

Теория пластичности

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С.Б. КОСИЦЫН, *д-р техн. наук, профессор*
ЧАН СУАН ЛИНЬ, *аспирант*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
127994, Москва, ул. Образцова д. 9, стр. 9;
Тел. +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru

В настоящей статье приведены результаты расчета тройникового соединения круговых цилиндрических оболочек, как в линейной, так и в геометрически нелинейной постановке, без учета и с учетом пластических деформаций по теории пластического течения при статическом нагружении, а также анализ напряженно-деформированного состояния оболочек. Используются диаграммы деформирования материала различного вида.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: цилиндрическая оболочка, тройниковое соединение, линейная и геометрически нелинейная постановки, пластические деформации, теория пластического течения, напряженно-деформированное состояние.

Одним из приоритетных направлений современной строительной механики является численный анализ НДС пространственных систем сложной геометрии, образованных путем сопряжения отдельных элементов конструкций простых форм. К таким системам относятся пересечения цилиндрических оболочек различных диаметров, в том числе тройниковые соединения. Задачи расчета тройниковых соединений цилиндрических оболочек являются существенно пространственными, поэтому плоские расчетные модели здесь неприменимы. Для инженеров очень важно знать информацию о НДС такой сложной системы как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях деформирования, вплоть до предельной нагрузки. Эта информация помогает назначать разумные, научно обоснованные коэффициенты запаса прочности, что в свою очередь приводит к экономии материала и повышению надежности конструкции.

Рассмотрим область пересечения двух цилиндрических оболочек с размерами (рис. 1): $a = 2,2$ м, $R = 1$ м, $r = 0,7$ м, $T = 0,02$ м, $t = 0,014$ м, изготовленных из стали 3 со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ н/м², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, нагруженных внутренним радиальным давлением q . Здесь значение параметра a назначено, исходя из условия затухания искажения НДС в месте пересечения двух оболочек. По всем торцам осевые перемещения считаются нулевыми (на рис. 1 связи не показаны). Это объясняется тем, что расчетный фрагмент пересекающихся цилиндрических оболочек получен путем вырезания из бесконечно длинных трубопроводов. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы установлена одна дополнительная связь на торце основной оболочки по направлению, перпендикулярному плоскости рисунка. Задача решена в линейной и геометрически нелинейной постановках, как без учета, так и с учетом пластических деформаций.

1. Линейная и геометрически нелинейная постановки задачи

Материал считался неограниченно линейно упругим, т.е. закон Гука справедлив во всем диапазоне деформирования. Задача решена, как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности. Для расчетов использованы четырехуз-

ловые плоские конечные элементы (по шесть степеней свободы в узле), реализованные в программных комплексах MSC PATRAN – NASTRAN. Принятые размеры конечных элементов (примерно $0,04 \text{ м} \times 0,04 \text{ м}$) определены путем пробных расчетов. Дальнейшее сгущение сетки узлов не оказало существенного влияния на НДС оболочек.

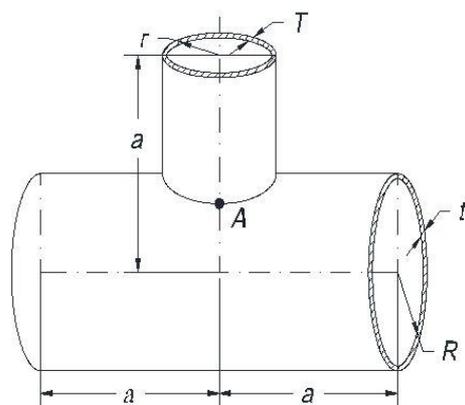


Рис. 1. Расчётный фрагмент тройникового соединения цилиндрических оболочек

Рис. 2 содержит графики зависимостей «нагрузка – полное перемещение» для точки А (рис. 1), расположенной в зоне пересечения оболочек. Максимальные перемещения развились именно в этой зоне. Графики построены по результатам расчетов без учета и с учетом геометрической нелинейности.

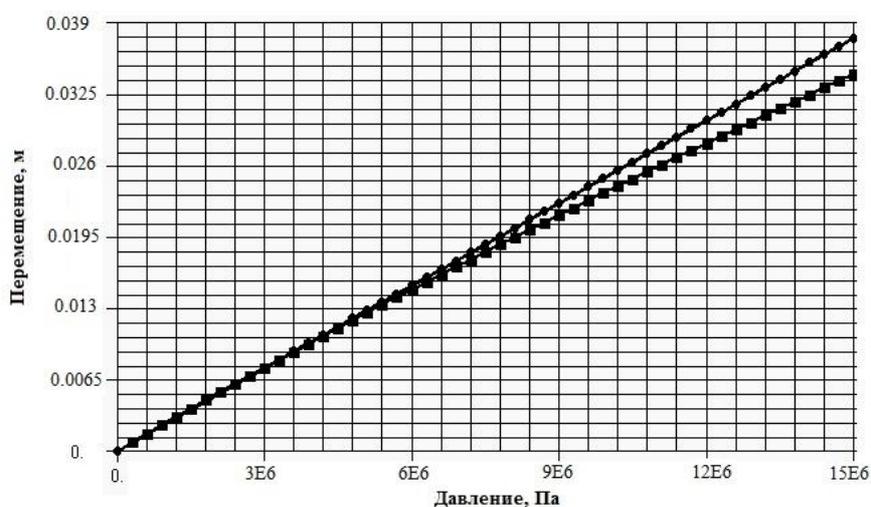


Рис. 2. Графики зависимости «нагрузка – перемещение»:
 — линейная постановка;
 — геометрически нелинейная постановка.

Рис. 2 показывает, что при значениях нагрузки (давления) до $q \sim 3 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2$ две кривые практически совпадают. При больших нагрузках они начинают отклоняться друг от друга. Эффект учета геометрической нелинейности проявляется, когда перемещения точек оболочек достигают одной – двух толщин и более, однако при этом напряжения в оболочках намного превышают, как предел текучести материала, так и временное сопротивление, чего на практике быть не может. Поэтому дальнейшие расчеты проведены с учетом возникновения пластических деформаций материала оболочек.

2. Расчеты тройникового соединения оболочек с учетом возникновения пластических деформаций

Пластические деформации материала оболочек учтены по теории пластического течения. Приведем исходные положения теории пластического течения с изотропным упрочнением [1].

1. Материал оболочек принят изотропным.

2. Относительное изменение объема ε считается малым, является упругой деформацией и пропорционально среднему напряжению σ :

$$\varepsilon = 3k \cdot \sigma, \text{ или в дифференциалах } d\varepsilon = 3k \cdot d\sigma.$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$; $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$; $k = (1 - 2\mu)/E$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные относительные деформации.

3. Полные дифференциалы составляющих тензора деформаций $d\varepsilon_{ij}$ являются суммой дифференциалов упругих $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p,$$

$$\text{где } d\varepsilon_{ij}^e = \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{1+\mu} \delta_{ij} d\sigma \right) / (2G); \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot s_{ij}; \quad G = E/(2(1+\mu));$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases};$$

s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; $d\lambda$ – некоторый бесконечно малый скалярный множитель.

4. Девиатор дифференциалов пластических деформаций $D_{d\varepsilon^p}$ и девиатор напряжений D_σ пропорциональны: $D_{d\varepsilon^p} = d\lambda \cdot D_\sigma$.

5. При разгрузке материал подчиняется закону Гука, то есть является линейно упругим:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e = \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{1+\mu} \delta_{ij} d\sigma \right) / (2G).$$

Если материал оболочек – упрочняющийся, то множитель $d\lambda$ пропорционален дифференциалу работы пластической деформации. Чаще всего функцию упрочнения [2] определяют по диаграмме растяжения материала при одноосном напряженном состоянии.

С целью оценки влияния вида диаграмм деформирования материала на НДС тройникового соединения цилиндрических оболочек проведены расчеты системы по теории пластического течения (условие начала текучести – Мизеса). При практической реализации теории дифференциалы заменены конечными приращениями.

Реализованы четыре варианта расчетов со следующими параметрами:

- материал – упруго-пластический с упрочнением по реальной диаграмме деформирования [3] ($\sigma_T = 2.45 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$; $\varepsilon_T^1 = 1.23 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_T^2 = 2.00 \cdot 10^{-2}$; $\sigma_B = 3.57 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$; $\varepsilon_B = 1.77 \cdot 10^{-1}$) без учета геометрической нелинейности;
- материал – упруго-пластический с упрочнением по реальной диаграмме деформирования [3] с учетом геометрической нелинейности;
- материал – упруго-пластический с упрочнением по билинейной диаграмме ($E = 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$; $E_1 = 6.37 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$) с учетом геометрической нелинейности;

– материал – упруго-пластический без упрочнения, подчиняющийся идеальной диаграмме Прандтля ($\sigma_T = 2.45 \cdot 10^8$ н/м²; $\varepsilon_T = 1.23 \cdot 10^{-3}$), с учетом геометрической нелинейности.

На рис. 3 изображены графики зависимостей «нагрузка – перемещение» соответствующих точке А (рис. 1), расположенной в зоне пересечения оболочек, для рассмотренных случаев нагружения. В целях сравнения на этом же рисунке показаны фрагменты двух аналогичных графиков с рисунка 2 в усеченном диапазоне нагрузки (от $q=0$ до $q=3.0 \cdot 10^6$ н/м²). Следует отметить, что в указанном диапазоне нагружения оба графика, соответствующие расчетам без учета физической нелинейности, практически совпали.

Анализируя результаты проведенных расчетов, отметим следующее.

При $q \leq 1,26 \cdot 10^6$ н/м² все кривые, показанные на рис. 2, практически совпали. Этот диапазон нагружения соответствует упругой работе материала.

Далее за счет появления пластических деформаций в зоне пересечения оболочек контролируемые перемещения начинают интенсивно нарастать и достигают величин $\sim 0,22$ м (11 толщин основной оболочки) при $q=3.0 \cdot 10^6$ н/м². Такой результат дает расчет, учитывающий упрочнение материала по реальной диаграмме его деформирования без учета геометрической нелинейности. Наличие больших прогибов в зоне пересечения оболочек требует обязательного включения в расчеты геометрической нелинейности. Решение задачи, учитывающее упрочнение материала по реальной диаграмме и геометрическую нелинейность снизило контролируемые перемещения в 3.06 раза до $\sim 0,072$ м (3.6 толщины основной оболочки). Это снижение весьма существенное, поэтому его необходимо учитывать в дальнейших расчетах. Деформированный вид тройникового соединения при $q = 3,0 \cdot 10^6$ н/м² показан на рис. 4. На этом рисунке видно, как сильно деформировались оболочки в области их сопряжения.

К сожалению, у инженеров – расчетчиков реальные диаграммы деформирования материалов не всегда бывают в наличии [4, 5]. Очень часто известны лишь характерные параметры этих диаграмм: σ_T – предел текучести и σ_B – временное сопротивление (предел прочности), а также соответствующие относительные деформации (ε_T и ε_B). В таких случаях по известным параметрам можно построить схематизированные диаграммы деформирования материала, например, билинейные. У билинейной диаграммы первый линейный участок соответствует закону Гука, а модуль упругости определяется соотношением

$$E = \sigma_T / \varepsilon_T .$$

Второй линейный участок соответствует упрочнению материала и может быть определен величиной E_1 :

$$E_1 = (\sigma_B - \sigma_T) / (\varepsilon_B - \varepsilon_T) .$$

Контролируемые перемещения в точке А, полученные в результате расчета, учитывающего упрочнение материала по билинейной диаграмме и геометрическую нелинейность, составили $\sim 0,076$ м (3,8 толщины основной оболочки). Это число очень близко к решению, полученному с учетом реальной диаграммы деформирования материала и геометрической нелинейности.

Если же известны только величины σ_T и ε_T , то в расчетах может быть использована идеализированная диаграмма Прандтля без упрочнения. Контролируемые перемещения в данном случае оказались равными $\sim 0,092$ м (4,6 толщины основной оболочки), что также является приемлемым результатом по отношению к решению, принятому за эталонное (с учетом реальной диаграммы деформирования материала и геометрической нелинейности).

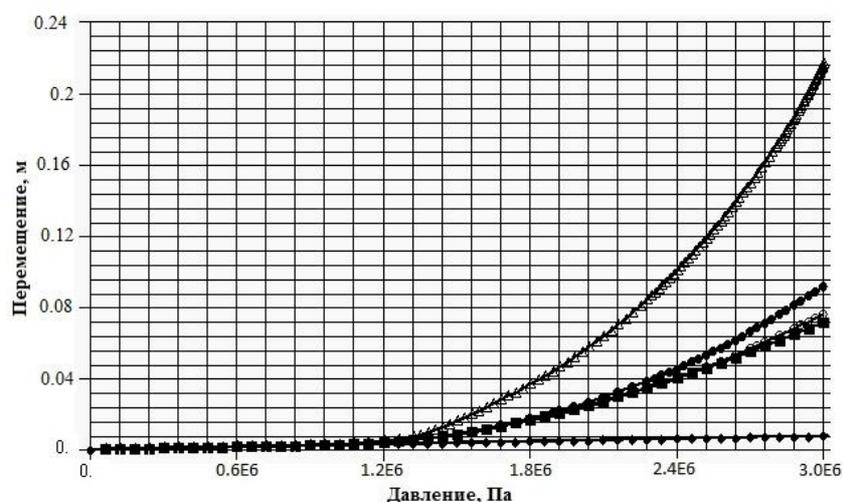


Рис. 3. Графики зависимостей «нагрузка – перемещение»:

- ◆— линейная постановка, линейно упругий материал;
- ◇— геометрически нелинейная постановка, линейно упругий материал;
- ▲— упруго-пластический материал по реальной диаграмме без учета геометрической нелинейности;
- упруго-пластический материал по реальной диаграмме с учетом геометрической нелинейности;
- упруго-пластический материал по билинейной диаграмме с учетом геометрической нелинейности;
- упруго-пластический материал по идеальной диаграмме Прандтля с учетом геометрической нелинейности.

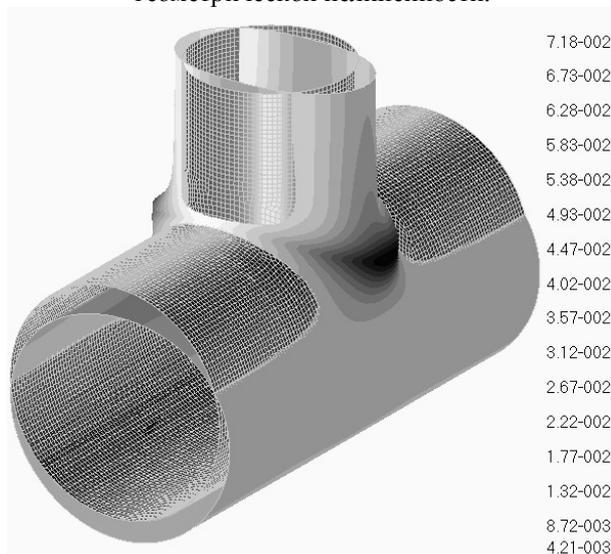


Рис. 4. Деформированный вид тройникового соединения при $q = 3,0 \cdot 10^6$ н/м² (расчет с учетом геометрической нелинейности и пластических деформаций по реальной диаграмме)

На рис. 5 а, б, в изображены поля интенсивностей напряжений в наружных волокнах пересекающихся оболочек при нагрузке $q = 3,0 \cdot 10^6$ н/м² и использованные диаграммы деформирования. Результаты соответствуют расчетам с учетом геометрической нелинейности.

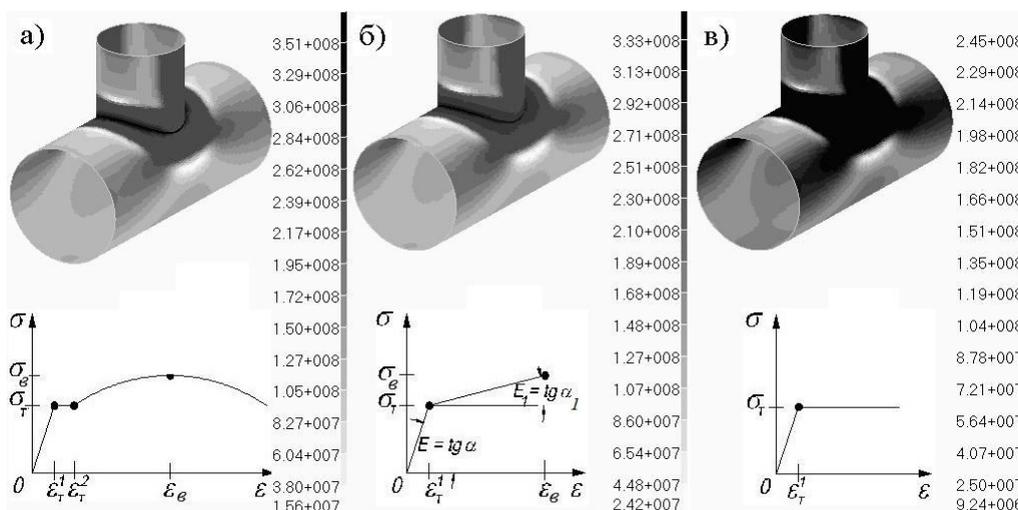


Рис. 5. Поля интенсивностей напряжений в наружных волокнах оболочек и соответствующие диаграммы деформирования: а) реальная диаграмма; б) билинейная диаграмма; в) идеализированная диаграмма Прандтля.

3. Выводы

1. Если не учитывать пластические деформации материала оболочек, то перемещения точек тройниковых соединений оболочек достигают 1 – 2 толщин при очень высоких нагрузках, значительно превышающих нагрузки, при которых появляются пластические деформации. Учет геометрической нелинейности в упругой стадии деформирования таких систем нецелесообразен.

2. Если в конструкциях тройниковых соединений учитывать пластические деформации, то в зонах пересечения оболочек большие перемещения появляются уже при нагрузках, превышающих $q = 1,5 \cdot 10^6$ н/м², а неучет геометрической нелинейности приводит к завышенным (до 3 раз) величинам перемещений, полученных расчетным путем, поэтому в данном случае в расчетах необходимо учитывать геометрическую нелинейность.

3. В расчетах следует использовать реальные диаграммы деформирования материала, но при их отсутствии допустимо применять схематизированные, как билинейные, так и диаграммы Прандтля.

Л и т е р а т у р а

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 421 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 401 с.
3. Сон К. Д. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости пространственных рамных систем и разработка приближенной методики определения критической силы с учетом нелинейности. – Дисс. канд. техн. наук. – М., 2010. – 146 с.
4. Kelly D., Reidsema C., Bassandeh A., Pearce G., Lee M. On interpreting load paths and identifying a load bearing topology from finite element analysis// Finite Elements in Analysis and Design. – August 2011. – Vol. 47. –Iss. 8. –P. 867-876.
5. Dequiedt J.L. Localization in elasto-plastic materials: Influence of an evolving yield surface in biaxial loading conditions// International Journal of Solids and Structures. – August 2011. – Vol. 48. – Iss. 16–17. – P. 2324-2332.

References

1. Kachanov L.M. Osnovi teorii plastichnosti. – Moscow: Nauka, 1969. – 421 p.
2. Malinin N.N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. – Moscow: Mashinostoenie, 1975. – 401 p.
3. Son K.D. Eksperimentalno-teoreticheskoe issledovanie ustoychivosti prostranstvennih ramnih sistem I razrabotka pribl. metodiki opredeleniya kriticheskoy sily s uchetom nelineynosti. – Diss. kand. tehn. nauk. – Moscow, 2010. – 146 p.

4. Kelly D., Reidsema C., Bassandeh A., Pearce G., Lee M. On interpreting load paths and identifying a load bearing topology from finite element analysis// Finite Elements in Analysis and Design. – August 2011. – Vol. 47. –Iss. 8. –P. 867-876.

5. Dequiedt J.L. Localization in elasto-plastic materials: Influence of an evolving yield surface in biaxial loading conditions// International Journal of Solids and Structures. – August 2011. – Vol. 48. – Iss. 16–17. – P. 2324-2332.

**THE ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE
INTERSECTING CYLINDRICAL SHELLS FOR THE ELASTO – PLASTIC
DEFORMATIONS WITH A VIEW OF GEOMETRICAL NONLINEARITY**

Kositsyn S. B., Tran Xuan Linh

Moskovskiy gosudarstvenniy universitet putey soobscheniya (MIIT)

The calculation results of circular cylindrical shells cross orthogonal tee connection in linear and in geometrically nonlinear formulation of the problem with taking into account plastic deformations according to the theory of plastic flow under static loading and an analysis of the stress-strain state of shells are presented in the article. Strain diagrams of the material used for various species.

KEYWORDS: cylindrical shell, tee connection, linear and geometrically nonlinear formulations, plastic deformation, theory of plastic flow, stress-strain state.

