

Расчет строительных конструкций

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕУПРУГИХ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

А.А.РОЧЕВ, канд. техн. наук, доцент
Петрозаводский государственный университет,
185026, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Комсомольский, дом 15, кв.
120. Электронный адрес: metall@bk.ru.

Рассматривается расчет пространственных неупругих составных стержней переменного сечения по длине с переменной жесткостью связей сдвига. В основу решения положена общая теория упругих пространственно работающих составных стержней А.Р. Ржаницына. Получено выражение для определения податливости составных стержней при кручении, учитывающее неупругую работу ветвей и связей на длине панели стержня.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространственные составные стержни, тонкостенные профили, податливость на кручение, эквивалентные модули деформаций.

Исследуются пространственные составные стержни переменного сечения по длине, включающие в себя ветви тонкостенного открытого профиля, имеющие криволинейное или ломаное очертание контура. Ветви стержня соединены между собой по длине структурными связями, выполненными в виде соединительных решеток с большим числом панелей, образованных из раскосов и распорок. Геометрическая неизменяемость узловых сечений стержня обеспечивается постановкой поперечных диафрагм жесткости, в этих же сечениях прилагаются поперечные нагрузки.

Для материала ветвей и связей составного стержня устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. Используется гипотеза о нелинейно-упругом материале, основанная на теореме, доказанной в [1], согласно которой при активной пластической деформации поведение упруго-пластического тела неотлично от поведения нелинейно-упругого тела.

Пространственный изгиб и осевая деформация неупругого составного стержня исследуются с использованием основных положений общей теории пространственно работающих составных стержней, разработанной А.Р. Ржаницыным [2]. Крутящий же момент считается передающимся по длине панелей стержня за счет собственной крутильной жесткости ветвей и жесткости структурных связей.

Используется система дифференциальных уравнений, описывающая напряженно - деформированное состояние упругого пространственно работающего составного стержня постоянного сечения по длине с упругоподатливыми связями сдвига, имеющими постоянную жесткость по длине стержня, и абсолютно жесткими поперечными связями [2]. Эта система уравнений предназначена для определения усилий в продольных связях сдвига в \bar{n} швах составного стержня. В данной работе осуществлена замена указанной системы дифференциальных уравнений системой уравнений в конечных разностях [3], в которую введены параметры, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность решаемой задачи. Продольная ось составного стержня, включающего в себя n ветвей, делится по длине на m равных частей с образованием участков между смежными сечениями j и $(j + 1)$ длиной s . Контур поперечного j -го сечения d -й ветви длиной s_{dj} делится на p , в общем случае, неравных частей с

расстоянием между смежными узлами разбиения ν и $\nu + 1$ равным $s_{dj\nu}$. Применяется метод шагового нагружения стержней [4].

Во время кручения смежные основания пространственной панели составного стержня повернутся относительно друг друга. При действии единичного крутящего момента $M_{1rj} = 1$, приложенного в j -м узловом поперечном сечении пространственной панели, произойдет поворот этого сечения на угол $\gamma_{1rj}^{(k-1)}$ вокруг центра жесткости $c_j^{(k-1)}$ этого сечения на $(k-1)$ -м шаге нагружения. Под действием силы $F_{rji}^{(k-1)}$, приходящейся на i -ю плоскую грань пространственной панели, произойдет смещение этой грани на величину $\Delta_{ji}^{(k-1)} = \gamma_{1rj}^{(k-1)} \cdot r_{ji}^{(k-1)}$, где $r_{ji}^{(k-1)}$ - длина перпендикуляра, опущенного из точки $c_j^{(k-1)}$ на контур i -ой грани. С учетом сказанного, уравнение равновесия крутящих моментов в j -м сечении будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n (F_{rji}^{(k-1)} r_{ji}^{(k-1)} + M_{1rj}^{(k-1)}) - M_{1rj} = 0, \quad (1)$$

где $F_{rji}^{(k-1)} = \Delta_{ji}^{(k-1)} \cdot k_{sji}^{(k-1)}$, здесь $k_{sji}^{(k-1)} = \sin \alpha_{ji}^2 \cos \alpha_{ji} E_{sji}^{(k-1)} A_{sji} / l_{oji}$; $M_{1rj}^{(k-1)}$ - крутящий момент по торцам i -й ветви пространственной панели составного стержня, определяемый по [5]:

$$M_{rji}^{(k-1)} = \gamma_{1rj}^{(k-1)} C_{oji}^{(k-1)} \lambda_{ji}^{(k-1)} / l_{oji}^3, \quad (2)$$

$$\text{где } \lambda_{ji}^{(k-1)} = \frac{k_{cji}^{3(k-1)} l_{oji}^3 \operatorname{sh}(k_{cji}^{(k-1)} l_{oji})}{k_{cji}^{(k-1)} l_{oji} \operatorname{sh}(k_{cji}^{(k-1)} l_{oji}) - 2 \operatorname{ch}(k_{cji}^{(k-1)} l_{oji}) + 2}; \quad k_{cji}^{(k-1)} = \sqrt{C_{tji}^{(k-1)} / C_{oji}^{(k-1)}}.$$

В (1) и (2) приняты следующие обозначения: α_{ji} - угол наклона оси раскоса к проекции оси стержня на плоскость i -й грани панели; $E_{sji}^{(k-1)}$ и A_{sji} - модуль деформаций осевых волокон и площадь поперечного сечения раскоса i -й грани пространственной панели; l_{oji} - длина пространственной панели; $C_{oji}^{(k-1)}$ и $C_{tji}^{(k-1)}$ - жесткости, соответственно, при стесненном и чистом кручении i -й ветви в j -м поперечном сечении составного стержня при $(k-1)$ -м шаге нагружения, определяемые из выражений

$$C_{oji}^{(k-1)} = \sum_{\nu=1}^p \int_{s_{dj\nu}} \widehat{E}_{cdj\nu}^{(k-1)}(s_{dj}) \bar{J}_{odj}^{(k-1)}(s_{dj}) ds_{dj\nu}, \quad (3)$$

$$C_{tji}^{(k-1)} = \sum_{\nu=1}^p \int_{s_{dj\nu}} \widehat{G}_{dj\nu}^{(k-1)}(s_{dj}) \bar{J}_{tdj}^{(k-1)}(s_{dj}) ds_{dj\nu}, \quad (4)$$

где $\widehat{E}_{cdj}^{(k-1)}(s)$ - линейная функция, аппроксимирующая функцию секущего модуля $E_{cdj\nu}^{(k-1)}$ по его значениям в узловых точках ν и $\nu + 1$ контура s_{dj} j -го поперечного сечения d -й ветви при $(k-1)$ -м шаге нагружения; $\bar{J}_{odj}^{(k-1)}(s_{dj})$ - момент инерции при стесненном кручении единицы длины линии профиля s_{dj} j -го поперечного сечения d -й ветви при $(k-1)$ -м шаге нагружения;

$\widehat{G}_{dju}^{(k-1)}(s_{dj})$ - линейная функция, аппроксимирующая функцию модуля сдвига $G_{dju}^{(k-1)}$ по его значениям в узловых точках u и $u+1$ контура s_{dj} j -го поперечного сечения d -й ветви при $(k-1)$ -м шаге нагружения; $\bar{J}_{idj}^{(k-1)}(s_{dj})$ - момент инерции при чистом кручении единицы длины линии профиля s_{dj} j -го поперечного сечения d -й ветви при $(k-1)$ -м шаге нагружения.

Модули $G_{dju}^{(k-1)}$ и $E_{cdju}^{(k-1)}$ связаны между собой зависимостью

$$G_{dju}^{(k-1)} = \frac{E_{cdju}^{(k-1)}}{2(1 + \mu_{dju}^{(k-1)})}, \quad (5)$$

где $\mu_{dju}^{(k-1)}$ - коэффициент Пуассона, определяемый по формуле:

$$\mu_{dju}^{(k-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{cdju}^{(k-1)}(1 - 2\mu_o)}{E_o}, \quad (6)$$

здесь E_o и μ_o - модуль деформаций Юнга и коэффициент Пуассона в начальной точке диаграммы деформирования материала.

Из (1) получаем выражение для определения $\gamma_{1rj}^{(i-1)}$ в виде

$$\gamma_{1rj}^{(k-1)} = \left[\sum_{i=1}^n (r_{ji}^{2(k-1)} k_{sji}^{(k-1)} + C_{oji}^{(k-1)} \lambda_{ji}^{(k-1)} / l_{oji}^3) \right]^{-1}. \quad (7)$$

Для определения положения центра жесткости $c_j^{(k-1)}$ используется подход, предложенный в [6]. Назначается произвольно расположенная декартова система координат x_j и y_j . Далее определяется направление главных взаимно перпендикулярных осей x_{jo} и y_{jo} . Угол наклона оси x_{jo} к оси x_j определится из выражения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{oj}^{(k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_{ji} \cdot k_{sji}^{(k-1)}}{\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_{ji} \cdot k_{sji}^{(k-1)}}, \quad (8)$$

Координаты положения центра жесткости $c_j^{(k-1)}$ j -го узлового поперечного сечения относительно главных осей определяются по формулам

$$x_{cj}^{(k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^p r_{oji}^{(k-1)} \sin \alpha_{ji} \cdot k_{sji}^{(k-1)}}{\sum_{i=1}^p r_{oji}^{(k-1)} \sin \alpha_{ji}^2 \cdot k_{sji}^{(k-1)}}, \quad (9)$$

$$y_{cj}^{(k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^p r_{oji}^{(k-1)} \cos \alpha_{ji} \cdot k_{sji}^{(k-1)}}{\sum_{i=1}^p r_{oji}^{(k-1)} \cos \alpha_{ji}^2 \cdot k_{sji}^{(k-1)}}, \quad (10)$$

где $r_{oji}^{(k-1)}$ - длина отрезка перпендикулярного к контуру i -й грани, проведенного от произвольно назначенного полюса.

Полная система уравнений, включающая в себя уравнения приращения сдвигов в швах составного стержня, уравнения изгиба в конечно-разностной форме и уравнение кручения составного стержня в целом на k -м шаге нагружения, примет вид

$$\Delta^2 T_{igj}^{(k)} / (c^2 \xi_{igj}^{(k)}) = T_{igj}^{(k)} \delta_{igj,igj}^{(k)} + \sum_{l=1}^{a_{ig}} T_{ilj}^{(k)} \delta_{igj,ilj}^{(k)} + \sum_{r=1}^{b_{ig}} T_{grj}^{(k)} \delta_{igj,grj}^{(k)} + \sum_{l,u=1}^{c_{ig}} T_{luj}^{(k)} \delta_{igj,luj}^{(k)} + \delta_{igj,0}^{(k)},$$

$$\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj} \cdot \Delta^2 \zeta_j^{(k)} / c^2 + \sum_{ig=1}^{\bar{n}} T_{ig}^{(k)} \Delta y_{igj}^{(k)} + \widehat{M}_{xj}^{(k)} = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj} \cdot \Delta^2 \eta_j^{(k)} / c^2 + \sum_{ig=1}^{\bar{n}} T_{ig}^{(k)} \Delta x_{igj}^{(k)} + \widehat{M}_{yj}^{(k)} = 0, \quad \theta_j^{(k)} = \gamma_{1rj}^{(k-1)} M_{rj}^{(k)},$$

где $\theta_j^{(k)}$ - угол поворота j -го поперечного сечения составного стержня на k -м шаге нагружения; $\xi_{igj}^{(k)}$ - коэффициент жесткости связей сдвига ig -го шва, соединяющего между собой i -ю и g -ю ветви составного стержня, на k -м шаге нагружения; $T_{igj}^{(k)}$ - суммарное сдвигающее усилие в ig -м шве, накапливаемое по длине составного стержня от его начала до j -го поперечного сечения;

$$T_{igj}^{(k)} = \int_0^{z_j} \tau_{ig}^{(k)} dz, \quad (12)$$

здесь $\tau_{ig}^{(k)}$ - сдвигающие усилия, действующие в ig -м шве составного стержня на k -м шаге нагружения;

$$\Delta^2 T_{igj}^{(k)} = T_{ig,j+1}^{(k)} - 2T_{igj}^{(k)} + T_{ig,j-1}^{(k)}, \quad (13)$$

a_{ig} - число связей сдвига, соединяющих i -й стержень с другими стержнями (не считая g -го стержня); b_{ig} - число связей сдвига, соединяющих g -й стержень с другими стержнями (не считая i -го стержня); c_{ig} - число связей сдвига, не замыкающих ни к i -му, ни к g -му стержню; $\zeta_j^{(k)}$ и $\eta_j^{(k)}$ - перемещения составного стержня в плоскостях $y0z$ и $x0z$; $\widehat{M}_{xj}^{(k)}$ и $\widehat{M}_{yj}^{(k)}$ - выражения для определения изгибающих моментов в главных плоскостях инерции j -го поперечного сечения стержня, составленные с учетом влияния перемещений $\zeta_j^{(k)}$, $\eta_j^{(k)}$ и $\theta_j^{(k)}$;

$$\Delta^2 \zeta_j^{(k)} = \zeta_{j+1}^{(k)} - 2\zeta_j^{(k)} + \zeta_{j-1}^{(k)}, \quad (14)$$

$$\Delta^2 \eta_j^{(k)} = \eta_{j+1}^{(k)} - 2\eta_j^{(k)} + \eta_{j-1}^{(k)}. \quad (15)$$

Коэффициенты при неизвестных и нагрузочный член в (11) определяются из выражений

$$\delta_{igj,igj}^{(k)} = \frac{(\Delta \omega_{igj}^{(k)})^2}{C_{oji}^{(k)}} + \frac{(\Delta y_{igj}^{(k)})^2}{\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj}} + \frac{(\Delta x_{igj}^{(k)})^2}{\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj}} + \frac{1}{E_{cija}^{(k)} A_{ij}} - \frac{1}{E_{cgja}^{(k)} A_{gj}},$$

$$\delta_{igj,ilj}^{(k)} = \frac{\Delta \omega_{igj}^{(k)} \Delta \omega_{ilj}^{(k)}}{C_{oji}^{(k)}} + \frac{\Delta y_{igj}^{(k)} \Delta y_{ilj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj}} + \frac{\Delta x_{igj}^{(k)} \Delta x_{ilj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj}} + \frac{1}{E_{cija}^{(k)} A_{ij}},$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ij,grj}^{(k)} &= \frac{\Delta\omega_{ij}^{(k)} \Delta\omega_{grj}^{(k)}}{C_{oji}^{(k)}} + \frac{\Delta y_{ij}^{(k)} \Delta y_{grj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj}} + \frac{\Delta x_{ij}^{(k)} \Delta x_{grj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj}} - \frac{1}{E_{cgja}^{(k)} A_{gj}}, \\
\delta_{ij,luj}^{(k)} &= \frac{\Delta\omega_{ij}^{(k)} \Delta\omega_{luj}^{(k)}}{C_{oji}^{(k)}} + \frac{\Delta y_{ij}^{(k)} \Delta y_{luj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj}} + \frac{\Delta x_{ij}^{(k)} \Delta x_{luj}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj}}, \quad (16) \\
\delta_{ij,0}^{(k)} &= \frac{\Delta^2 \theta_j^{(k)}}{c^2} \cdot \Delta\omega_{ij}^{(k)} + \frac{M_{xj}^{(k)} \Delta y_{ij}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj}} + \frac{M_{yj}^{(k)} \Delta x_{ij}^{(k)}}{\sum_{d=1}^n E_{2dj}^{equ(k)} J_{y dj}} + \frac{N_{ij}^{(k)}}{E_{cija}^{(k)} A_{ij}} - \frac{N_{gj}^{(k)}}{E_{cgja}^{(k)} A_{gj}}, \\
\Delta^2 \theta_j^{(k)} &= \theta_{j+1}^{(k)} - 2\theta_j^{(k)} + \theta_{j-1}^{(k)},
\end{aligned}$$

где $\Delta\omega_{ij}^{(k)}$, $\Delta\omega_{il}^{(k)}$, $\Delta\omega_{grj}^{(k)}$ и $\Delta\omega_{luj}^{(k)}$ - разности секториальных координат положения швов в j -м поперечном сечении, отнесенные, соответственно, к стержням i и g , i и l , g и r , l и u при k -м шаге нагружения (ветви l и u не являются ни i -ми и g -ми ветвями); Δx_{ij} и Δy_{ij} , Δx_{il} и Δy_{il} , Δx_{luj} и Δy_{luj} , Δx_{luj} и Δy_{luj} , - разности координат центров тяжести j -х поперечных сечений ветвей i и g , i и l , g и r , l и u , составляющих стержень; $E_{cija}^{(k)}$ и $E_{cgja}^{(k)}$ - секущие модули деформаций для осевых волокон j -х поперечных сечений, соответственно, i -й и g -й ветви стержня при k -м шаге нагружения; A_{ij} и A_{gj} - площади j -го поперечного сечения, соответственно, ветвей i и g ; $M_{xj}^{(k)}$ и $M_{yj}^{(k)}$ - изгибающие моменты в j -м поперечном сечении составного стержня от внешней нагрузки при изгибе, соответственно, в плоскостях yOz и xOz на k -м шаге нагружения; $N_{ij}^{(k)}$ и $N_{gj}^{(k)}$ - продольные силы в j -м поперечном сечении ветвей i и g составного стержня от внешней нагрузки на k -м шаге нагружения; $E_{1dj}^{equ(k)}$ и $E_{2dj}^{equ(k)}$ - эквивалентные модули деформаций для j -го поперечного сечения d -й ветви составного стержня, учитывающие сжимаемость оси ветвей стержня, влияние деформаций сдвига материала ветвей и развитие пластических деформаций при их изгибе, соответственно, в плоскостях yOz и xOz при k -м шаге нагружения; выражения для определения $E_{1dj}^{equ(k)}$ и $E_{2dj}^{equ(k)}$ в (16) были получены и опубликованы автором данной статьи ранее в [7], [8].

За пределом упругости коэффициенты жесткости связей сдвига $\xi_{ij}^{(k)}$ определяются по формулам, приведенным в [2], но с использованием эквивалентного модуля деформаций, если элементы связей работают на изгиб (по аналогии с $E_{1dj}^{equ(k)}$ или $E_{2dj}^{equ(k)}$) и секущим модулем деформаций, если элементы связей работают на осевую силу (по аналогии с $E_{cija}^{(k)}$ или $E_{cgja}^{(k)}$).

Полученные выше выражения позволяют выполнить пространственный деформационный расчет неупругого составного стержня при конкретных граничных условиях. Результаты деформационного расчета могут в дальнейшем быть использованы для проверки устойчивости составного стержня методом, описанным у Р.С. Санжаровского [9].

Параллельно над этой проблемой работают и некоторые иностранные ученые, например [10].

Л и т е р а т у р а

1. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 455 с.
2. *Ржаницын А.Р.* Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 314 с.
3. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. – 472 с.
4. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С.61 – 73.
5. *Бычков А.А.* Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
6. *Уманский А.А., Вольмир А.С., Коданов А.И.* Курс сопротивления материалов. Ч.1. Под ред. Уманского А.А. – М.: изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1954. – 552 с.
7. *Рочев А.А.* Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета: В 3-х частях. Ч. 1. – СПб.: СПбГАСУ, 2001. – С. 93 – 94.
8. *Рочев А.А.* К расчету неупругих составных круговых арок// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – №1. – С. 44 – 49.
9. *Санжаровский Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 280 с.
10. *M. Fong, Y.P. Liu, S.L. Chan.* Second-order analysis and design of imperfect composite beam-columns// *Engineering Structures*, Volume 32, Issue 6, June 2010, P. 1681–1690.

R e f e r e n c e s

1. *Kachanov L.M.* Teoriya polzuchesti. – M.: Fizmatgiz, 1960. – 455 p.
2. *Rzhanitzin A.R.* Sostavnye sterzhni i plastinki. – M.: Stroyizdat, 1986. – 314 p.
3. *Mysovskih I.P.* Lektzii po metodam vychisleniy: Uch. pos. 2-e izd., SPb: Izd-vo SPbGU, 1998. – 472 p.
4. *Birger I.A.* Obschie algoritmi resheniya zadach teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti// Uspеhi mekhaniki deformiruemykh sred. – M.: Nauka, 1975. – P. 61-73.
5. *Bychkov A.A.* Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyyh tonkostennykh konstruksiy. – M.: Gosstroyizdat, 1962. – 475 p.
6. *Umanskiy A.A., Volmir A.S., Kodanov A.I.* Kurs soprotivleniya materialov. Ch. 1/ Pod red. Umanskogo A.A. M.: izd-vo VVIA im. N.E. Zhukovskogo, 1954. – 552 p.
7. *Rochev A.A.* Nelineynaya teoriya rascheta skvoznih uprugoplasticheskikh staticheski neopredelimi-mih ramnih system// Dokladi 58 konf. professorov, prepodavateley, nauchnih rabotnikov, inzhenerov I aspirantov universiteta. V 3-h chastyah, Ch. 1. – SPb.: SPbGASU, 2001. – P. 93-94.
8. *Rochev A.A.* K raschetu neuprugih sostavnykh krugoviyh arok// *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. – 2011. - № 1. – P. 44-49.
9. *Sanzharovskiy R.S.* Ustoychivost elementov stroitelnykh konstruksiy pri polzuchesti. – L.: Izd-vo LGU, 1984. – 280p.
10. *M. Fong, Y.P. Liu, S.L. Chan.* Second-order analysis and design of imperfect composite beam-columns// *Engineering Structures*, Volume 32, Issue 6, June 2010, P. 1681–1690.

CALCULATION OF SPATIAL INELASTIC COMPOSITE RODS

A.A. Rochev

Petrozavodskiy Gosudarstvenniy Universitet, Petrozavodsk

We consider the calculation of the spatial component of inelastic rods of variable cross section along the length of the variable stiffness of the shear ties. The basis of the decision is an overall theory of elastic composite rods of A.R. Rzhnitsyn operating the space. An expression for determining compliance with the shutters-rods under torsion takes into account the inelastic work of branches and structural connections to the length of the rod panel.

KEY WORDS: spatial composite rods, thin-walled structures, the tensional compliance, the equivalent strain modules.