

## Теория упругости

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНЕЧНОГО ТЕЛА С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Д.Н. НИЗОМОВ\*, д-р техн. наук, проф.,

А.А. ХОДЖИБОЕВ\*\*, канд. техн. наук,

О.А. ХОДЖИБОЕВ\*, инженер

\*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Республики Таджикистан;

734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267,

эл.-почта: tiees@mail.ru

\*\*Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими;

734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков

Раджабовых 10, эл.-почта: hojiboev@mail.ru

В статье рассматривается решение задачи взаимодействия сооружения с основанием методом граничных уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод граничных интегральных уравнений, упругая полуплоскость, однородное тело, конечное тело, плоская деформация, решение Мелана, линия контакта, контур сооружения.

Рассматривается задача взаимодействия однородного тела (плотина, отдельно стоящее сооружение, здание и др.) с упругим полупространством в условиях плоской деформации (рис. 1). Однородное тело  $\Omega$  находится под действием объемных сил  $F$  и внешних воздействий  $P^0$  действующих на контуре  $S_1$ .

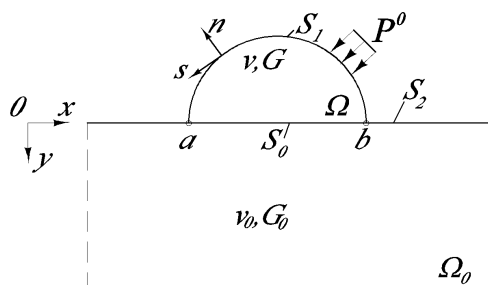


Рис. 1. Схема взаимодействия сооружения с упругой полуплоскостью.

На рис.1 обозначены:  $S_0$  – линия контакта сооружения с упругой полуплоскостью,  $S_1$  – контур сооружения,  $S_2$  – поверхность полуплоскости;  $\nu$ ,  $G$  и  $\nu_0$ ,  $G_0$  – коэффициент Пуассона и модуль сдвига сооружения и полуплоскости,  $P_0$  – внешняя нагрузка действующая на поверхность сооружения;  $n$ ,  $s$  – нормаль и касательная на контур сооружения;  $x$ ,  $y$  – оси координат.

Для решения этой задачи используется метод граничных интегральных уравнений. Граничные интегральные уравнения для внутренней задачи в матричной форме записывается в виде[1]:

$$[C] \cdot \{u\}_p = \int_s [u^*] \cdot \{D\}_k \cdot ds - \int_s [P^*] \cdot \{u\}_k \cdot ds + \int_\Omega [u^*] \cdot \{F\} \cdot d^S \Omega \quad (1)$$

здесь  $\{u\} = \{u \nu\}^T$ ,  $\{P\} = \{P_x P_y\}^T$ ,  $\{F\} = \{F_x F_y\}^T$  – векторы неизвестных перемещений и напряжений подлежащих определению и заданных объемных сил;

матрицы  $[C]$  и элементы этой матрицы  $c_{xx}^*$ ,  $c_{yy}^*$ , и  $c_{xy}$  определяются из следующих выражений:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{xx}^* & -c_{yx}^* \\ -c_{xy} & c_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad c_{xx}^* = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\sin^2 \pi}{8(1-\nu)}, \quad c_{yy}^* = \frac{\omega}{2\pi} - \frac{\sin^2 \pi}{8(1-\nu)}, \quad c_{yx} = c_{xy} = \frac{\sin^2 \omega}{4\pi(1-\nu)};$$

$[u^*]$ ,  $[P^*]$  – матрицы фундаментальных решений для перемещений и напряжений. Граничные условия задачи такие, что на контуре тела  $S_1$  заданы векторы  $\bar{P}_x^0$  и  $\bar{P}_y^0$ , на  $S_2$  –  $P_x^0 = P_y^0 = 0$ , а на линии контакта  $ab$  соблюдаются условия совместности деформаций. Начальное напряжение в полуплоскости отсутствует.

Для внутренней задачи используются фундаментальные решения Кельвина [2]. Для фундаментальных перемещений:

$$u_{kp}^* = u_{kx}^* + u_{ky}^*, \quad v_{kp}^* = v_{kx}^* + v_{ky}^*, \quad u_{kx}^* = -a \left[ (3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_1 \right], \quad (2)$$

$$v_{kx}^* = a \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2, \quad v_{ky}^* = -a \left[ (3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_2 \right] \quad u_{ky}^* = a \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2$$

где  $a = 1/8\pi G(1-\nu)$ ,  $r_{pk} = \left[ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^{1/2}$  – расстояние между точками  $k(x, y)$ ,  $p(\xi, \eta)$ ;  $\beta_1, \beta_2$  – углы наклона радиус-вектора  $r_{pk}$  к осями  $x$  и  $y$  в точке  $p$ . На основе формул (2) и с использованием формул

$$\begin{aligned} P_{xx}^* &= \sigma_{xx}^* n_1 + \tau_{yx,x}^* n_2, & P_{yx}^* &= \sigma_{yx}^* n_2 + \tau_{xy,x}^* n_1, \\ P_{xy}^* &= \sigma_{xy}^* n_1 + \tau_{yx}^* n_2, & P_{yy}^* &= \sigma_{yy}^* n_2 + \tau_{xy,y}^* n_1, \\ P_x^* &= P_{xx}^* + P_{xy}^*, & P_y^* &= P_{yx}^* + P_{yy}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$  – направляющие косинусы углов нормали с осями  $x$ ,  $y$ , можно написать фундаментальные напряжения в виде:

$$\begin{aligned} P_{xx}^* &= -b(c + 2m_1^2) \cos \gamma / r_{kp}, & P_{xy}^* &= -b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) + 2m_1 m_2 \cos \gamma] / r_{kp}, \\ P_{yx}^* &= b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) - 2m_1 m_2 \cdot \cos \gamma] / r_{kp}, & P_{yy}^* &= -b(c + 2m_2^2) \cos \gamma / r_{kp} \end{aligned} \quad (4)$$

где  $b = 1/4\pi(1-\nu)$ ,  $c = 1-2\nu$ ,  $m_1 = \cos \beta_1$ ,  $m_2 = \cos \beta_2$ ,  $\cos \gamma = \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2$ ,  $\gamma$  – угол наклона между радиус – вектором  $r$  и нормалью  $n$  в точке  $k(x, y)$ .

Для получения граничных интегральных уравнений плоской задачи погружая область  $\Omega + S$  в полуплоскость, где часть границы рассматриваемого тела совпадает с поверхностью полубесконечной плоскости (рис. 2), из теоремы взаимности работ с учётом равенство нулю фундаментальных напряжений на поверхности  $P_{xx}^* = P_{yx}^* = P_{xy}^* = P_{yy}^* = 0$  получим:

$$u(p) + \int_{S_1} P^* u ds = \int_S P u^* ds, \quad \text{где } S = S_0 + S_1, \quad P \in \Omega. \quad (5)$$

Если выполняется условие на бесконечность, будем иметь

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} ([u^*]\{P\} - [P^*]\{u\}) d\Gamma_k = 0, \quad (6)$$

Если граница  $S_1$  (рис 2, а) удаляется на бесконечность, то из (5) с учетом (6), получим:

$$u(p) = \int_{S_0} Pu^* ds, \quad P \in S_0 + \Omega \quad (7)$$

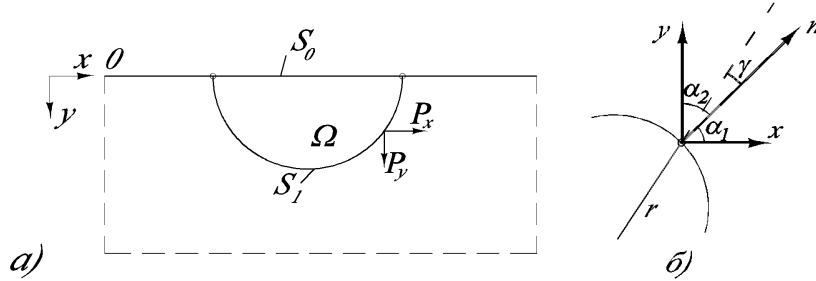


Рис.2. К выводу граничных интегральных уравнений: а) часть границы рассматриваемого тела совпадает с поверхностью полубесконечной плоскости; б) схема определения углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для вычисления направляющих косинусов  $n_1, n_2$  по формуле (3).

Задача взаимодействия сооружения с упругой полуплоскостью (рис.1) сводится к совместному решению систем интегральных уравнений (1) и (7).

Причем в (1) используются фундаментальные решения Кельвина (для внутренней задачи 2,3), а в системе уравнений получаемых на основе (7) используются фундаментальные решения Мелана.

Для численной реализации системы интегральных уравнений (1) разбиваем контур сооружения  $S_1$  на  $n_1$ , а линии контакта  $S_0$  на  $n_0$  граничных элементов и область  $\Omega$  на  $m$  ячеек. Система граничных интегральных уравнений (1) с внутренней областью  $\Omega$  и контуром  $S = S_0 + S_1$  (рис.1) при численной реализации представляется в виде следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n_1+n_0} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{j=n_1+n_0} b_{ij}v_j - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} e_{ij}P_{xj} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} q_{ij}P_{yj} = \\ = \sum_{j=1}^{j=n_1} e_{ij}P_{xj}^0 + \sum_{j=1}^{j=n_1} q_{ij}P_{yj}^0 + \sum_{j=1}^{j=m} e_{ij}F_{xj} + \sum_{j=1}^{j=m} q_{ij}F_{yj}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n_1+n_0} c_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{j=n_1+n_0} d_{ij}v_j - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} f_{ij}P_{xj} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} h_{ij}P_{yj} = \\ = \sum_{j=1}^{j=n_1} f_{ij}P_{xj}^0 + \sum_{j=1}^{j=n_1} h_{ij}P_{yj}^0 + \sum_{j=1}^m f_{ij}F_{xj} + \sum_{j=1}^m h_{ij}F_{yj}, \quad i=1, \dots, n_1+n_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты в уравнениях (8), (9) определяются по следующим формулам, на основе фундаментальных решений Кельвина и представляют коэффициенты системы алгебраических уравнений заменяющих систему интегральных уравнений (1) при численном решении:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= c_{xx} - b \int (c + 2m_1^2) \cdot (\cos \gamma / r_{kp_{ij}}) ds_{ij}, \\ b_{ij} &= -c_{yx} - b \int \left\{ [c(m_1n_2 - m_2n_1) - 2m_1m_2 \cdot \cos \alpha_{ij}] / r_{kp_{ij}} \right\} \cdot ds_j, \\ e_{ij} &= -a \int_{\Delta S_j} [(3-4\nu) \cdot \ln r_{pk_{ij}} - \cos^2 \beta_1] \cdot ds_j, \quad q_{ij} = a \int \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot ds_j = f_{ij}, \end{aligned}$$

$$c_{ij} = -c_{xy} - b \int_{\Delta S_j} \left\{ [c(m_1 n_2 - m_2 n_1) + 2m_1 m_2 \cos \gamma_{ij}] / r_{kp_{ij}} \right\} ds_j, \quad (10)$$

$$d_{ij} = c_{yy}^* b \int_{\Delta S_j} [(c + 2m_2^2) \cos \gamma_{ij} / r_{kp_{ij}}] \cdot ds_j, \quad h_{ij} = a \int_{\Delta S_j} [(3 - 4\nu) \cdot \ln r_{pk_{ij}} - \cos \beta_2^2] \cdot ds_j,$$

где  $\cos \gamma = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2$ ,  $\gamma$  – угол наклона между радиус-вектором  $r$  и нормалью  $n$  в точке  $k(x, y)$ ;  $b = 1/4\pi(1-\nu)$ ,  $c = 1-2\nu$ ,  $m_1 = \cos \beta_1$ ,  $m_2 = \cos \beta_2$ ,  $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$  – направляющие косинусы углов нормали с осями  $x$ ,  $y$ .

Для системы уравнений (8) и (9) куда входят коэффициенты (10) механические характеристики для однородного сооружения определяются с использованием  $\nu$  и  $G$ . Вторую систему уравнений, т.е. систему уравнений для полуплоскости (рис. 1) получаем из уравнения (7):

$$u(p) = \int_{S_0} u_p^* ds, \quad p \in S_0 + \Omega, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} u_p - \int_{s_0} u_{kx}^* P_x ds + \int_{s_0} v_{kx}^* P_y ds &= 0 \\ v_p - \int_{s_0} u_{ky}^* P_x ds - \int_{s_0} v_{ky}^* P_y ds &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11')$$

Решение Мелана для полуплоскости при  $y=0$  и при  $y_j=0$ ,  $\gamma = \pi/2$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_{kx}^* &= \frac{1}{2\pi G_0} \left[ 1 - 2(1-\nu_0) \cdot \ln |x_j - x_i| \right], \quad v_{kx}^* = \frac{1-2\nu_0}{4G_0}, \quad u_{ky}^* = -\frac{1-2\nu_0}{4G_0}, \quad \beta_2 = \pi/2, \\ v_{ky}^* &= -\frac{1-2\nu_0}{4G_0}, \quad u_{ky}^* = \frac{1-2\nu_0}{4G_0}, \quad \beta_2 = -\pi/2, \quad v_{ky}^* = -\frac{1-\nu_0}{\pi G_0} \cdot \ln |x_j - x_i|. \end{aligned} \quad (12)$$

Для случая (рис. 1) при рассмотрении точек линии контакта  $ab$  и когда ось  $y$  находится слева от сооружения система интегральных уравнений (11) принимает следующий вид:

$$u_p - \int_{s_0} \left\{ \frac{1}{2\pi G_0} \left[ 1 - 2(1-\nu_0) \cdot \ln |x_j - x_i| \right] \right\} ds \cdot P_x - \int_{s_0} \left\{ \frac{1-2\nu_0}{4G_0} \right\} \cdot ds \cdot P_y = 0 \quad (13)$$

$$v_p - \int_{s_0} \left[ -\frac{1-2\nu_0}{4G_0} \right] ds \cdot P_x - \int_{s_0} \left[ -\frac{1-\nu_0}{\pi G_0} \cdot \ln |x_j - x_i| \right] \cdot ds \cdot P_y = 0 \quad (14)$$

$$u_p - \frac{1}{2\pi G_0} \left\{ \int_{s_0} ds - 2(1-\nu_0) \cdot \int_{s_0} \ln |x_j - x_i| \cdot ds \right\} \cdot P_x - \frac{1-2\nu_0}{4G_0} \cdot \int_{s_0} ds \cdot P_y = 0 \quad (13')$$

$$v_p - \int_{s_0} \left[ -\frac{1-2\nu_0}{4G_0} \right] \cdot \int_{s_0} ds - \left\{ -\frac{1-\nu_0}{\pi G_0} \int_{s_0} \ln |x_j - x_i| \cdot ds \right\} \cdot P_y = 0 \quad (14')$$

Систему уравнений (13') и (14') можно представить следующим образом:

$$u_i - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} e_{ij} P_{xj} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} q_{ij} P_{yj} = 0, \quad (15)$$

$$v_i - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} f'_{ij} P_{xj} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_0} h'_{ij} \cdot P_{yj} = 0, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_0. \quad (16)$$

$$\text{Здесь } e'_{ij} = \frac{1}{2\pi G_0} \left\{ \int_{\Delta S_j} ds_j \cdot 2(1-\nu_0) \int_{\Delta S_j} \ln|x_j - x_i| \cdot ds_j \right\}, \quad q'_{ij} = \frac{1-2\nu_0}{4G_0} \int_{\Delta S_j} ds_j,$$

$$f'_{ij} = -\frac{1-2\nu_0}{4G_0} \int_{\Delta S_j} ds_j, \quad h'_{ij} = -\frac{1-\nu_0}{\pi G_0} \int_{\Delta S_j} \ln|x_j - x_i| \cdot ds_j. \quad (17)$$

Коэффициенты (17) соответствуют фундаментальным решениям Мелана для полуплоскости.

Системы уравнений (8), (9), (15) и (16) представим в стандартном матричном виде:

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (18)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} A & B & -E & -G \\ C & D & -F & -H \\ E_0 & O & -E & -G \\ O & E_0 & -F & -H \end{bmatrix}.$$

Вектор неизвестных  $\{X\} = \{u, v, P_x, P_y\}^T$  состоит из четырех векторов  $u, v, P_x$  и  $P_y$ , каждый из которых имеют по  $n_1 + n_0$  неизвестных соответственно. Например,  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_1+n_0}\}^T$ , а остальные векторы имеют аналогичную структуру.

Вектор заданных нагрузок имеет следующий вид:  $\{B\} = [B^0] \times \{P^0\}$ , где

$$[B^0] = \begin{bmatrix} E & G & \bar{E} & \bar{G} \\ F & H & \bar{F} & \bar{H} \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}, \quad \{P^0\} = \{P_x^0, P_y^0, F_x^0, F_y^0\}^T$$

В результате решения системы уравнений (8), (9), (15) и (16) получим значения напряжений и перемещения на контактной линии  $ab$  и значения перемещений на контуре сооружения. Таким образом, на основе метода граничных интегральных уравнений, разработан алгоритм расчёта зданий и сооружений с учётом их совместной работы с основанием, что позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние объекта при различных внешних воздействиях, в том числе сейсмических.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Низомов Д.Н.* Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2000. – 282с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

#### R e f e r e n c e s

1. *Nizomov J.N.* Metod granichnih uravneniy v reshenii staticheskikh I dinamicheskikh zadach stroitelnoy mehaniki. – Moscow: Izd-vo ASV, 2000. – 282 p.
2. *Novatskiy V.* Teoriya uprugosti. – Moscow: Mir, 1975. – 872 p.

**RESOLVING EQUATIONS OF THE BOUNDARY INTEGRAL APPROACH FOR  
THE PROBLEM OF INTERACTION OF A FINITE BODY WITH HALF-PLANE**

J.N. Nizomov\*, A.A. Hojiboev\*\*, O.A. Hojiboev\*

*\*Institut geologii, seysmostoykogo stroitelstva i seismologii AN Tadjikistana,*

*\*\*Tadjikskiy tehnikeskij universitet im. akademika M.S. Osimi, Dushanbe, Tadjikistan*

A problem of interactions of structure with ground by boundary integral approach is solved in present article.

KEY WORDS: boundary integral approach, elastic half-plane, homogeneous body, half-infinite plane, finite body, plane deformation, Melan solution, contact line, contour of structure.

