ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

КЛЮЕВ А.В., *аспирант*
КЛЮЕВ С.В., *канд. техн. наук, доцент*
ЛЕСОВИК Р.В., *д-р техн. наук, доцент*
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
E-mail: Klyuyev@yandex.ru

Предложена методика оптимального проектирования топологии стержневых систем. В качестве примера рассмотрено проектирование стержневой системы.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, стержневая система

Введение. Проектирование конфигурации конструкции включает определение ее топологии, геометрии и параметров элементов. Под топологией мы понимаем предопределение узлов и способ их соединения между собой для образования геометрически неизменяемой конструкции. Если расположение узлов конструкции на этапе задания топологии может быть выбрано неопределенное, то в дальнейшем они должны занять конкретное положение и обусловить позиции элементов, т.е. составить геометрию конструкции. Определение параметров элементов включает установление размеров сечений стержней, толщин пластинок и оболочек и т.д. На практике иногда топологию и геометрию принимают заданными. Это обуславливает уровень постановки проектной задачи. Самым низким уровнем можно считать определение параметров элементов при заданной геометрии конструкции, а самым высоким – проектирование при неизвестной топологии. Следует сказать, что проблема оптимизации топологии остается нерешенной как в отечественной, так и мировой практике. Если физические модели такого рода проектных задач не вызывают затруднений, то их математические аналоги еще не получили достаточного разрешения.

Конечной целью является экономия материала для проектируемой конструкции. При его однородности задача сводится к минимизации объема. Главным условием существования конструкции является обеспечение прочности и жесткости. Обобщенной характеристикой является потенциальная энергия деформации. Исходя из этого, что задачи анализа и синтеза несущих конструкций должны иметь единую методологическую основу, в качестве таковой необходимо принять вариационные принципы механики деформируемого твердого тела.

1. Проектирование конструкций с переменной топологией

В большинстве случаев рассматривается проектирование конструкций, форма которых была установлена до начала оптимизации. Однако на нескольких примерах было показано, что, сделав упрощения в действительной форме конструкции, можно достигнуть экономии.

Расширим задачу проектирования, включив в нее форму конструкции как еще одну переменную. Особое внимание обратим на конструкции с переменной топологией, чтобы объем материала был минимален и при этом были удовлетворены как требования на напряжения, так и требования на перемещения.

В основу возьмем формулировки и доказательства трех теорем о структурных изменениях, а затем рассмотрим применение этих теорем к проектированию формы шарнирных конструкций [2, 4, 5]. Далее проведем подробное исследование топологических изменений в конструкциях, с тем чтобы выяснить факторы, влияющие на их форму.

Существенная проблема, с которой сталкивается проектировщик – это то, как изменяются силы, действующие в элементах, и перемещения узлов во всей конструкции, когда один или большее число ее элементов изменяются или полностью отбрасываются. Неоднократное повторение применения метода матрицы сил или метода матрицы перемещений [2, 4, 5] для выполнения этой задачи – процесс трудоемкий и отнимает много времени. Особые затруднения возникают в случае, когда в конструкции необходимо провести несколько изменений и при этом необходимо составлять и решать системы с большим количеством уравнений. Поэтому необходимо вывести точные соотношения, которые можно было бы использовать для достижения указанных выше целей и, таким образом, избежать повторного анализа конструкции, топология которой постоянно меняется.

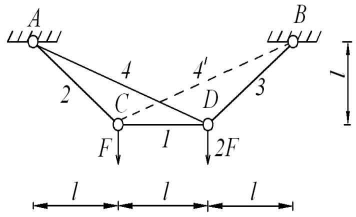

Рис. 1. Трехстержневая система

2. Пример

В качестве примера рассмотрим оптимизацию топологии стержневой системы, показанной на рис. 1. Трехстержневая система ACDB становится геометрически неизменяемой при наличии дополнительной связи, в качестве которой можно принять стержень 4 или 4′. Критериями оптимальности служат потенциальная энергия деформации и объем материала конструкции [1, 3].

Приняты следующие исходные данные: $l = 2\,м$; $F = 700\,кН$; материал сталь с расчетным сопротивлением $R_y = 24\,кН/см^2$ и модулем продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^4\,кН/см^2$. Рассмотрим сначала первый вариант топологии (при наличии стержня 4). Из условий равновесия узла C (рис. 2, *а*) находим внутренние силы в стержнях 1 и 2:

$$N_1 = F; \;\; N_2 = 1{,}414F.$$

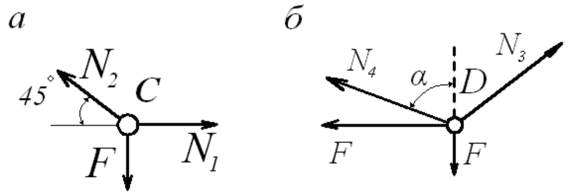

Рис. 2. Внешние и внутренние силы: *а* – узел C, *б* – узел D

Из условий равновесия узла D при учете, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447\,4$; $\sin\alpha = 0{,}8945$, составляем уравнения равновесия для внутренних сил в стержнях 3 и 4:

$$\begin{cases} -F + N_3\dfrac{\sqrt{2}}{2} - N_4 \cdot 0{,}8945 = 0; \\ -2F + N_3\dfrac{\sqrt{2}}{2} + N_4 \cdot 0{,}447 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $N_3 = 2{,}357F$; $N_4 = 0{,}745F$.

При заданной величине $F = 700\,кН$ вычисляем площади поперечных сечений стержней (в скобках указаны принятые профили):

$$A_1 = \frac{700 \cdot 10^2}{2400} = 29{,}167\,см^2 \,(\text{двутавр №22}, A = 30{,}6\,см^2);$$

$$A_2 = \frac{1,414 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 41,24 см^2 \text{ (двутавр №27, } A = 40,2 см^2 \text{ перегрузка 2,6%);}$$

$$A_3 = \frac{2,357 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 68,75 см^2 \text{ (двутавр №40, } A = 72,6 см^2\text{);}$$

$$A_4 = \frac{0,745 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 21,73 см^2 \text{ (двутавр №27, } A = 23,4 см^2\text{).}$$

С учетом длин $l_1 = 2м;\ l_2 = l_3 = 2,828м;\ l_4 = 4,472м$, вычисляем потенциальную энергию деформации:

$$U = \frac{R_y^i}{2E}\Sigma A_i l_i = \frac{2400^2}{2 \cdot 2,06 \cdot 10^6}\left[30,6 \cdot 2 + \left(40,2 + 72,6\right) \cdot 2,828 + 23,4 \cdot 4,472\right] =$$

$$= 677,83 кг \cdot м = 6649,55 Дж.$$

$$V = 48484 см^3 = 0,048 м^3.$$

Рассмотрим теперь второй вариант топологии (при наличии стержня $4'$). Из условий равновесия узла D (рис. 3, *а*) находим внутренние силы в стержнях 1 и 3: $N_1 = 2F;\ N_3 = 1,828F$.

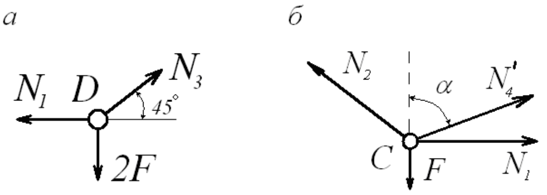

Рис. 3. Внешние и внутренние силы: *а* – узел D, *б* – узел C

Из условий равновесия узла C составляем уравнения равновесия для внутренних сил в стержнях 2 и $4'$:

$$\begin{cases} 2F - N_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} + N_4' \cdot 0,8945 = 0, \\ -F + N_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} + N_4' \cdot 0,447 = 0. \end{cases}$$

откуда находим $N_2 = 1,887F;\ N_4' = -0,745F.$

При $F = 700 кН$;

$$A_1 = \frac{2 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 58,3 см^2 \text{ (двутавр №36, } A = 61,9 см^2\text{);}$$

$$A_2 = \frac{1,887 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 55 см^2 \text{ (двутавр №36, } A = 61,9 см^2\text{);}$$

$$A_3 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 82,48 см^2 \text{ (двутавр №45, } A = 84,7 см^2\text{);}$$

$$A_{4'} = \frac{0,745 \cdot 700 \cdot 10^2}{2400} = 21,73 см^2 \text{ (два швеллера №10 } A = 10,90 см^2; i_x = 3,99 см\text{).}$$

Для сжатого стержня $4'$ вычисляем гибкость:

$$\lambda = 447,2 / 3,99 = 112,08;$$

чему соответствует $\varphi = 0,466$.

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1+0,466) = 0,733.$$

Получаем

$$A_4' = 29,64 см^2 \text{(два швеллера №14, } A = 16,6 см^2; i_x = 5,6 см);$$

при этом

$$\lambda = 447,2/5,6 = 79,85;\ \ \varphi = 0,686;$$

Приведем дальнейшие итерации:

$$\varphi_2 = 0,7045;\ A_4' = 30,63 см^2 \text{(два швеллера №14, } A = 16,6 см^2; i_x = 5,6 см);$$

$$\lambda = 447,2/5,6 = 79,85;\ \varphi = 0,686;$$

$$\varphi_3 = 0,7;\ A_4' = 31,04 см^2 \text{(два швеллера №14, } A = 16,6 см^2; i_x = 5,6 см).$$

Вычисляем потенциальную энергию деформации:

$$\mathrm{U}' = \frac{2400^2}{2\cdot 2,06\cdot 10^6}\left(61,9\cdot 2 + (61,9+84,7)\cdot 2,828 + 0,7^2\cdot 31,04\cdot 4,472\right) =$$

$$= 606,4 кг\cdot м = 5949,1 Дж.$$

$$V' = 67719 см^3 = 0,068 м^3.$$

Таким образом

$$\mathrm{U}'/\mathrm{U} = 0,89;\ \ V'/V = 1,42\,.$$

Первый вариант топологии выгоднее в отношении расхода материала. С позиций статики это объясняется рациональностью подкрепления узла, в котором приложена большая нагрузка.

Уменьшение потенциальной энергии во втором варианте связано с недонапряжением сжатого стержня.

Выводы

1. Проблема оптимизации топологии стержневых систем в общем случае решается с позиции обобщенных вариационных принципов, сформулированных для проектных задач.

2. Приведены зависимости, показывающие как изменяются силы, действующие в элементах, и перемещения узлов конструкции, когда один или больше число ее элементов изменяются или полностью отбрасываются.

Литература

1. *Клюев С.В.* Оптимальное проектирование стержневых систем. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2007. – 130 с.

2. *Мажид К.И.* Оптимальное проектирование конструкций / К.И. Мажид; пер. с англ. – М.: Высш. школа, 1979. – 237 с.

3. *Юрьев А.Г.* Энергетический критерий структурообразования несущих конструкций / А.Г. Юрьев, С.В. Клюев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2006. – №2. – С. 90 – 91.

4. *Horák V.* Inverse variational principle of continuum mechanics. – Praha: Československé akademie VĚD, 1969. – 88 p.

5. *Michell A.G.* M. The limits of economy of material in framestructures / A.G. Michell // Phil. Mag., V. 47. – 1904. – №8. – P. 37 – 46.

THE OPTIMAL DESIGN OF PIVOTAL SYSTEMS TOPOLOGY

Klyuev A.V., Klyuev S.V., Lesovik R.V.

The optimal design methods of pivotal systems topology is suggested here. The pivotal system design is considered here as an example.

KEY WORDS: optimal design, bar system