].

Проведенный анализ показал, что расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 6 %.

На рис. 2 показано экспериментальное воздействие  $\sigma_{0I}$  во времени  $\bar{t}$ , полученное методом динамической фотоупругости: *a* – фотограмма картин полос; *b* – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях.

На рис. 3 показано изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точке *I* во времени  $\bar{t}$  при воздействии  $\sigma_{0I}$ : *a* – фотограмма картин полос; *b*: *I* – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости [7–10]; *2* – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [7–10].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 2 %.

На основании приведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Анализ численных результатов показывает, что метод конечных элементов в перемещениях с успехом применяется для решения нестационарных динамических задач.
2. Проведенные сравнения с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.
3. Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

#### Л и т е р а т у р а

1. Барон М., Мэтьюс А. Дифракция волны давления относительно цилиндрической полости в упругой среде // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1961. – Т. 28, № 3. – С. 31–38.
2. Гернет Х., Крузе-Паскаль Д. Неустановившаяся реакция находящегося в упругой среде кругового цилиндра произвольной толщины на действие плоской волны расширения // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1966. – Т. 33, № 3. – С. 48–60.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М: Мир, 1975. – 543 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
5. Ионов В.И., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. – М.: Высшая школа, 1975. – 464 с.
6. Мусаев В.К. Дифракция продольной волны на круглом и квадратном отверстиях в упругой среде // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн. – Фрунзе: Фрунзенский политехнический институт, 1983. – Ч. 1. – С. 72–74.
7. Musayev V.K. Structure design with seismic resistance foundations // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. – Moscow: TsNIISK, 1990. – V. 4–A. – P. 191–200.
8. Musayev V.K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Saint Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. – V. 3. – P. 87–97.
9. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

10. *Мусаев В.К.* Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

11. *Ситник С.В., Куранцов В.А., Сазонов К.Б., Шепелина П.В., Шиянов С.М.* Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении дифракционных задач на круглом свободном и подкрепленном отверстиях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: ТЗ8. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 256–262.

12. *Ситник С.В., Сазонов К.Б., Шиянов С.М., Куранцов В.В., Кормилицин А.И.* Моделирование волнового напряженного состояния в объектах сложной формы с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: ТЗ8. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 262–268.

13. *Ситник С.В., Куранцов В.В., Ситник В.Г., Савичев В.А., Денисюк Д.А.* Численное моделирование нестационарного волнового напряженного состояния в деформируемых объектах сложной формы с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 478–481.

14. *Суцев Т.С., Ситник В.Г., Шепелина П.В., Шиянов С.М., Кормилицин А.И.* Сопоставление результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении нестационарной дифракционной задачи на круглом свободном отверстии // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 489–492.

15. *Суцев Т.С., Акатьев С.В., Ситник С.В., Куранцов В.А., Тарасенко А.А.* Численное моделирование безопасности сооружений от волновых взрывных воздействий с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2013. – С. 214–217.

16. *Nemchinov V.V.* Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Volume 9, Issue 1. – P. 85–89.

17. *Nemchinov V.V.* Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Volume 9, Issue 1. – P. 90–97.

#### References

1. *Baron, M, Me'tyus A* (1961). Difrakciya volny davleniya odnositel'no cilindricheskoj polosti v uprugoj srede. Prikladnaya mexanika. Trudy amerikanskogo obshhestva inzhenerov-mexanikov, Ser. E., Vol. 28, № 3, p. 31–38.

2. *Gernet,, X, Kruze-Paskal' D* (1966). Neustanovivshayasya reakciya naxodyashhegosya v uprugoj srede krugovogo cilindra proizvol'noj tolshhiny na dejstvie ploskoj volny rasshireniya. Prikladnaya mexanika. Trudy amerikanskogo obshhestva inzhenerov-mexanikov. Ser. E, Vol. 33, № 3, p. 48–60.

3. *Zenkevich, O.* (1975). Metod konechnyx e'lementov v texnike. M.: "Mir", 543 p.

4. *Timoshenko, SP, Gud'er, D.* (1975). Teoriya uprugosti. M.: "Nauka", 576 p.

5. *Ionov VI, Ogibalov, PM* (1975). Napryazheniya v telax pri impul'sivnom nagruzhenii. M.: Vysshaya shkola, 464 p.

6. *Musaev, VK* (1983). Difrakciya prodol'noj volny na kruglom i kvadratnom otverstiyax v uprugoj srede. Tezisy dokladov konferencii po rasprostraneniyu uprugix i uprugoplasticheskix voln. Frunze: Frunzenskij politexnicheskij institut, Ch. 1, p. 72–74.

7. *Musayev, VK* (1990). Structure design with seismic resistance foundations. Proceedings of the Ninth European Conference on Earthquake Engineering. Moscow: TsNIISK, V. 4–A, p. 191–200.
8. *Musayev, VK* (1991). Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects. Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. Saint Louis: University of Missouri-Rolla, Vol. 3, p. 87–97.
9. *Musayev, VK* (1997). Chislennoe reshenie volnovyx zadach teorii uprugosti i plastichnosti. Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya prikladnaya matematika i informatika. 1997, № 1, p. 87–110.
10. *Musayev, VK* (2009). Ocenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo e'ksperimenta pri reshenii zadach nestacionarnoj volnovoj teorii uprugosti. Nauchnyj zhurnal problem kompleksnoj bezopasnosti, № 1, p. 55–80.
11. *Sitnik, SV, Kurancov VA, Sazonov, KB, Shepelina, PV, Shiyarov SM* (2011). Dostovernost' rezul'tatov chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax pri reshenii difrakcionnyx zadach na kruglom svobodnom i podkreplennom otverstiyax. Tekhnosfer'naya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, e'nergo- i resursoberezhenie, Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XIII. Vol. 2, Rostov-na-Donu: Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, p. 256–262.
12. *Sitnik, SV, Sazonov, KB, Shiyarov, SM, Kurancov, VV, Kormilicyn, AI* (2011). Modelirovanie volnovogo napryazhenogo sostoyaniya v ob'ektax slozhnoj formy s pomoshh'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax. Tekhnosfer'naya bezopasnost', nadezhnost', kachestvo, e'nergo- i resursoberezhenie: T38. Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Vypusk XIII, Vol. 2, Rostov-na-Donu: Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet, p. 262–268.
13. *Sitnik, SV, Kurancov, VV, Sitnik, VG, Savichev, VA, Denisyuk, DA* (2012). Chislennoe modelirovanie nestacionarnogo volnovogo napryazhenogo sostoyaniya v deformiruemyx ob'ektax slozhnoj formy s pomoshh'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax. Innovacionnye tekhnologii v razvitii stroitel'stva, mashin i mexanizmov dlya stroitel'stva i kommunal'nogo xozyajstva, tekushhego soderzhaniya i remonta zheleznodorozhnogo puti. Sbornik trudov mezhdunarodnoj nauchno- tekhnicheskoy konferencii, Smolensk: Smolenskij filial MIIT, p. 478–481.
14. *Sushhev, TS, Sitnik, VG, Shepelina, PV, Shiyarov, SM, Kormilicyn, AI* (2012). Sopostavlenie rezul'tatov chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax pri reshenii nestacionarnoj difrakcionnoj zadachi na kruglom svobodnom otverstii. Innovacionnye tekhnologii v razvitii stroitel'stva, mashin i mexanizmov dlya stroitel'stva i kommunal'nogo xozyajstva, tekushhego soderzhaniya i remonta zheleznodorozhnogo puti. Sbornik trudov mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoy konferencii, Smolensk: Smolenskij filial MIIT, p. 489–492.
15. *Sushhev, TS, Akat'ev, SV, Sitnik, SV, Kurancov, VA, Tarasenko, AA*. Chislennoe modelirovanie bezopasnosti sooruzhenij ot volnovyx vzryvnyx vozdeystvij s pomoshh'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. v peremeshheniyax. Informacionno-telekommunikacionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnyx sistem. Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem. M.: RUDN, p. 214–217.
16. *Nemchinov, VV* (2013). Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 9, Iss. 1, p. 85–89.
17. *Nemchinov, VV* (2013). Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 9, Iss. 1, p. 90–97.

## ON THE RELIABILITY OF RESULTS OF MATHEMATICAL MODELING OF NONSTATIONARY WAVES OF STRESSES IN THE COMPLEX-FORM OBJECTS

Musayev V.K.

*Peoples Friendship University of Russia, Moscow*

The article deals with evaluation of reliability and accuracy of results of solution of different tasks under nonstationary dynamic wave impacts made using the finite element method in displacements. Comparison is made with the results of the analytical decision and dynamic photo of elasticity. The investigated problem is represented in the form of buildings with a base at the influence of nonstationary stress wave.

KEY WORDS: dynamic task, partial differential equations, mathematical modeling, finite element method, nonstationary wave of voltages, an explicit two-layer scheme, photoelasticity, photogram, mapping, reliability, free round hole, the subject is complex.