

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ С УТОНЧЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТЬЮ

А.Г. ХАКИМОВ, канд. физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник
Институт механики Уфимского научного центра РАН
450054, Россия, г. Уфа, пр. Октября, 71, hakimov@anrb.ru

По двум собственным частотам изгибных колебаний определяются радиус и толщина утонченной центральной области пластины.

Ключевые слова: пластина, собственные частоты, изгибные колебания, утонченная центральная область, радиус, толщина

Введение. Устройства, содержащие круглые пластины, широко применяются в технике. Диагностика пластины по собственным частотам изгибных колебаний является актуальной задачей. Наиболее распространенным элементом строительных конструкций является плита, защемленная по контуру, поэтому здесь рассматривается задача определения параметров плиты с утонченной центральной областью по собственным частотам свободных изгибных колебаний. Колебания круглых пластин переменной толщины рассматриваются в [1]. Распознавание закрепления кольцевой круговой пластины по собственным частотам ее колебаний рассматривается в [2]. По трем собственным частотам изгибных колебаний балки на шарнирных опорах [3] определяются координата надреза, его глубина и длина.

Постановка задачи. Рассматриваются изгибные колебания круглой плиты с жестким защемлением по контуру. Предполагается, что в плите имеется центральный круговой участок с меньшей толщиной (рис. 1). Этот центральный круговой участок моделирует ее повреждение. Задача состоит в определении радиуса и толщины утонченной центральной области плиты по двум нижшим частотам ее изгибных колебаний.

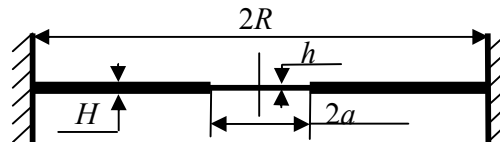


Рис. 1

Обозначим через R , H радиус и толщину плиты, a , h – радиус и толщину центрального кругового участка плиты, D , ρ – цилиндрическая жесткость плиты толщиной H , плотность, через w – прогиб плиты.

Уравнение, определяющее форму осесимметричных изгибных колебаний пластины постоянной толщины, имеет вид [4]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \lambda^{*4} w = 0, \quad \lambda^{*4} = \frac{\rho H \omega^2}{D}, \quad (1)$$

где ω – частота. Отсчитывая координату r от центра пластины, запишем граничные условия для защемленной пластины

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (r = R). \quad (2)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq r \leq a$, $a \leq r \leq R$ индексами «1», «2», соответственно, запишем условия стыкования решений при $r=a$ (условия равенства перемещений, углов поворота, изгибающих моментов M , перерезывающих сил Q)

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, M_1 = M_2, Q_1 = Q_2 \quad (r = a). \quad (3)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \xi_c = \frac{a}{R}, \quad w = \frac{w}{R},$$

представим (2), (3) в виде

$$w_2 = 0, \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 1), \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \quad h^3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = H^3 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2}, \quad (4)$$

$$h^3 \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = H^3 \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} \quad (\xi = \xi_c).$$

Прогиб пластины на двух участках представляется в виде [5]

$$w_1 = C_1 J_0(m\lambda\xi) + C_2 I_0(m\lambda\xi), \quad w_2 = C_3 J_0(\lambda\xi) + C_4 I_0(\lambda\xi) + C_5 Y_0(\lambda\xi) + C_6 K_0(\lambda\xi),$$

$$\lambda = R\lambda^*, \quad \lambda^4 = \frac{\rho R^4 H \omega^2}{D}, \quad m = \sqrt{\frac{H}{h}},$$

где использованы стандартные обозначения цилиндрических функций. Условия (4) в развернутом виде записываются

$$\begin{aligned} & C_3 J_0(\lambda) + C_4 I_0(\lambda) + C_5 Y_0(\lambda) + C_6 K_0(\lambda) = 0, \\ & C_3 J_1(\lambda) - C_4 I_1(\lambda) + C_5 Y_1(\lambda) + C_6 K_1(\lambda) = 0, \\ & C_1 J_0(m\lambda\xi_c) + C_2 I_0(m\lambda\xi_c) = \\ & = C_3 J_0(\lambda\xi_c) + C_4 I_0(\lambda\xi_c) + C_5 Y_0(\lambda\xi_c) + C_6 K_0(\lambda\xi_c), \\ & -C_1 m J_1(m\lambda\xi_c) + C_2 m I_1(m\lambda\xi_c) = \\ & = -C_3 J_1(\lambda\xi_c) + C_4 I_1(\lambda\xi_c) - C_5 Y_1(\lambda\xi_c) - C_6 K_1(\lambda\xi_c), \\ & -C_1 \left[J_0(m\lambda\xi_c) - \frac{J_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c} \right] + C_2 \left[I_0(m\lambda\xi_c) - \frac{I_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c} \right] = \\ & = m^4 \left\{ -C_3 \left[J_0(\lambda\xi_c) - \frac{J_1(\lambda\xi_c)}{\lambda\xi_c} \right] + C_4 \left[I_0(\lambda\xi_c) - \frac{I_1(\lambda\xi_c)}{\lambda\xi_c} \right] \right\} + \\ & + m^4 \left\{ -C_5 \left[Y_0(\lambda\xi_c) - \frac{Y_1(\lambda\xi_c)}{\lambda\xi_c} \right] + C_6 \left[K_0(\lambda\xi_c) + \frac{K_1(\lambda\xi_c)}{\lambda\xi_c} \right] \right\}, \\ & -C_1 \left[-J_1(m\lambda\xi_c) + \frac{J_1(m\lambda\xi_c)}{m^2 \lambda^2 \xi_c^2} - \frac{J_0(m\lambda\xi_c) - \frac{J_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right] + \\ & + C_2 \left[I_1(m\lambda\xi_c) + \frac{I_1(m\lambda\xi_c)}{m^2 \lambda^2 \xi_c^2} - \frac{I_0(m\lambda\xi_c) - \frac{I_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -m^3 C_3 \left[-J_1(m\lambda\xi_c) + \frac{J_1(m\lambda\xi_c)}{m^2\lambda^2\xi_c^2} - \frac{J_0(m\lambda\xi_c) - \frac{J_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right] + \\
&+ m^3 C_4 \left[I_1(m\lambda\xi_c) + \frac{I_1(m\lambda\xi_c)}{m^2\lambda^2\xi_c^2} - \frac{I_0(m\lambda\xi_c) - \frac{I_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right] - \\
&- m^3 C_5 \left[-Y_1(m\lambda\xi_c) + \frac{Y_1(m\lambda\xi_c)}{m^2\lambda^2\xi_c^2} - \frac{Y_0(m\lambda\xi_c) - \frac{Y_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right] + \\
&- m^3 C_6 \left[K_1(m\lambda\xi_c) + \frac{K_1(m\lambda\xi_c)}{m^2\lambda^2\xi_c^2} + \frac{K_0(m\lambda\xi_c) + \frac{K_1(m\lambda\xi_c)}{m\lambda\xi_c}}{m\lambda\xi_c} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели повреждения фигурируют радиус ξ_c и параметр m для утонченной центральной области пластины.

Для того, чтобы $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Из частотного уравнения видно, что по двум собственным частотам можно определить радиус ξ_c и параметр m для утонченной центральной области пластины. Расчеты проведены для следующих параметров плиты: $E=3.0 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho=2500$ кг/м³, $R=3$ м, $H=15$ см, $h=12.4$ см, $a=1.5$ м. При этом вычисленные значения первой и второй собственных частот плиты без утончения $f_1=27.8448$ Гц, $f_2=108.4024$ Гц.

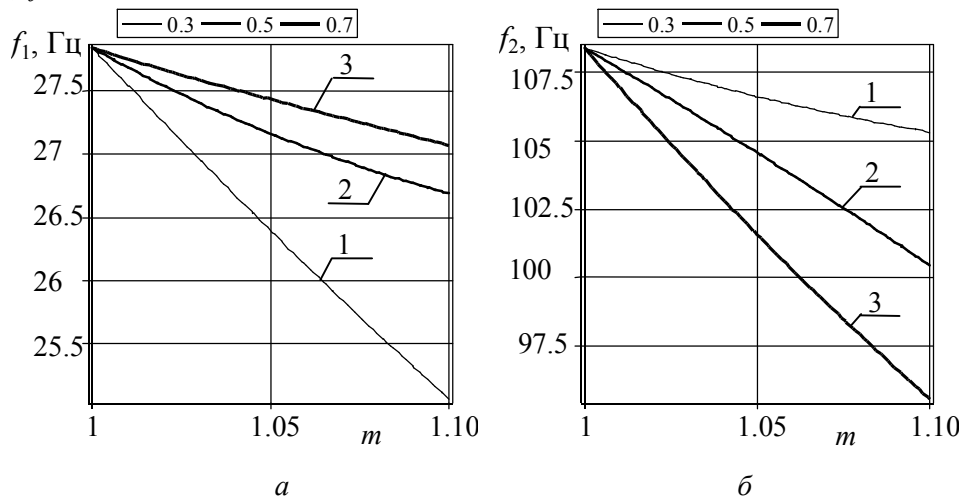


Рис. 2.

Прямая задача. Решение прямой задачи для плиты с вышеприведенными параметрами дает, что $f_1 = 26.6905$ Гц, $f_2 = 100.4403$ Гц. На рис. 2 даются зависимости первой (фрагмент *a*) и второй (фрагмент *б*) собственных частот изгибных колебаний плиты от параметра m и $\xi_c = 0.3, 0.5, 0.7$ (кривые 1-3, соответственно). Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра m происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний плиты.

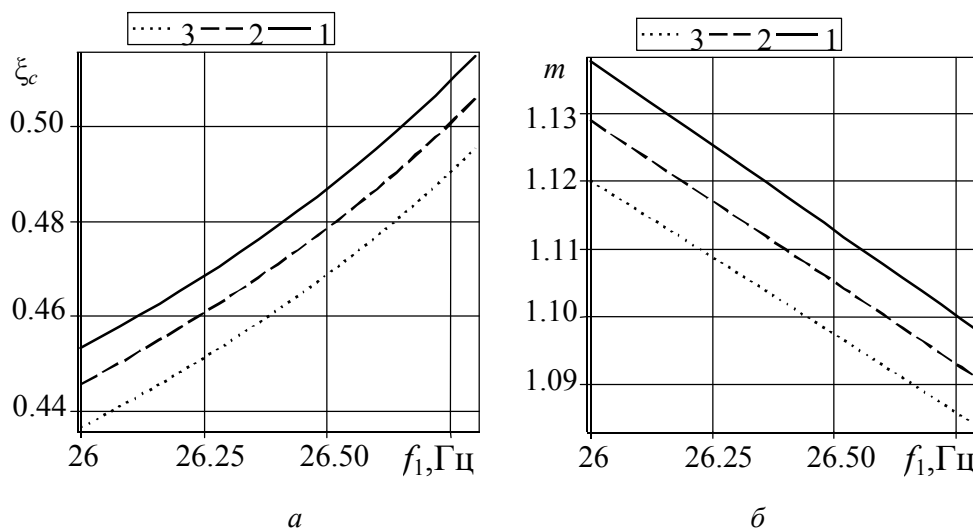


Рис. 3.

Обратная задача. Решение обратной задачи для плиты с вышеприведенными параметрами для $f_1 = 26$ Гц, $f_2 = 100$ Гц дает, что параметр $m = 1.1378$, радиус $\xi_c = 0.4532$. На рис. 3 приводятся зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 радиуса ξ_c (фрагмент *a*) и параметра m (фрагмент *б*) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 100 Гц – кривая 1; 101 Гц – кривая 2; 102 Гц – кривая 3. Проведенные исследования показывают, что по двум нижшим частотам изгибных осесимметричных колебаний плиты можно определить ξ_c и параметр m для утонченной центральной ее области.

Результаты работы могут быть применены для диагностики круглых пластин, в частности, круглых плит.

Л и т е р а т у р а

1. Коренева Е.Б. Колебания круглых пластин переменной толщины // Сб. «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», 2005, №8, М.: МГСУ. – С. 168-171.
2. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
3. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 2. – С. 42-48.
4. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. – М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
5. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1964. – 288 с.

ON THE NATURAL VIBRATIONS OF THE PLATE THINNED CENTRAL PART

Khakimov A.G.

Using two natural lateral axisymmetric flexural vibration frequencies, we can determine both radius and thickness of the plate thinned central part.

Keywords: plate, natural frequencies, flexural vibrations, thinned central part, radius, thickness