



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ МАСС ДЛЯ ВЫВОДА ФОРМУЛ КРУГОВЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

Е.П. БОРЗЫХ, канд. техн. наук
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Разработан алгоритм и программа, основанные на сочетании известных методов сосредоточенных масс и метода сил, для вывода формул собственных круговых частот колеблющихся стержней с распределенными массами и жесткостями. Алгоритм позволяет варьировать количеством дискретных масс, чтобы обеспечить заданную точность. Большая точность и возможность учитывать любые граничные условия расширяет область возможного применения метода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: колебания, стержень, собственные частоты, распределенные массы.

Имеются публикации [1, 2], где даны решения задач по определению круговых собственных частот в замкнутом аналитическом виде. Эти решения точны в пределах точности теории. Недостаток их тот, что они решены только для некоторых случаев краевых условий.

Формулу для вычисления значений круговых частот поперечных колебаний стержней (балок) обычно представляют в виде произведения двух сомножителей, где один сомножитель отражает влияние краевых условий и его величина однозначно зависит только от них, причем этот сомножитель безразмерен. Второй сомножитель имеет размерность частоты, величина его однозначно определяется длиной стержня, жесткостью его и погонной массой его, причем в данных задачах все они считаются постоянными.

Конкретно: $\omega_{\min} = K_1 K_2$, где K_1 – коэффициент, а $K_2 = (EI/q)^{1/2}/L^2$. Величина K_1 принимает значения, например 22,4, если края заделаны, и 9,87, если края шарнирные и т. п. Отсюда следует, что этот способ может быть использован не только для вычислений собственных колебаний, но и для вывода самих формул по определению круговых частот. Для примера найдем вид, неизвестный нам из известной литературы, а, именно, вид формулы, по которой можно вычислять собственные частоты поперечных колебаний балки с заделкой одного конца и шарнирной опорой другого конца. Как следует из вышесказанного, вывод формулы сведется к нахождению сомножителя K_1 , который отвечает за влияние граничных условий. Точность определения K_1 обеспечим количеством учтенных дискретных масс. Результаты вычисления величины K_1 описаны в табл. 1. Строка 1 дает величину K_1 для первого тона. Строка 2 дает величину K_1 второго тона. Таким путем, по данным табл. 1 получены и представлены формулы, определяющие частоты низшего (основного) тона и первого обертона для балки с одним заделанным, а другим шарнирным краями.

$$\omega_1 = \frac{15.418}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{49.961}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Таблица 1

№	Определяемая величина	взяты 8 точечных масс	отклонение от среднего в %	взяты 10 точечных масс	отклонение от среднего в %	взяты 12 точечных масс	отклонение от среднего в %	условия на концах балки
1	K_1	15,418	0	15,418	0	15,418	0	слева - заделка,
2	K_1	49,948	0	49,958	0	49,961	0	справа – шарнир

Проведем сравнения первых круговых частот поперечных колебаний стержня, полученных способом точечных масс, с данными академика Льва Ландау [1], которые им получены аналитически, через прямое интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений. Сравнение результатов отражены в табл. 2. Из анализа таблицы заключаем: приближенный способ точечных масс по точности решений не уступает точным аналитическим решениям, если брать достаточное количество масс. Это не особенно затруднит процесс расчета, если использовать вычислительную технику. Поэтому способ дискретных (точечных) масс можно применять наряду с аналитическим без потери точности. При отсутствии аналитически выведенных формул предложенный алгоритм и программа даст возможность получить нужный спектр частот с заданной точностью.

Таблица 2

№	точное значение по Ландау	взята одна точечная масса	ошибка в %	взяты 3 точечные массы	ошибка в %	взято 10 точечных масс	ошибка в %	краевые условия
1	22,4	19,596	< 13	22,302	< 0,5	22,373	< 0,2	заделаны оба конца
2	9,87	9,798	< 0,8	9,867	< 0,04	9,87	0	шарнирные оба конца
3	3,52	3,897	< 11	3,583	< 1,8	3,523	< 0,1	консоль

В ы в о д: Разработаны алгоритм и программа получения формул по определению круговых частот колеблющихся стержней с равномерно распределенной жесткостью и массой и с любыми условиями опирания.

Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: «Наука», 1965. – С.148-149.
2. Onundi L.O., Matawal D.S., and Elinwa A.U. The influence of Euler critical load on the method of initial parameters for the dynamic analysis of a multi-story buildings subjected to aerodynamic forces// Continental J. Engineering Sciences. – 2010. – Vol. 5(1-13).– P. 1-13.

R e f e r e n c e s

1. Landau L.F., Lifshitz E.M. Teoriya uprugosti. – М.: Nauka, 1965. – P. 148-149.
2. Onundi L.O., Matawal D.S., and Elinwa A.U. The influence of Euler critical load on the method of initial parameters for the dynamic analysis of a multi-story buildings subjected to aerodynamic forces// Continental J. Engineering Sciences. – 2010. – Vol. 5(1-13).– P. 1-13.

DISCREET METHOD FOR DERIVATION OF FORMULAS FOR FREE CYCLIC FREQUENCIES OF OSCILLATING BARS WITH DISTRIBUTED MASSES

E.P. Borzyg

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

The paper deals with the problem of automated derivation of the formulas for natural frequencies of a bar with arbitrary boundary conditions.

KEY WORDS: vibration, bar, natural frequencies, distributed masses.