

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ, ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Ф.Ф. ГАСАНОВ, канд. техн. наук, доцент
Азербайджанский технический университет,
AZ1073, Баку, пр. Г. Джавида, 25, e-mail: hff74@mail.ru

Предложена модель зарождения трещин в композитах с периодической структурой, основанная на рассмотрении зоны процесса трещинообразования. Полагается, что зона процесса трещинообразования представляет собой слой конечной длины, содержащей материал с частично нарушенными связями между отдельными структурными элементами. Наличие связей между берегами зоны предразрушения (зоны ослабленных межчастичных связей материала) моделируется приложением к поверхности зоны предразрушения сил сцепления, вызванных присутствием связей. Анализ предельного равновесия зоны предразрушения при продольном сдвиге выполняется на основе критерия предельного сдвига связей материала и включает: 1) установление зависимости сил сцепления от сдвига берегов зоны предразрушения; 2) оценку напряженного состояния вблизи зоны предразрушения с учетом внешних нагрузок и сил сцепления, а также расположения жестких включений; 3) определение зависимости критических внешних нагрузок от геометрических параметров составной среды, при которых появляется трещина.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изотропная среда, периодическая система круговых отверстий, жесткие включения, продольный сдвиг, зоны предразрушения, зарождение трещин.

Постановка задачи. Пусть имеется изотропная среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющими радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Круговые отверстия среды заполнены абсолютно жесткими включениями (волокнами), спаянными вдоль обвода. Рассматриваемая плоскость подвергнута продольному сдвигу усилиями τ_y^∞ . По мере увеличения внешней нагрузки в такой плоскости вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет периодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникать трещины. Задача о зарождении трещины является важной проблемой теории прочности. Следует отметить, что в настоящее время актуальны [1, 2] периодические задачи механики разрушения. Постановка задачи о трещинообразовании существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффитса, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Зарождение трещины под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений. По мере увеличения интенсивности внешней нагрузки возле отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала. Так как указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной частью изотропной среды, ослабленной периодической системой круговых отверстий, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, со-

ответствующему действию удаленного материала [3, 4]. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и подлежит определению.

Для математического описания зарождения трещины в среде, ослабленной периодической системой круговых отверстий, заполненных жесткими включениями в рассматриваемом случае приходим к задаче теории упругости с неизвестной границей для среды, когда в среде имеются зоны предразрушения. Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных касательных напряжений (рис. 1).

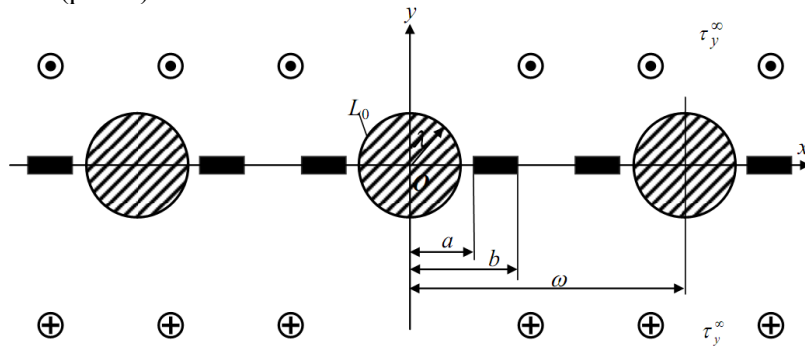


Рис. 1

При действии внешней нагрузки на составное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают касательные усилия $q_y(x)$. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению из решения краевой задачи теории упругости по граничным условиям, выражающие отсутствие упругих смещений вдоль обвода круговых отверстий, и условиями на берегах зон предразрушения:

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{на контурах круговых отверстий,} \\ \tau_y &= q_y(x) && \text{на берегах зон предразрушения.} \end{aligned} \quad (1)$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим продольный сдвиг берегов зон предразрушения и касательного усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x)) q_y(x), \quad (2)$$

где функция $C(x, q_y(x))$ представляет собой эффективную податливость связей; $(w^+ - w^-)$ – продольный сдвиг берегов зон предразрушения.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического сдвига берегов зоны предразрушения [5]

$$w^+ - w^- = \delta_{IIIc}. \quad (3)$$

Выражая напряжения и смещения через аналитическую функцию [6]

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z), \quad z = x + iy,$$

краевые условия рассматриваемой задачи представим в виде:

$$f(\tau) + \overline{f(\tau)} = 0 \quad \text{на контурах круговых отверстий,} \quad (4)$$

$$f'(t) - \overline{f'(t)} = -2iq_y(t), \quad (5)$$

где μ – постоянная материала среды; $i^2 = -1$; $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t – аффикс точек зон предразрушения.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом среды, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω .

Решение задачи. Решение краевой задачи (4) – (5) ищем в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (6)$$

$$f_1'(z) = F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (7)$$

$$f_2'(z) = F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt, \quad (8)$$

где интеграл в формуле (8) берется по линии $L = \{-a, -b\} \cup [a, b\}$; $g(t)$ – искомая функция, характеризующая продольный сдвиг берегов зон предразрушения

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \quad \text{на } L, \quad (9)$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\sin^{-2} \frac{\pi z}{\omega} - \frac{1}{3} \right].$$

Неизвестная функция $g(x)$ и искомые коэффициенты α_{2k} должны быть определены из краевых условий (4) – (5).

К основным представлениям (6) – (9) добавляются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-a}^{-b} g(t) dt = 0; \quad \int_a^b g(t) dt = 0. \quad (10)$$

Для вывода уравнений относительно коэффициентов α_{2k} функции $F_1(z)$ преобразуем краевое условие (4) к виду

$$F_1(\tau) + \overline{F_1(\tau)} = f_0(\tau), \quad (11)$$

где $f_0(\tau) = -F_2(\tau) - \overline{F_2(\tau)}$.

Для решения краевой задачи (11) применим метод степенных рядов. Относительно функции $f_0(\tau)$ будем считать, что она разлагается на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряд Фурье. Подставив в левую часть краевого условия (11) вместо $F_1(\tau)$, $\overline{F_1(\tau)}$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z = 0$, а в правую часть (11) вместо $f_0(\tau)$ ряд Фурье и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$ в обеих частях, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} :

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k} + 2\tau_y^\infty = A_0, \quad (12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{j,k} \lambda^{2j} + \alpha_{2j} = A_{2j}.$$

Здесь $A_{2k+1} = -\frac{1}{i\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt$; $f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t)$;

$$\gamma = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t; \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!}{(2j)!(2k+1)!} \frac{g_{j+k+1}}{2^{2j+2k+2}}; \quad r_{0,0} = 0; \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}.$$

Требую, чтобы функции (6) – (8) удовлетворяли краевому условию на берегах L , для нахождения неизвестной функции $g(x)$, получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-x) dt - \operatorname{Im} F_1(x) = -2iq_y(x) \quad \text{на } L. \quad (13)$$

Система (12) алгебраических уравнений совместно с сингулярными уравнениями (13) позволяет определить искомую функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k} .

Используя в основной полосе периодов разложение функции $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$ и замену переменных после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение (13) приводится к стандартному виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau - \operatorname{Im} F_*(\eta) = f_x(\eta). \quad (14)$$

Здесь
$$B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{b_1}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j,$$

$$A_j = \left[(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots [(2j+1) - (2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \dots (2j+1)} \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{b}, \quad p(\tau) = g(\tau), \quad u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2,$$

$$u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2, \quad f_x(\eta) = 2q_y(\eta).$$

Для решения интегрального уравнения применим метод Мультиппа-Каландия [7]. Решения интегрального уравнения представим в виде

$$p(\eta) = \frac{g_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (15)$$

где функция $g_0(\eta)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем она заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам [7].

Используя квадратурные формулы, после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение с дополнительным условием (10) сводится к следующей конечной алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} g_k^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im} F_*(\eta_m) = q_y(\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^M \frac{g_k^0}{\sqrt{1/2(1 - \lambda_1^2)(\tau_k + 1) + \lambda_1^2}} = 0.$$

Здесь
$$a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\tau_k, \eta_m) \right],$$

$$\eta_m = \cos \theta_m; \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad \tau_m = \eta_m.$$

Так как в составном теле напряжения ограничены, то решение сингулярно-интегрального уравнения (14) следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций. Таким образом, к полученным уравнениям (16) следует добавить дополнительные алгебраические уравнения

$$\sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad (17)$$

обеспечивающие конечность напряжений в точках $x = \pm a$, $x = \pm b$.

В правую часть полученных систем входят неизвестные значения напряжений $q_y(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения. Известные напряжения в связях $q_y(\eta_m)$, возникающие на берегах зоны (a, b) , определяются из дополнительных условий (3). Используя построенное решение, уравнение (2) представим в виде

$$\frac{d}{dx} [C(x, q_y(x)) q_y(x)] = \frac{2}{\mu} g(x) \quad (18)$$

Требую выполнения условий (18) в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения, получим еще систему из M уравнений для определения приближенных значений $q_y(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). При этом используется метод конечных разностей.

Поскольку размеры зон предразрушения неизвестны объединенная алгебраическая система уравнений (12), (16), (17) и конечно-разностной аналог дифференциального уравнения (18) оказалась нелинейной даже при линейно-упругих связях. Для ее решения использовали метод последовательных приближений [8], суть которого состоит в следующем. Решаем объединенную алгебраическую систему (12), (16), (18) при некоторых определенных значениях размеров зон предразрушения a^* и b^* относительно остальных неизвестных. Остальные неизвестные входят в объединенную систему линейным образом.

Принятые значения размеров зон предразрушения и соответствующие значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять условиям ограниченности напряжений (17) у вершин $x = \pm a$ и $x = \pm b$. Поэтому подбирая значения параметров a и b , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока условия ограниченности напряжений (17) не будут удовлетворяться с заданной точностью. Бесконечная система уравнений (12) урезалась до пяти уравнений. В численных расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения касательных усилий в связях используется также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [9]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения линейный при $(w^+ - w^-) \leq w_*$. Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются только в случае,

если на части зоны предразрушения имеет место неравенство $(w^+ - w^-) > w_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов зоны предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливости, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [10]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль концевой зоны, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью, восходящий участок которой соответствовал деформированию связей $(0 < (w^+ - w^-) \leq w_*)$ с их максимальным усилием связей. При $(w^+ - w^-) > w_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (w_*, τ_*) и (δ_{IIIc}, τ_c) , причем при $\tau_c \geq \tau_*$ имело место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельно-равновесного состояния составного тела, при котором происходит появление трещин, используется условие (3). Используя полученное решение, условием, определяющим предельную внешнюю нагрузку, найдено в виде:

$$C(d, q_y(d))q_y(d) = \delta_{IIIc}, \quad (19)$$

где значение d располагается в средней части зоны предразрушения (a, b) .

Численными расчетами найдены усилия в связях, размеры зон предразрушения и продольный сдвиг противоположных берегов зоны предразрушения от параметра нагружения τ_y^∞ .

Совместное решение объединенной алгебраической системы и условий (19) дает возможность (при заданных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней нагрузки, размеры зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при которых происходит появление трещины.

Заключение. Анализ предельно-равновесного состояния составного тела с периодической системой жестких включений и прямолинейных трещин со связями между берегами в концевых зонах при продольном сдвиге сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы (12), (16), (17), (18) и деформационного критерия разрушения (19) при различных законах деформирования межчастичных связей материала, упругих постоянных и геометрических характеристиках составного тела. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и сдвиг берегов с концевыми зонами.

Модель когезионной трещины позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия составного тела с учетом деформационного условия разрушения, оценивать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость материала.

Л и т е р а т у р а

1. Искендеров Р.А. Однородный изгиб пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий и прямолинейными сквозными трещинами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 2. – С. 36 – 40.

2. Искендеров Р.А. Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. – № 3. – С. 18 – 28.

3. Mirsalimov V.M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // J. of Applied Mathematics and Mechanics, v. 71, 2007, pp. 120 – 136.

4. Zolgharnein E., Mirsalimov V.M. Nucleation of a crack under inner compression of cylindrical bodies // Acta Polytechnica Hungarica, 2012. v. 9. No 2. – P. 169 – 183.

5. Панасюк В.В. Деформационные критерии в механике разрушения // ФХММ, 1986. – Т. 22, №1. – С. 7 – 17.

6. Мирсалимов В.М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.

7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

8. Мирсалимов В.М. Неодномерные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

9. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.

10. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. – 1965. – Механика, №2. – С. 113 – 119.

References

1. Isgandarov, RA. (2013) Pure bending of the plate weakened by the periodic system of circular holes and rectilinearly through cracks. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*, No2, pp. 36 – 41.

2. Iskenderov, RA. (2013) The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*, No3, pp. 18 – 28.

3. Mirsalimov, VM. (2007). The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 71, p. 120 – 136.

4. Zolgharnein E, Mirsalimov VM. (2012). Nucleation of a crack under inner compression of cylindrical bodies. *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 9, No 2, p. 169 – 183.

5. Panasyuk, VV. (1986). Deformation criteria in fracture mechanics. *Materials Science*. vol. 22, No 1, pp. 7 – 17.

6. Mirsalimov, VM. (1984). *Fracture of Elasto and Elastoplastic Bodies with Cracks*. Baku: Science, 124 p.

7. Kalandiya, AI. (1973). *Mathematical Methods of the Two-Dimensional Elasticities*. 304 p.

8. Mirsalimov, VM. (1987). *Non-One-Dimensional Elastoplastic Problems*, M.: Nauka, 256 p.

9. Il'yushin, AA. (1948). *Plasticity*. Moscow and Leningrad, Gostekhizd, 376 p.

10. Birger, IA. (1965). The design of structures allowances for plasticity and creep. *Izv. Akad. Nauk SSSR Mekhanika* v. 2. pp. 113 – 119.

NUCLEATION OF CRACKS IN ISOTROPIC MEDIUM WITH PERIODIC SYSTEM OF THE CIRCULAR HOLES FILLED WITH RIGID INCLUSIONS, AT LONGITUDINAL SHEAR

F.F. Hasanov

The model of nucleation of cracks in composites with the periodic structure, based on consideration of a zone of process fracturing is offered. It is necessary, that the zone of process fracturing represents a layer of the finite length containing a material with in part broken bonds between separate structural elements. Presence of bonds between faces of prefracture zones (a zone of the weakened interparticle bonds of a material) is modelled by applying to a surface of prefracture zones of caused by of bonds cohesive forces. The analysis of limiting balance of a prefracture zones at longitudinal shear is carried out on the basis of criterion of limiting shear of bonds of a material and includes: 1) an establishment of dependence of cohesive forces from shear of faces of a prefracture zones; 2) an estimation of an intense condition near to a prefracture zones in view of external loadings and cohesive forces and also an arrangement of rigid inclusions; 3) definition of the dependence of critical external loadings from geometrical parameters of the compound environment at which there is a crack.

KEYWORDS: isotropic medium, periodic system of circular holes, rigid inclusions, longitudinal shear, prefracture zones, crack nucleation.