Теория упругости

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В.А. АСКАРОВ, *аспирант*
Институт математики и механики НАН Азербайджана
Азербайджан, AZ1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9
e-mail:irakon63@hotmail.com

Дан критерий и метод решения задачи теории изгиба тонких пластин по снижению концентрации напряжений в составной пластине путем оптимизации формы границы соединения различных упругих материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: составная пластина, включения, изгиб, минимизация напряжений, оптимальная форма соединений материалов.

Постановка задачи. Опыт показывает большую надежность и долговечность многокомпонентных сред перед однородными [1, 2]. Кроме того, известно, что прочность зависит от формы тела. Уместно привести мнение [3] известного испанского архитектора Эдуардо Торроха: «Лучшим сооружением является то, надежность которого обеспечивается главным образом за счет его формы, а не за счет прочности материала. Последнее достигается просто, тогда как первое, наоборот, с большим трудом».

Рассматривается составное упругое тело, состоящее из сплошной упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого упругого материала. Процесс разрушения таких материалов определяется концентрационным взаимодействием включений (волокон) с матрицей. Включения из другого материала (подкрепляющие элементы), составляя по весу сравнительно небольшую часть, существенно влияют на ее прочность. Поэтому важное значение приобретает оптимальное проектирование составного тела (композита). Задача теории оптимального проектирования заключается в определении характеристик составного тела таким образом, чтобы тело при действии заданных нагрузок в определенном смысле являлось наилучшим из всех составных тел рассматриваемого тела. Ресурс работы составного тела (композита) зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов. Работоспособность составного тела (композита) можно повысить с помощью изменения геометрии (формы) соединения ее элементов.

Анализ взаимодействия связующего с включениями (волокнами) проводится на основе модели с одним включением криволинейной формы. Остальные включения «размазываются», а пластина вне выделенного включения представляется однородным и изотропным с соответствующими эффективными упругими постоянными (по правилу «смесей»). При таком подходе взаимодействие других «размазанных» включений осуществляется через соответствующие упругие постоянные.

Пусть неограниченная составная пластина подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности) $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$. Обозначим границу раздела различных упругих сред через L'. Полагаем, что неизвестную границу L' соединения включения с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \tag{1}$$

где ε – малый параметр, равный $R_{\max}/\lambda$; $R_{\max}$ – наибольшая высота неровности профиля контура L' от окружности радиуса λ.

Считается, что всюду на границе соединения L' имеет место жесткое сцепление различных сред.

Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга L_0 ($r = \lambda$) в срединной плоскости составной пластины. Для оптимизации несущей способности составного тела предлагается метод, заключающейся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения включения, обеспечивающие повышение несущей способности составной пластины. Таким образом, требуется построить такую геометрию поверхности соединения включения и связующего, чтобы созданное ею упругое поле снижало бы концентрацию напряжений в составной пластины. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составной пластине, тем выше ресурс ее работы. Решению подобных обратных задач механики посвящены статьи [4 – 8].

Представим границу неизвестного контура L' в виде (1), где функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье

$$H(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\theta+\beta_k \sin k\theta\right) \tag{2}$$

Для определения геометрии соединения введем в задачу в качестве условия нахождения геометрии соединения (функции $H(\theta)$) условие равнопрочности на контуре соединения связующего и включения. Требуется определить функцию $H(\theta)$, так чтобы созданное в процессе нагружения составной пластине напряженно-деформированное поле обеспечивало бы выполнение условия равнопрочности на контуре раздела сред. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $H(\theta)$ геометрии соединения материалов.

Следовательно, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов α_k, β_k (параметров управления) этого ряда Фурье.

Метод решения. Искомые функции (напряжения, моменты и прогиб) в составной пластине будем искать в виде разложений по малому параметру ε :

$$\begin{gathered} w=w^{(0)}+\varepsilon w^{(1)}+\ldots, \quad w_0=w_0^{(0)}+\varepsilon w_0^{(1)}+\ldots, \\ M_x=M_x^{(0)}+\varepsilon M_x^{(1)}+\ldots, \quad M_y=M_y^{(0)}+\varepsilon M_y^{(1)}+\ldots, \\ H_{xy}=H_{xy}^{(0)}+\varepsilon H_{xy}^{(1)}+\ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

где w – прогиб точек связующего; w_0 – прогиб точек включения в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε в степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений технической теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений и вектора перемещений при $r=\rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений и перемещений в окрестности $r = \lambda$.

Отделим мысленно включение от пластины. При деформации пластины (связующего) смежные точки контуров включения и связующего будут иметь одинаковые перемещения, а усилия, действующие со стороны связующего на включение, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на связующее со стороны включения.

Используя метод возмущений, формулы Колосова-Мусхелишвили [9] на основании граничных условий рассматриваемой задачи, получим краевые условия задачи на контуре L $\left(\tau=\lambda e^{i\theta}\right)$ для комплексных потенциалов:

для нулевого приближения

$$\Phi^{(0)}(\tau)+\overline{\Phi^{(0)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi^{(0)'}(\tau)+\Psi^{(0)}(\tau)\right]e^{2i\theta}=$$
$$=\Phi_0^{(0)}(\tau)+\overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau)+\Psi_0^{(0)}(\tau)\right]e^{2i\theta}\ , \tag{4}$$
$$n\overline{\Phi^{(0)}(\tau)}+\Phi^{(0)}(\tau)-\left[\bar{\tau}\Phi^{(0)'}(\tau)+\Psi^{(0)}(\tau)\right]e^{2i\theta}=$$
$$=\frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\left\{n_0\overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)}+\Phi_0^{(0)}(\tau)-\left[\bar{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau)+\Psi_0^{(0)}(\tau)\right]e^{2i\theta}\right\};$$

для первого приближения

$$\Phi^{(1)}(\tau)+\overline{\Phi^{(1)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi^{(1)'}(\tau)+\Psi^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}=$$
$$=\Phi_0^{(1)}(\tau)+\overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi_0^{(1)'}(\tau)+\Psi_0^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}+\varphi_1+i\varphi_2\,, \tag{5}$$
$$n\overline{\Phi^{(1)}(\tau)}+\Phi^{(1)}(\tau)-\left[\bar{\tau}\Phi^{(1)'}(\tau)+\Psi^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}=$$
$$=\frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\left\{n_0\overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)}+\Phi_0^{(1)}(\tau)-\left[\bar{\tau}\Phi_0^{(1)'}(\tau)+\Psi_0^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}\right\}+g_1+ig_2\,.$$

Здесь $\varphi_1+i\varphi_2$ выражается через искомую функцию $H(\theta)$ и компоненты перемещений при $\tau=\lambda e^{i\theta}$ нулевого приближения, аналогично функция g_1+ig_2 зависит от функции $H(\theta)$ и компонентов напряжений на контуре L нулевого приближения; ν и ν_0 – коэффициенты Пуассона материала связующего и включения; D и D_0 – цилиндрическая жесткость связующего и включения;

$$n=-(3+\nu)/(1-\nu)\,;\ n_0=-(3+\nu_0)/(1-\nu_0)\,.$$

В принятых предположениях теории Кирхгофа рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния композита сводится в каждом приближении к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5) соответственно.

Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние включения, ищем в виде

$$\Phi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(0)}z^k\,,\qquad \Psi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^{(0)}z^k\,. \tag{6}$$

Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\Phi^{(0)}(z)=\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(0)}z^{-k}\,,\qquad \Psi^{(0)}(z)=\sum_{k=2}^{\infty}d_k^{(0)}z^{-k}\,. \tag{7}$$

Используя метод степенных рядов к граничным условиям (4), (5), после некоторых преобразований в каждом приближении находим соотношения для коэффициентов $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$ комплексных представлений (j – номер приближения). При заданной функции $H(\theta)$, полученные алгебраические системы относительно $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$ являются замкнутыми и дают возможность найти напряженно-деформированное состояние составной пластины для каждого профиля поперечного сечения включения.

Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить искомые коэффициенты α_k и β_k, требуем чтобы обеспечивалась минимизация моментов на границе L' соединения материалов, т.е. выполнения условия

$$M_t=M_*\,. \tag{8}$$

Здесь M_* – оптимальное значение нормального тангенциального напряжения на контуре соединения включения и связующего, подлежит определению в процессе решения задачи.

Сравнение равнопрочного контура раздела сред, т.е. контура определенного на основании условия (8), в составном теле с другими контурами границы соединения материалов показывает что, изгибающий момент M_t на них минимально по сравнению с максимальной величиной M_t на любых других контурах контакта материалов. Поэтому искомый контур L' соединения материалов обладает свойством наибольшей прочности составного тела по сравнению со всеми другими контурами соединения сред.

Снижение напряжений, т.е. оптимальное проектирование форм соединения связующего и включения осуществляем с использованием условия (8) на поверхности раздела сред и принципа наименьших квадратов. Минимизацию проводим с использованием критерия

$$U = \sum_{i=1}^{M} \left[M_t(\theta_i) - M_* \right]^2 \to \min . \tag{9}$$

Задача, которая здесь ставится, состоит в том, чтобы найти такие значения неизвестных параметров α_k, β_k, которые будут обеспечивать величинам $M_t(\theta_t)$ функции нормального тангенциального напряжения значения согласно дополнительному условию (9) наилучшим образом. Рассматриваем здесь α_k, β_k и M_*, как неизвестные переменные. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную линейную алгебраическую систему уравнений для определения M_*, α_k, β_k:

$$\frac{\partial U}{\partial M_*} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \beta_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) . \tag{10}$$

Так как функция $M_t(\theta_i, \alpha_k, \beta_k)$ (показатель качества уравнения) линейна, относительна неизвестных параметров, то составление и решение системы значительно упрощается. Систему уравнений можно записать в виде нормальной системы. Решая нормальную систему методом Гаусса с выбором главного элемента для различных механических характеристик связующего и включения, найдем искомые параметры геометрии поверхности соединения различных сред составной пластины.

Численные расчеты были проведены для $\nu_s = 0{,}30$; $\mu_s = 2{,}5 \cdot 10^5\, МПа$; $\nu_b = 0{,}32$; $\mu_b = 4{,}5 \cdot 10^5\, МПа$; $\lambda = 0{,}4$ при одностороннем и всестороннем изгибе моментами. Результаты расчетов при всестороннем изгибе для коэффициентов Фурье оптимальной формы поперечного сечения волокна дается в *мм* в таблице.

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
0,1217	0,0795	0,0761	0,0682	0,0643	0,0432	0,0328	0,0209
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
	0,0849	0,0711	0,0642	0,0503	0,0378	0,0219	0,0132

Оптимальное решение, т.е. найденные коэффициенты α_k, β_k функции $H(\theta)$, обеспечивает повышение несущей способности изгибаемой составной пластины.

Выводы. Предложен критерий и метод решения задачи по снижению концентрации напряжений в изгибаемой составной пластине. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования составной пластины (композита) в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и включения. Найденная форма соединения материалов пластины обеспечивает минимизацию напряженного состояния и повышает несущую способность составной пластины. Таким образом, результаты рассмотренной работы открывают новые возможности оптимального проектирования составных пластин (композитов), за счет выбора формы соединения связующего и включения.

Литература

1. *Решетов Д.Н.* Состояние и тенденции развития деталей машин / Д.Н. Решетов // Вестник машиностроения. – 2000. №10. – С. 11 – 15.
2. *Фудзин Т.* Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
3. *Андреев Л.В.* В мире оболочек / Л.В. Андреев. – М.: Знание. 1986. – 176 с.
4. *Mirsalimov V.M.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching/ V.M. Mirsalimov, E.A. Allahyarov// Int. J. Fracture. – 1996. – Vol. 79, No1. – Pp. 17 – 21.
5. *Гаджиев Г.Х.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары / Г.Х.Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Проблема механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. – М.: Физматлит, 2003. – С. 196. – 207.
6. *Mirsalimov V.M.* Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V.M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2007. – Vol. 36, No1 – Pp. 35 – 38.
7. *Мирсалимов В.М.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра/ В.М. Мирсалимов// Изв. РАН. МТТ. – 2009, №1. – С. 165 – 173.
8. *Мирсалимов В.М.* Минимизация напряженного состояния составного цилиндра / В.М. Мирсалимов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006, №26. – С. 97 – 101.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

References

1. *Reshetov, D.N.* (2000). Status and trends of development of machine elements. Vestnik Mashinostr. №10. – pp. 11 - 15.
2. *Fujii, T. and Dzako, M.* (1982). Fracture mechanics Composite Materials. – M.: Mir. - 232 p.
3. *Andreev, L.V.* (1990) In the world of shells. Mir Publishers. Moscow. - 199 p.
4. *Mirsalimov, V.M. and Allahyarov, E.A.* (1996) The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching. Int. J. Fracture. Vol. 79, No1. - Pp. 17 - 21.
5. *Gadzhiev, G.Kh. and Mirsalimov, V.M* (2003) Inverse problem of mechanics of fracture mechanics for a composite cylinder of a contact pair. In: Klimov D.M. (ed), Problem in Mechanics (collected papers devoted to the 90^{th} anniversary of A.Yu. Ishlinskii. Fizmalit, Moscow, pp. 196 – 207.
6. *Mirsalimov, V.M.* (2007) Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft. J. of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 36, No1 - Pp. 35 - 38.
7. *Mirsalimov, V.M.* (2009) Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder. Mechanics of Solid. Vol. 44, №1. pp. 141 - 148.
8. *Mirsalimov, V.M.* (2006) Minimization of stress state of the compound cylinder. J. of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 35, №26. - pp. 97 - 101.
9. *Muskhelishvili, N.I.* (1977) Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Leyden, Noordhoff.

INVERSE PROBLEM OF THE THEORY OF BENDING OF THE PLATE WITH INCLUSIONS

V.A. Askarov

Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan

The criterion and method of the solution of a problem of the theory of a bending of thin plates on decrease in concentration of stresses in a composite plate is given by optimization of the form of border of connection of various elastic materials.

KEY WORDS: composite plate, inclusions, bending, minimization of stresses, the optimum form of connections of materials.