

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С ШАРНИРНО НЕПОДВИЖНЫМ ОПИРАНИЕМ

А.В. СТАРОВ, кандидат технических наук, доцент
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет,
400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; E-mail: starov1954@mail.ru

Рассмотрена задача пластического деформирования круглых пластин с шарнирно неподвижным опиранием под действием ударной нагрузки с учетом физической и геометрической нелинейностей. Получены системы разрешающих уравнений, дан алгоритм и программа численной реализации задачи на основе метода конечных разностей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: круглые пластинки, ударные нагрузки, физическая и геометрическая нелинейность

Исследование динамического поведения круглых пластинок при действии кратковременных нагрузок большой интенсивности, значительно превышающих несущую способность конструкции, является актуальной задачей динамической теории предельного сопротивления [1]. При этом возникает необходимость учета физической и геометрической нелинейностей вследствие появления больших пластических деформаций.

Решение подобных задач в упруго вязко пластической постановке с учетом волновых эффектов, упрочнения, зависимости предела текучести материала от скорости деформирования и других факторов на основе дискретных моделей (МКЭ, МКР и т.д.) связано с достаточно сложным алгоритмом численной реализации и вызывает необходимость оценки сходимости результатов к точному решению [2-3]. Для устойчивости разностной схемы приходится вводить искусственную вязкость, использовать другие приемы, что искажает результаты.

В этом случае целесообразно использование модели жестко пластического тела, пренебрегающей упругими деформациями, при условии, что пластические деформации на порядок превышают упругие [3].

В работе [4] получено решение для круглых пластин и пологих оболочек вращения на основе линеаризации поверхности текучести и применении квазистатического механизма деформирования для решения динамических задач.

Рассмотрим постановку задачи на основе полной системы уравнений динамики пластических оболочек [5]. В момент времени $t = 0$ к пластинке мгновенно прикладывается давление, превышающее предельную статическую нагрузку, и действует в течение времени $t = t_p$. Движение пластинки прекращается в момент времени $t = t_k$. Форма пластинки определяется величиной остаточных пластических деформаций. Целью исследования является оценка напряженно-деформированного состояния пластинки в каждый момент времени.

Уравнения движения для круглых пластинок в рамках теории Кармана в безразмерных координатах и переменных без учета сил инерции в тангенциальном направлении (перемещения в радиальном направлении на порядок меньше) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho n_1), \quad \rho Q = m_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho m_1), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P(\rho) + \left(n_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + n_2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho Q), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $w = 2\bar{w}/h$, $u = 4\bar{u}\rho_0/h^2$ – перемещения срединной поверхности;

$\rho = \bar{\rho}/\rho_0$, ρ_0 – радиусы проекции точки и опорного контура;

$n_i = \bar{N}_i/2\sigma_s h$, $m_i = \bar{M}_i/\sigma_s h^2$ – силовые факторы;

$P = \bar{P}\rho_0^2/\sigma_s h^2$, $Q = \bar{Q}\rho_0^2/\sigma_s h^2$ – давление и поперечная сила;

$t = \bar{t} \cdot \sqrt{2\sigma_s h / \gamma \rho_0^2}$, σ_s – безразмерное время и предел текучести материала, в данной работе принимается не зависящим от скорости пластического деформирования; $2h$, γ – толщина и масса пластинки на единицу площади;

$i = 1, 2$ – индексы радиального и окружного направлений.

Граничные условия для шарнирно-неподвижного опирания:

$$m_1(0, t) = m_2(0, t), \quad Q(0, t) = \frac{\partial w}{\partial \rho}(0, t) = 0, \quad m_1(1, t) = w(1, t) = u(1, t) = 0.$$

Начальные условия: $w(\rho, 0) = \dot{w}(\rho, 0) = 0$, $u(\rho, 0) = \dot{u}(\rho, 0) = 0$.

Учет взаимовлияния продольных усилий и изгибающих моментов выполнен на основе условия пластичности для сплошных однослойных оболочек [1]:

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = 1. \quad (2)$$

Заменим поверхность текучести (2) эквивалентными соотношениями:

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = m^2, \quad n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = n^2, \quad m^2 + n^2 = 1. \quad (3)$$

Полагая $\partial m / \partial \rho = 0$, $\partial n / \partial \rho = 0$, получаем для первого уравнения системы (1) и второго уравнения системы (3) единственное решение $n_1 = n_2 = n$.

Скорости деформаций и скорости изменения кривизны срединной поверхности определяются соответственно следующими выражениями:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{h^2}{4\rho_0^2} \cdot \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{h^2}{4\rho_0^2} \cdot \frac{\dot{u}}{\rho}, \quad \dot{\chi}_1 = -\frac{h}{2\rho_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \rho^2}, \quad \dot{\chi}_2 = -\frac{h}{2\rho_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho}. \quad (4)$$

Мощность диссипации энергии в безразмерном виде

$$D = \int_0^1 (\dot{\varepsilon}_1 n_1 + \dot{\varepsilon}_2 n_2 + \dot{\chi}_1 m_1 + \dot{\chi}_2 m_2) \rho d\rho, \quad (5)$$

где $D = 2\bar{D}\rho_0^2/\sigma_s h^3$, $\varepsilon_i = 4\bar{\varepsilon}_i\rho_0^2/h^2$, $\dot{\chi}_i = 2\bar{\chi}_i\rho_0^2/h$ – безразмерные скорость диссипации, скорости деформаций и скорости изменения кривизны срединной поверхности.

Соотношения ассоциированного закона течения позволяют выразить изгибные силовые факторы через скорости изменения кривизны срединной поверхности:

$$m_1 = \frac{m(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{\sqrt{3(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2)}}, \quad m_2 = \frac{m(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1)}{\sqrt{3(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2)}}. \quad (6)$$

Соотношение (5) с учетом (4) и (6) принимает вид

$$D = D^m + D^n = \frac{2m}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} \rho d\rho + n \int_0^1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \rho d\rho. \quad (7)$$

Условие максимума скорости диссипации энергии позволяет получить зависимость между n и m :

$$\frac{n}{m} = \int_0^1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \rho d\rho \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} \rho d\rho \right)^{-1}. \quad (8)$$

Интегрируя (5) по частям и составляя условие максимума скорости диссипации, можно получить другую формулу:

$$\frac{n}{m} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \dot{w} \rho d\rho \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\bar{m}_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{m}_1) \right] \dot{w} \rho d\rho \right)^{-1}, \quad (9)$$

где $\bar{m}_1 = m_1/m$, $\bar{m}_2 = m_2/m$ — нормированные векторы.

Зависимости (8) и (9) эквивалентны, но формула (9) предпочтительна, так как в нее не входят производные от скорости перемещений, которые могут терпеть разрывы.

Введением новой функции

$$\psi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[m_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho m_1) \right], \quad (10)$$

система уравнений (1) с учетом физических соотношений (6), условия пластичности (3) и зависимостей (8) или (9) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(\rho) + n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \psi(\rho, t). \quad (11)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (3) по пространственной координате, найдем соотношение между производными:

$$\frac{\partial m_2}{\partial \rho} = - \frac{\partial m_1}{\partial \rho} \cdot \frac{2m_1 - m_2}{2m_2 - m_1} \quad (12)$$

С учетом этого функция (10) примет вид

$$\psi = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial \rho} (2+k) - \frac{\partial^2 m_1}{\partial \rho^2}, \quad k = \frac{2m_1 - m_2}{2m_2 - m_1}, \quad (13)$$

или
$$P_S \cdot m \cdot \bar{\psi} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial \rho} (2+k) - \frac{\partial^2 \bar{m}_1}{\partial \rho^2}, \quad (14)$$

где $\bar{\psi} = \psi/P_s$, \bar{m}_1 — нормированные векторы.

Заменим нагрузку $P = P(\rho)$ эквивалентной нагрузкой $P = P_0\bar{\psi}_0$. В соответствии с (11) в момент времени $t = 0 + \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow 0$, $w \rightarrow 0$,

$\dot{w} = (P_0 - P_s)\bar{\psi}_0 \Delta t$, $P_s = \psi(0,0) = \psi_0(0)$. Условие равенства мощностей заданной и приведенной нагрузок позволяет получить выражение для P_0

$$P_0 = \int_0^1 P(\rho)\bar{\psi}_0\rho d\rho \cdot \left(\int_0^1 \bar{\psi}_0^2\rho d\rho \right)^{-1}. \quad (15)$$

Определим $\psi(\rho)$ в момент времени $t = 0 + \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$. Из уравнений (4)

следует
$$\dot{\chi}_1 = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \rho^2} \Delta t, \quad \dot{\chi}_2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} \Delta t.$$

Соотношение скоростей изменения кривизны срединной поверхности на основании ассоциированного закона течения имеют следующий вид:

$$\eta = \frac{\dot{\chi}_1}{\dot{\chi}_2} = \frac{\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \rho^2}}{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho}} = \frac{2m_1 - m_2}{2m_2 - m_1} = k, \quad (16)$$

Из (13) и (16) следует система уравнений для определения поля радиальных изгибающих моментов и функции ψ_0 в момент времени $t = 0 + \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} \cdot k, \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial \rho} \cdot (2+k) + \frac{\partial^2 m_1}{\partial \rho^2} = -\psi_0. \quad (17)$$

Граничные условия для них:

$$m_1(0) = 1, \quad m_1(1) = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho}(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 0. \quad (18)$$

Очертание функции ψ_0 близко к функции Бесселя J_0 .

Система разрешающих уравнений (6), (8), (9), (11), (13), (14), с учетом (15), (16), (17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P_0\bar{\psi}_0 + n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial \rho} \cdot (2+k) + \frac{\partial^2 m_1}{\partial \rho^2}, \quad (19)$$

$$\frac{n}{m} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \dot{w} \rho d\rho \cdot \left(P_s \cdot \int_0^1 \bar{\psi} \dot{w} \rho d\rho \right)^{-1}, \quad (20)$$

$$m_1 = \frac{m(2\eta+1)}{\sqrt{3(1+\eta+\eta^2)}}, \quad m_2 = \frac{m(\eta+2)}{\sqrt{3(1+\eta+\eta^2)}}. \quad (21)$$

Система уравнений решается дифференциально-разностным методом. В результате аппроксимации производных по пространственной координате конечно-разностными аналогами второго порядка точности система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Максимальные остаточные пластические деформации определяются из условия обращения в ноль скорости прогиба.

На рис.1 представлены графики зависимости времени полной остановки пластинки t_k от времени действия нагрузки t_p . На рис. 2 и 3 представлены графики зависимости остаточного прогиба w и остаточного прогиба w/P в центре круглой пластинки от времени действия t_p нагрузки прямоугольного типа. На рис. 4 представлены эпюры остаточных пластических прогибов круглой пластинки в момент времени $t = t_k$, $t_p = 1.5$. Все графики получены для значений $P = 12, 24, 36, 48$. Результаты практически полностью совпадают с представленными в [3] на основе жесткопластической модели с учетом больших прогибов. Можно отметить их хорошее количественное и качественное соответствие экспериментальным и численным результатам, приведенным в работах [7, 8].

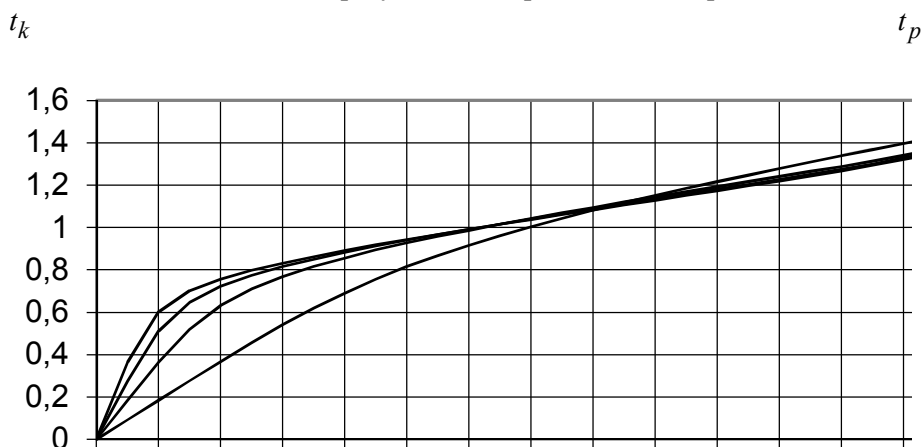


Рис.1. Графики зависимости времени полной остановки пластинки t_k от времени действия нагрузки t_p

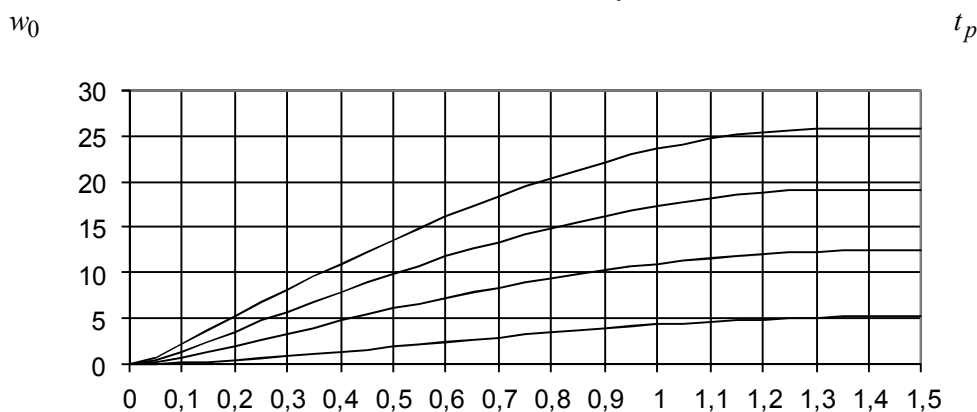


Рис.2. Графики зависимости остаточного прогиба w в центре круглой пластинки от времени действия t_p нагрузки прямоугольного типа

Учет упрочнения и зависимости предела текучести материала от скорости деформирования может быть выполнен путем их усреднения по объему и времени с организацией итерационного процесса, как предложено в работе [6]

Предложенная методика и алгоритм численной реализации для решения задач динамического деформирования круглых пластин на импульсивные и ударные нагрузки имеют как самостоятельное прикладное значение, так и могут быть использованы для тестирования результатов, полученных в программных комплексах на основе более сложных моделей.

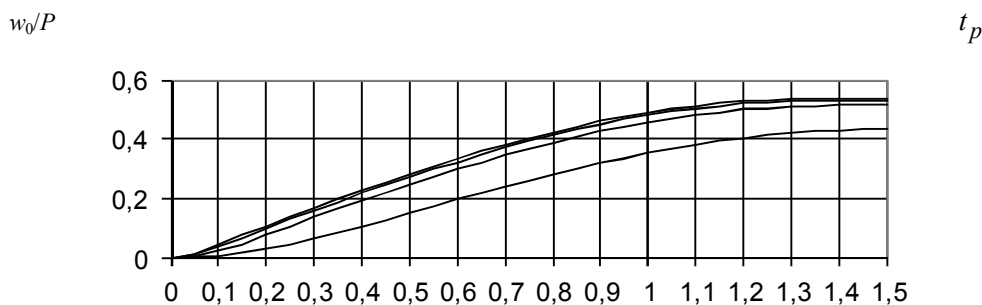


Рис.3. Графики зависимости остаточного прогиба w/P в центре круглой пластинки от времени действия нагрузки t_p

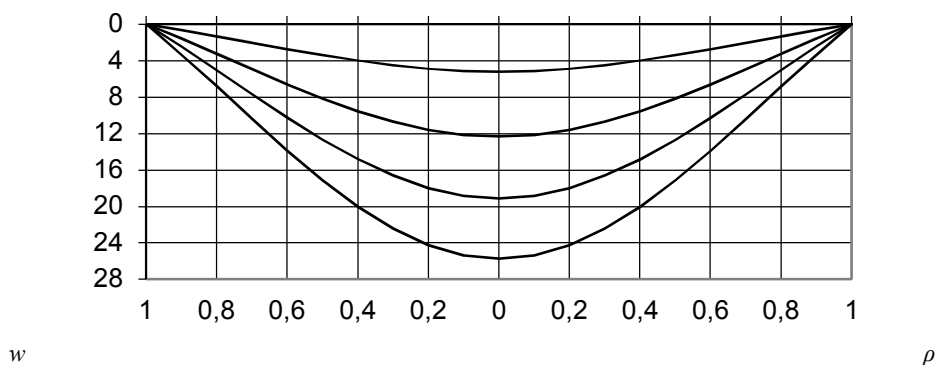


Рис.4. Эпюры остаточных пластических прогибов круглой пластинки в момент времени $t = t_k, t_p = 1,5$.

Л и т е р а т у р а

1. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций [Текст] / М. И. Ерхов. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. Кошур, В.Д. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций [Текст]/ В.Д. Кошур, Ю.В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 1990. – 198 с.
3. Баженов В. Г. , Ломунов В. К., Осетров С. Л. Исследование применимости жесткопластической модели в задачах импульсного деформирования упругопластических пластин при малых и больших прогибах// Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2008. – № 1. – С. 64-69.
4. Старов, А.В. Нестационарное нагружение идеально пластических осесимметричных пологих оболочек с учетом больших прогибов// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : Материалы XI Всесоюз. конф. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1990. – С. 207-211.
5. Старов, А.В. Полная система уравнений динамического ударного нагружения жесткопластических пологих оболочек вращения с учетом больших прогибов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. № 4. – С. 26-31.
6. Себекина, В.И. Оценка остаточных перемещений круглых плоских мембран при динамическом нагружении [Текст] / В.И.Себекина, Г.Ф. Дьячков, А.В. Старов // Исследования по расчету строительных конструкций и надежности сооружений : сб. науч.тр. ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1987. – С. 152-163.
7. Kazemahvazi S., Radford D., Deshpande V. S., Fleck N. A.. Dynamic failure of clamped circular plates subjected to an underwater shock / S. Kazemahvazi, D. Radford, V. S. Deshpande, N. A. Fleck // Journal of Mechanics of Materials and Structures vol. 2, № 10, 2007. – P. 2007-2023.
8. Qiu X., Deshpande V. S., Fleck N. A.. Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading / X. Qiu, V. S. Deshpande, N. A. Fleck // Journal of Applied Mechanics. September 2004. Vol. 71. – P. 637-645.

References

1. *Erkhov M.I.* Teoriya idealno plasticheskikh tel i konstruktsiy. – Moscow: Nauka, 1978. – 352 p.
2. *Koshur V.D., Nemirovskiy Yu.V.* Kontinualnie i diskretnie modeli dinamicheskogo deformirovaniya elementov konstruktsiy. – Novosibirsk: Nauka, 1990. – 198 p.
3. *Bazhenov V.G., Lomunov V.K., Ostrov S.L.* Issledovanie primenimosti zhestkoplasticheskoy modeli v zadachah impulsnogo deformirovaniya uprugoplasticheskikh plastin pri malih i bolshih progibah// Vestnik ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya.* –2008.- № 1.– P. 64-69.
4. *Starov A.V.* Nestatsionarnoe nagruzhenie idealno plasticheskikh osesimmetrichnih plogih obolochek s uchetom bolshih progibov// Chislennye metodi resheniya zadach teorii uprugosti i plasticnosti: Materiali XI Vsesoyuzn. konf. – Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1990. – P. 207-211.
5. *Starov A.V.* Polnaya sistema uravneniy dinamicheskogo udarnogo nagruzheniya zhestkoplasticheskikh plogih obolochek vrascheniya s uchetom bolshih progibov// Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2011. - № 4. - P. 26-31.
6. *Sebekina V.I., Diachkov G.F., Starov A.V.* Otzenka ostatochnih peremescheniy kruglih ploskih membran pri dinamicheskom nadruzhenii// Issledovaniya po raschetu stroitelnih konstruktziy i nadezhnosti sooruzheniy: Sb. nauchn. tr. TsNIISK im. Kucherenko. – Moscow: TsNIISK im. Kucherenko, 1987. – P. 152-163
7. *Kazemahvazi S., Radford D., Deshpande V. S., Fleck N. A.* Dynamic failure of clamped circular plates subjected to an underwater shock / *S. Kazemahvazi, D. Radford, V. S. Deshpande, N. A. Fleck* // Journal of Mechanics of Materials and Structures vol. 2, № 10, 2007. – P. 2007-2023.
8. *Qiu X., Deshpande V. S., Fleck N. A.* Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading / *X. Qiu, V. S. Deshpande, N. A. Fleck* // Journal of Applied Mechanics. September 2004. Vol. 71. – P. 637-645.

DYNAMICS OF IDEAL PLASTIC CIRCULAR PLATE WITH HINGED SUPPORT FIXED

Starov A.V.

Volgogradskiy gosudarstvenniy arhitekturno-stroitelniy unversitet

The problem of plastic deformation of circular plate with hinged support fixed under action of impact loading in view of physical and geometrical nonlinearities is considered. Systems of the resolving equations are received, the algorithm and the program of numerical realization of a problem on the basis of a method of final differences is developed.

KEY WORDS: circular plate, dynamics, impact loadings, plastic deformation, physically and geometrically nonlinear problem.

