

## Динамика конструкций и сооружений

### О СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТУПЕНЧАТОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С ПРИКРЕПЛЕННОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

А.Г. ХАКИМОВ, канд. физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра  
Российской академии наук (Имех УНЦ РАН)  
450054, Россия, г. Уфа, пр. Октября, 71, hakimov@anrb.ru

*Исследуются собственные изгибные колебания ступенчатой консольной балки с прикрепленной распределенной массой. Показано, что увеличение начальной координаты распределенной массы приводит к возрастанию собственных частот колебаний в рассматриваемом диапазоне параметров. Получено, что первая собственная частота колебаний с ростом отношения моментов инерции увеличивается, а вторая и третья собственные частоты уменьшаются. Решение обратной задачи позволяет определить по трем низшим собственным частотам изгибных колебаний начальную координату и величину прикрепленной распределенной массы к ступенчатой консольной балке, а также отношение моментов инерции.*

Ключевые слова: ступенчатая балка, собственные частоты, изгибные колебания, начальная координата, прикрепленная распределенная масса.

Предлагается методика определения начальной координаты, величины прикрепленной распределенной массы и отношения моментов инерции ступенчатой консольной балки по трем низшим собственным частотам изгибных колебаний. Частотное уравнение изгибных колебаний для консольной балки и балки на шарнирных опорах с надрезом приводится в [1, 2].

Решению проблемы идентификации повреждений в стержнях, балках и более сложных, связанных структурах посвящено большое количество работ достаточно подробный анализ, которых изложен в обзорах [3-8].

В [3, 4] и ряде других работ трещина в стержне моделируется пружиной, повреждение балки, совершающей изгибные колебания— вращательной пружиной. Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах рассматривается в [5]. В большинстве из этих работ исследования параметров повреждений и их местоположения в элементах конструкций были проведены с использованием ряда аналитических моделей [6]. В [7] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположение, но и степень поврежденности. В [8] рассматриваются изгибные колебания неоднородной балки, имеющей трещины.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние консольной балки. Предполагается, что балка длиной  $L$  имеет два участка с моментами инерции  $J_1, J_2$  и площадями поперечных сечений  $F_1, F_2$ . Если начало координат расположить в заделке, то координата  $x_c$  граница раздела этих участков (рис. 1). Также на втором участке к балке прикреплен распределенная масса интенсивности  $m_l$ . Задача состоит в определении координаты  $x_c$ , момента инерции и площади поперечного сечения балки на втором участке  $J_2, F_2$  и интенсивность  $m_l$  распределенной массы по трем частотам изгибных колебаний в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости, плотность материала балки,  $\tilde{w}$  – прогиб балки. Уравнения изгибных колебаний балки имеет вид

$$EJ_k \frac{\partial^4 \tilde{w}_k}{\partial x^4} + m_{lk} \frac{\partial^2 \tilde{w}_k}{\partial t^2} = 0, \quad F_k = BH_k, \quad J_k = BH_k^3/12, \quad k=1,2,$$

где  $t$  – время,  $B$ ,  $H$  – ширина и высота поперечного сечения балки, индексы «1» и «2» относятся соответственно к участкам 1 и 2.

Уравнение, определяющее форму изгибных колебаний, записывается как

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}_k}{\partial x^4} = \lambda_k^{*4} \tilde{w}_k, \quad \lambda_k^* = 4 \sqrt{\frac{m_{lk} \omega^2}{EJ_k}}, \quad m_{l1} = \rho BH_1, \quad m_{l2} = \rho BH_2 + m_l, \quad k=1,2, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота. Отсчитывая координату  $x$  от точки крепления, запишем граничные условия

$$\tilde{w}_1 = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x} = 0 \quad (x=0), \quad M_2 = Q_2 = 0 \quad (x=L), \quad (2)$$

где  $M$ ,  $Q$  – изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам

$$M = EJ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}, \quad Q = EJ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3}. \quad (3)$$

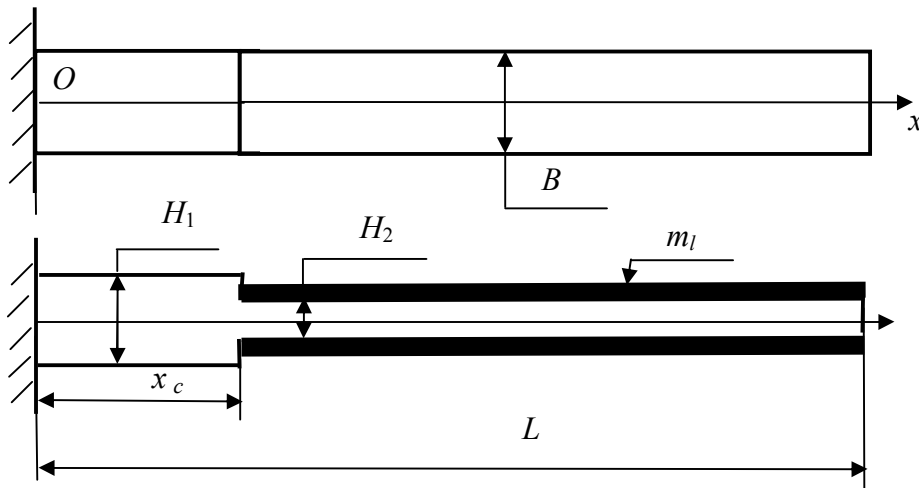


Рис. 1

Условия стыкования решений на границе участков (условия равенства перемещений, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих сил) :

$$\tilde{w}_2 = \tilde{w}_1, \quad \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}, \quad M_2 = M_1, \quad Q_2 = Q_1, \quad x = x_c, \quad (4)$$

Условия (4) с учетом (3) записываются в виде

$$\tilde{w}_2 = \tilde{w}_1, \quad \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}, \quad EJ_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial x^2} = EJ_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x^2}, \quad EJ_2 \frac{\partial^3 \tilde{w}_2}{\partial x^3} = EJ_1 \frac{\partial^3 \tilde{w}_1}{\partial x^3}, \quad x = x_c, \quad (5)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad w_k = \frac{\tilde{w}_k}{L}, \quad n = \frac{j}{J}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L},$$

представим (2), (5) в виде

$$w_1 = 0, \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 1),$$

$$w_2 = w_1, \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, m \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2}, m \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3}, m = \frac{H_2^3}{H_1^3}, \xi = \xi_c, \quad (6)$$

Прогиб балки на двух участках представляется в виде [3]

$$w_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + C_3 y_{31} + C_4 y_{41}, \quad w_2 = C_5 y_{12} + C_6 y_{22} + C_7 y_{32} + C_8 y_{42},$$

где

$$y_{1k} = \frac{\cos \lambda_k \xi + \operatorname{ch} \lambda_k \xi}{2}, y_{2k} = \frac{\sin \lambda_k \xi + \operatorname{sh} \lambda_k \xi}{2},$$

$$y_{3k} = \frac{-\cos \lambda_k \xi + \operatorname{ch} \lambda_k \xi}{2}, y_{4k} = \frac{-\sin \lambda_k \xi + \operatorname{sh} \lambda_k \xi}{2},$$

$$\lambda_k^4 = \lambda_k^{*4} L^4 = \frac{m l_k \omega^2}{E J_k}, \quad k = 1, 2, \quad \eta = \sqrt[4]{(m^{1/3} + q)/m^3},$$

$$\lambda_1^4 = \frac{12 \rho L^4 \omega^2}{E H_1^2}, \quad \lambda_2^4 = \lambda_1^4 \eta^4, \quad q = \frac{m_l}{\rho B H_1},$$

линейно независимые решения уравнения (1) [3], удовлетворяющие условиям

$$y_{11}(0) = 1, y_{11}'(0) = 0, y_{11}''(0) = 0, y_{11}'''(0) = 0,$$

$$y_{21}(0) = 0, y_{21}'(0) = \lambda_1, y_{21}''(0) = 0, y_{21}'''(0) = 0,$$

$$y_{31}(0) = 0, y_{31}'(0) = 0, y_{31}''(0) = \lambda_1^2, y_{31}'''(0) = 0,$$

$$y_{41}(0) = 0, y_{41}'(0) = 0, y_{41}''(0) = 0, y_{41}'''(0) = \lambda_1^3.$$

Функции  $y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k}$  связаны между собой соотношениями

$$y_{1k}' = \lambda_k y_{4k}, y_{2k}' = \lambda_k y_{1k}, y_{3k}' = \lambda_k y_{2k}, y_{4k}' = \lambda_k y_{3k},$$

$$y_{1k}'' = \lambda_k^2 y_{3k}, y_{2k}'' = \lambda_k^2 y_{4k}, y_{3k}'' = \lambda_k^2 y_{1k}, y_{4k}'' = \lambda_k^2 y_{2k},$$

$$y_{1k}''' = \lambda_k^3 y_{2k}, y_{2k}''' = \lambda_k^3 y_{3k}, y_{3k}''' = \lambda_k^3 y_{4k}, y_{4k}''' = \lambda_k^3 y_{1k}.$$

Граничные условия и условия (6) в развернутом виде записываются

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_5 y_{12}''(1) + C_6 y_{22}''(1) + C_7 y_{32}''(1) + C_8 y_{42}''(1) = 0,$$

$$C_5 y_{12}'''(1) + C_6 y_{22}'''(1) + C_7 y_{32}'''(1) + C_8 y_{42}'''(1) = 0,$$

$$C_5 y_{12}(\xi_c) + C_6 y_{22}(\xi_c) + C_7 y_{32}(\xi_c) + C_8 y_{42}(\xi_c) = C_3 y_{31}(\xi_c) + C_4 y_{41}(\xi_c),$$

$$C_5 y_{12}'(\xi_c) + C_6 y_{22}'(\xi_c) + C_7 y_{32}'(\xi_c) + C_8 y_{42}'(\xi_c) = C_3 y_{31}'(\xi_c) + C_4 y_{41}'(\xi_c),$$

$$m(C_5 y_{12}''(\xi_c) + C_6 y_{22}''(\xi_c) + C_7 y_{32}''(\xi_c) + C_8 y_{42}''(\xi_c)) =$$

$$= C_3 y_{31}''(\xi_c) + C_4 y_{41}''(\xi_c),$$

$$m(C_5 y_{12}'''(\xi_c) + C_6 y_{22}'''(\xi_c) + C_7 y_{32}'''(\xi_c) + C_8 y_{42}'''(\xi_c)) =$$

$$= C_3 y_{31}'''(\xi_c) + C_4 y_{41}'''(\xi_c).$$

Эти уравнения с учетом вышеприведенных соотношений принимают вид

$$\begin{aligned}
C_5 y_{32}(1) + C_6 y_{42}(1) + C_7 y_{12}(1) + C_8 y_{22}(1) &= 0, \\
C_5 y_{22}(1) + C_6 y_{32}(1) + C_7 y_{42}(1) + C_8 y_{12}(1) &= 0, \\
C_5 y_{12}(\xi_c) + C_6 y_{22}(\xi_c) + C_7 y_{32}(\xi_c) + C_8 y_{42}(\xi_c) &= C_3 y_{31}(\xi_c) + C_4 y_{41}(\xi_c), \\
\eta(C_5 y_{42}(\xi_c) + C_6 y_{12}(\xi_c) + C_7 y_{22}(\xi_c) + C_8 y_{32}(\xi_c)) &= C_3 y_{21}(\xi_c) + C_4 y_{31}(\xi_c), \\
m\eta^2(C_5 y_{32}(\xi_c) + C_6 y_{42}(\xi_c) + C_7 y_{12}(\xi_c) + C_8 y_{22}(\xi_c)) &= C_3 y_{11}(\xi_c) + C_4 y_{21}(\xi_c), \\
m\eta^3(C_5 y_{22}(\xi_c) + C_6 y_{32}(\xi_c) + C_7 y_{42}(\xi_c) + C_8 y_{12}(\xi_c)) &= C_3 y_{41}(\xi_c) + C_4 y_{11}(\xi_c). \quad (7)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы  $C_3 \div C_8$  не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится.

Таким образом, в приведенной простейшей модели фигурируют: отношение моментов инерции ступенчатой балки  $m$ , начальная координата распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивность  $q$ .

Отметим частные случаи.

1. Ступенчатая балка. Интенсивность  $q$  распределенной массы равна нулю.
2. Координата  $\xi_c = 0$ . Равномерно распределенная масса на всей длине балки.
3. Координата  $\xi_c = L$ . Простая балка.
4. Ступенчатая балка, подвергшаяся *равномерной* коррозии на втором участке.

**Прямая задача.** Решение частотных уравнений проведено численно для следующих данных:  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, длина стержня  $L = 2$  м, ширина поперечного сечения стержня  $B = 0,1$  м,  $H_1 = 0,1$  м,  $H_2 = 0,095$  м,  $x_c = 0,2$  м,  $m_l = 1$  кг/м. Собственные частоты изгибных колебаний консольной балки  $f_1 = 19,300$  Гц,  $f_2 = 131,516$  Гц,  $f_3 = 364,899$  Гц. Для балки без ступени ( $m = 1$ ) и нулевой интенсивности распределенной нагрузки ( $m_l = 0$ ) собственные частоты изгибных колебаний равны  $f_1 = 20,449$  Гц,  $f_2 = 128,156$  Гц,  $f_3 = 358,841$  Гц.

На рис. 2 приводятся собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от начальной координаты распределенной нагрузки  $\xi_c$  для параметра  $m = 0,95$  и различных  $q$ . Видно, что с увеличением  $\xi_c$  в рассмотренном диапазоне изменения этого параметра происходит возрастание собственных частот колебаний. На рис. 3 приводятся зависимости собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от параметра  $m$  для начальной координаты распределенной нагрузки  $\xi_c = 0,1$  и различных  $q$ .

Первая собственная частота колебаний с ростом  $m$  также увеличивается, а вторая и третья уменьшаются. На рис. 4 приводятся зависимости собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от интенсивности распределенной нагрузки  $q$  для начальной координаты распределенной нагрузки  $\xi_c = 0,1$  и различных значений параметра  $m$ .

**Обратная задача.** Решение прямой задачи для  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, длина стержня  $L = 2$  м;  $H_1 = 0,1$  м;  $H_2 = 0,095$  м;  $x_c = 0,2$  м;  $m_l = 1$  кг/м ( $m = 0,857375$ ;  $\xi_c = 0,1$ ;  $q = 0,0641025641$ ) дает, что собственные частоты изгибных колебаний консольной балки  $f_1 = 19.11777939$  Гц,  $f_2 = 131.5696126$  Гц,  $f_3 = 364,7524757$  Гц. Если частотное уравнение записать для трех частот свободных изгибных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата  $\xi_c$ , параметры  $m$  и  $q$  в указанных интервалах поиска. Решение обратной

задачи проведено для заданных трех низших частот  $f_1 = 19,117$  Гц;  $f_2 = 131,570$  Гц;  $f_3 = 364,753$  Гц дает, что  $\xi_c = 0,0995$ ;  $m = 0,8569$ ;  $q = 0,0628$ .

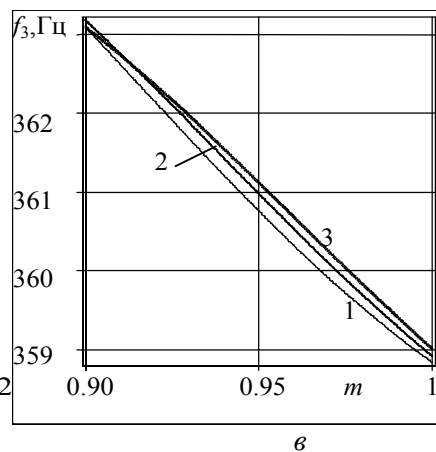
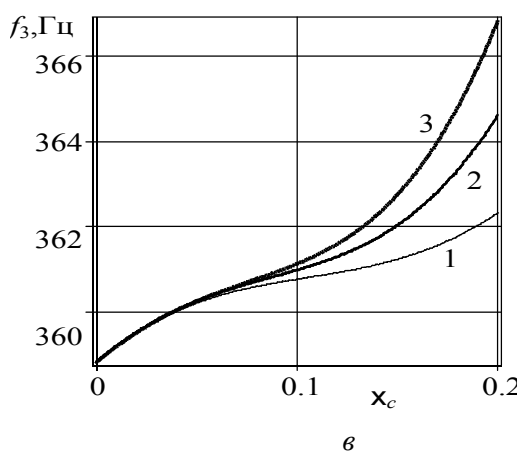
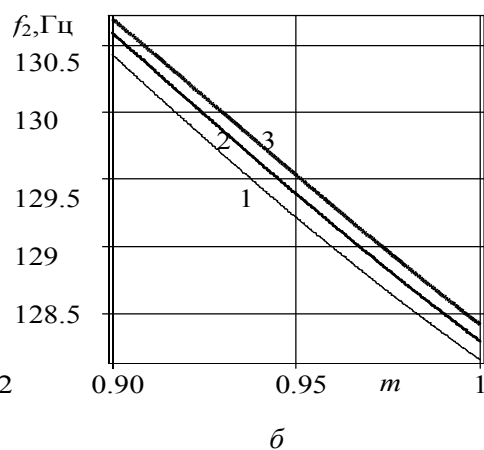
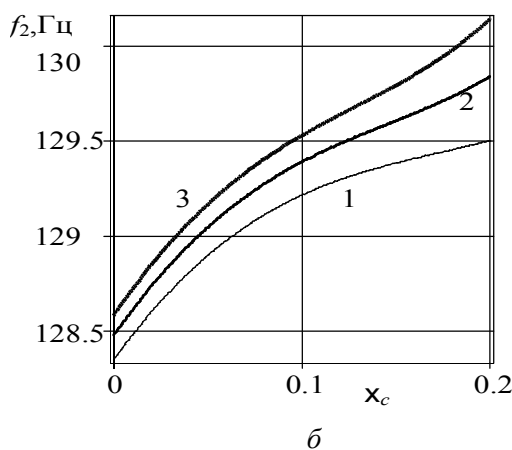
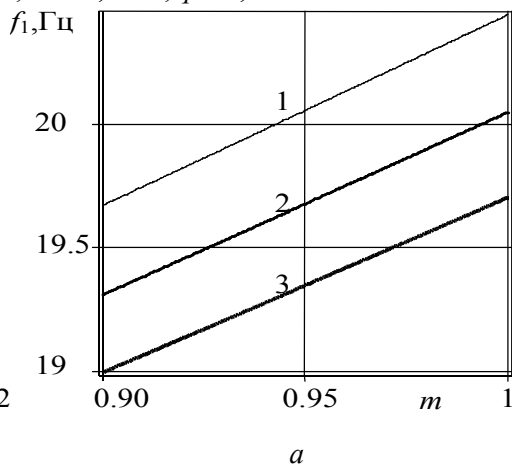
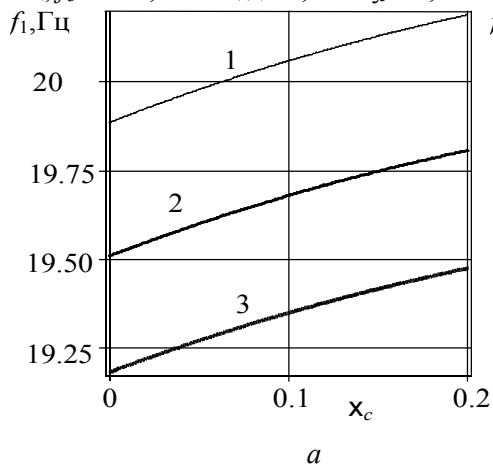


Рис. 2. Зависимости собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от координаты надреза  $\xi_c$  для параметра  $m=0,95$  и различных  $q$  (кривая 1–0; 2–0.1; 3–0.2)

Рис. 3. Зависимости собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от параметра  $m$  для координаты надреза  $\xi_c=0,1$  и различных  $q$  (кривая 1–0; 2–0.1; 3–0.2)

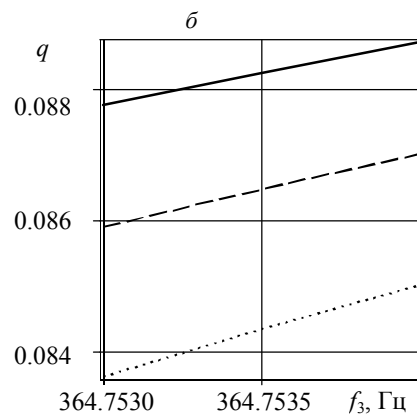
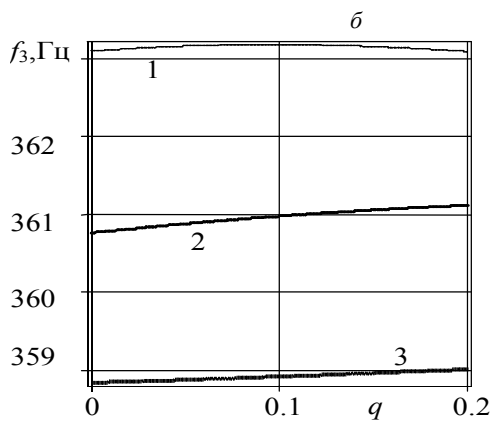
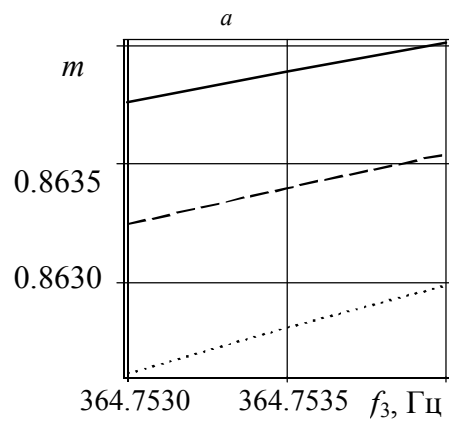
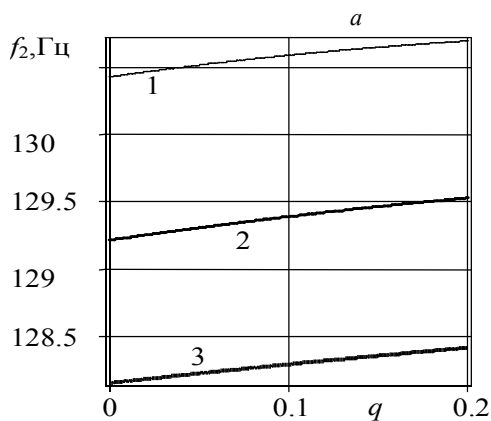
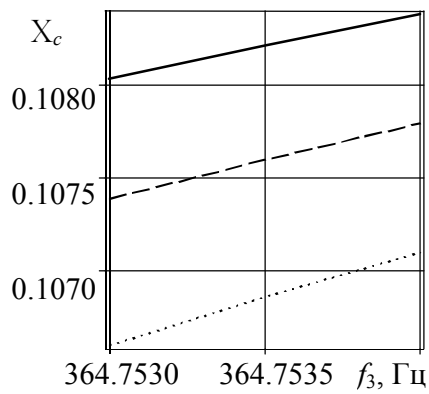
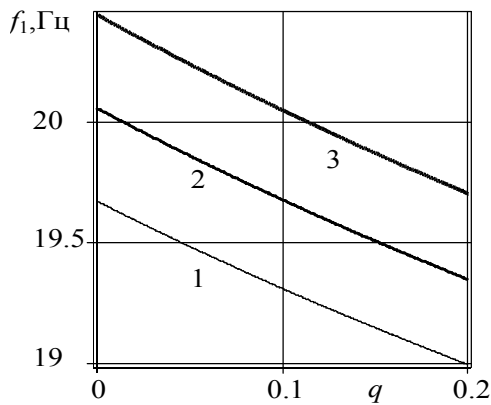


Рис. 4. Зависимости собственных частот изгибных колебаний балки  $f_1, f_2, f_3$  от интенсивности нагрузки  $q$  для начальной координаты нагрузки  $\xi_c=0.1$  и различных  $m$  (кривая 1—0.90; 2—0.95; 3—1.00).

Рис. 5. Зависимости координаты  $\xi_c$ , параметров  $m$  и  $q$  от третьей частоты изгибных колебаний балки  $f_3$  для  $f_2=131.569$  Гц (кривая 1),  $f_2=131.570$  Гц (кривая 2),  $f_2=131.571$  Гц (кривая 3) при  $f_1=19.117$  Гц.

На рис. 5 приводятся зависимости координаты  $\xi_c$  (фрагмент а), параметров  $m$  (фрагмент б) и  $q$  (фрагмент в) от третьей частоты изгибных колебаний балки  $f_3$  для  $f_2=131.569$  Гц (кривая 1),  $f_2=131.570$  Гц (кривая 2),  $f_2=131.571$  Гц (кривая 3) при  $f_1=19.117$  Гц. Таким образом, проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных изгибных колебаний можно определить координату  $\xi_c$ , параметры  $m$  и  $q$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00293\_а, 11-01-97003\_поволжье).

#### Л и т е р а т у р а

1. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом. Дефектоскопия. 2009. Том 45. № 6. – С. 83-89.
2. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. – С. 42-47.
3. Biscontin G., Morassi A., Wendel P. Asymptotic separation of spectrum in notched rods // J. Vibr. and Control. – 1998. – V. 4, N. 3. – P. 237-251.
4. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 608 с.
5. Бовсуновский А.П., Бовсуновский О.А. Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Проблемы прочности. 2010. № 3. С. 125 - 141.
6. Shevtsov S., Akopyan V., Rozskov E. Damage identification in the rod-like structure on the basis of Timoshenko beam model // Proc. of the 5-th Intern. Symp. on Defect and Material Mechanics. Sevilla, 2011. P. 92 - 98.
7. Акопян В.А., Черпаков А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н. Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50-56.
8. Mazanoglu K., Sabuncu M. Flexural vibration of non-uniform beams having double-edge breathing cracks // Journal of Sound and Vibration. 2010. T. 329. № 20. С. 4181-4191.
9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под общей редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968, 568 с.

#### R e f e r e n c e s

1. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Diagnostika povrezhdeniy konsolnoy balki s nadrezom// Defektoskopiya. – 2009. – 45(6). – P. 83-89.
2. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Diagnostika povrezhdeniy balki na sharnirnih oporah// Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2010. - №2. – P. 42-47.
3. Biscontin G., Morassi A., Wendel P. Asymptotic separation of spectrum in notched rods // J. Vibr. and Control. – 1998. – V. 4, N. 3. – P. 237-251.
4. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 608 с.
5. Bovsunovskiy A.P., Bovsunovskiy O.A. Ispolzovanie nelineynih pezonansov dlyz diagnostiki zakrivayuschichsya treschin v stержnevih elementah// Problemi prochnosti. – 2010. - №3. – P. 125-141.
6. Shevtsov S., Akopyan V., Rozskov E. Damage identification in the rod-like structure on the basis of Timoshenko beam model // Proc. of the 5-th Intern. Symp. on Defect and Material Mechanics. Sevilla, 2011. P. 92 - 98.
7. Akopyan V.A., Cherpakov A.V., Rozskov E.V., Soloviyov A.N. Integralniy diagnosticheskiy priznak identifikatsii povrezhdeniy v elementah stержnevif konstruksiy// Kontrol. Diagnostika. – 2012. - № 7. – P. 50-56.
8. Mazanoglu K., Sabuncu M. Flexural vibration of non-uniform beams having double-edge breathing cracks // Journal of Sound and Vibration. 2010. T. 329. № 20. С. 4181-4191.
9. Prochnost, ustoychivost, kolebaniya. Spravochnik v tryoh tomah. Tom 3/ Pod obschey redaktsiyey I.A. Birger, Ya.G. Panovko. – М.: Mashinostroenie, 1968. – 568 p.

### ON NATURAL FLEXURAL VIBRATIONS IN A STEPWISE CANTILEVER BEAM WITH AN ATTACHED DISTRIBUTED MASS

Khakimov A.G.

*Institut Mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo Tzentra RAN*

Consideration is given to natural flexural vibrations in a stepwise cantilever beam with an attached distributed mass. The research shows that an increase in the initial coordinate of the distributed mass results in greater natural vibration frequencies within the parameter range in question. It has been found that as the ratio of the moments of inertia becomes greater, the first natural vibration frequency increases and the second and third ones decrease. The solu-

tion of an inverse problem allows one to determine the initial coordinate, the magnitude of the attached distributed mass and also the ratio of the moments of inertia using three lowermost natural frequencies of flexural vibrations.

KEY WORDS: stepwise beam, natural frequencies, flexural vibrations, initial coordinate, attached distributed mass.

