

## СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН И ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ С НЕСМЕЩАЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ ПРИ СЖАТИИ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

С.П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*,  
А.С. ИВАНОВА, *аспирант*  
Поволжский государственный технологический университет,  
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3;  
E-mail: [sp-ivanov@mail.ru](mailto:sp-ivanov@mail.ru), [IvanovSP@volgatech.net](mailto:IvanovSP@volgatech.net)

*В работе излагается метод расчета на статическую устойчивость пластин и пластинчатых систем. Получена система дифференциальных уравнений для исследования статической устойчивости пластин и пластинчатых систем. Представлены примеры расчета на устойчивость шарнирно-опертой пластины и Т-образной пластинчатой системы при сжатии в двух направлениях.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: статическая устойчивость, пластина, пластинчатая система.

Пластины и пластинчатые системы находят широкое применение в строительстве, машиностроении, приборостроении и других областях техники. Поэтому задачи расчета пластин и пластинчатых систем на устойчивость являются важными для науки и практики. Исследованиям устойчивости стержней, пластин и пластинчатых систем посвящены работы многих авторов [1-6].

Цель настоящей работы заключается в разработке метода расчета пластин и пластинчатых систем на статическую устойчивость при общем случае действия сжимающих нагрузок.

Рассмотрим пластинчатую систему (рис. 1), на которую действуют сжимающая нагрузка  $P$  – в поперечном направлении, сжимающая нагрузка  $\alpha P$  – в продольном направлении;  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . На рис. 1:  $w=w(x,y)$  – перемещение точки  $K$  срединной плоскости пластин системы в направлении оси  $z$ .

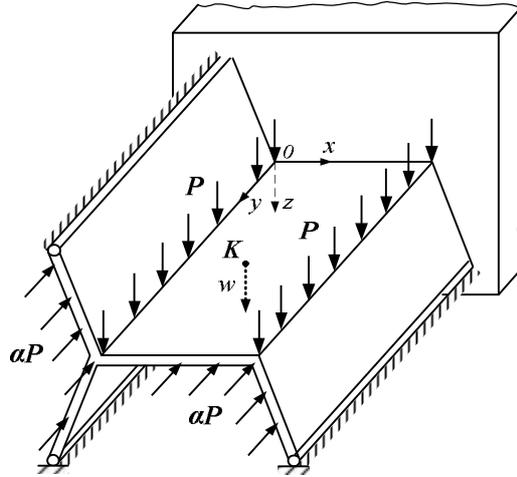


Рис. 1. Общая схема пластинчатой системы с действующими нагрузками

Функцию прогибов  $w(x,y)$  пластин пластинчатой системы представим в виде разложения по В.З. Власову [5]:

$$w(x,y) = \sum_i W_i(y) f_i(x); \quad (i = 1,2,3,\dots,n), \quad (1)$$

где  $W_i(y)$  – обобщенная величина прогиба пластин, которая определяется из решения задачи;  $f_i(x)$  – функции поперечного распределения прогибов (координатные функции), которые задаются из физического смысла задачи.

Запишем выражения для изгибающих  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящих  $M_{xy}$  моментов:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \sum_{i=1}^n [W_i(y) f_i''(x) + \nu W_i''(y) f_i(x)]; \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \sum_{i=1}^n [W_i''(y) f_i(x) + \nu W_i(y) f_i''(x)]; \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial xy} = -D(1-\nu) \sum_{i=1}^n W_i'(y) f_i'(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластин системы,  $\delta$  – толщина пластин,  $E$ ,  $\nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластин.

Составим выражение полной энергии для пластинчатой системы:

$$\Pi = \iint \left\{ \frac{1}{2} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) - \frac{P w_x^2}{2} - \frac{\alpha P w_y^2}{2} \right\} dx dy, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} w_x &= \sum_{i=1}^n W_i(y) f_i'(x); & w_{xx} &= \sum_{i=1}^n W_i(y) f_i''(x); \\ w_y &= \sum_{i=1}^n W_i'(y) f_i(x); & w_{yy} &= \sum_{i=1}^n W_i''(y) f_i(x); \\ w_{xy} &= \sum_{i=1}^n W_i'(y) f_i'(x). \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (1), (2) и (4) полную энергию  $\Pi$  можно выразить через обобщенный прогиб  $W$  и его производные. Определим экстремальное значение полной энергии (3), используя уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial F}{\partial W_i''} + \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial W_i'} - \frac{\partial F}{\partial W_i} = 0, \quad (5)$$

где  $F$  – подынтегральная функция в выражении (3).

Раскрывая (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета на устойчивость пластин и пластинчатых систем при сжатии в двух направлениях:

$$\sum_i \left[ a_{ji} W^{IV} - \left( 2b_{ji} - \frac{\alpha P a_{ji}}{a^* D} \right) W'' + \left( c_{ji} - \frac{P b_{ji}}{l^* D} \right) W \right] = 0, \quad (6)$$

где  $a^*$  – длина контура пластинчатой системы в поперечном направлении, на который действует сжимающая нагрузка  $\alpha P$ ;  $l^*$  – суммарная длина ребер пластинчатой системы, на которые приходится действие сжимающей нагрузки  $P$ .

Коэффициенты уравнений (6) имеют вид:

$$a_{ji} = \int_x f_i f_j dx; \quad b_{ji} = \int_x f_i' f_j' dx - \frac{V}{2} [f_i f_j' + f_i' f_j]; \quad c_{ji} = \int_x f_i'' f_j'' dx; \quad (7)$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Полученные уравнения (6) можно применять для расчета на устойчивость отдельных пластин, сжатых в двух направлениях, и пластинчатых систем.

В качестве примера рассчитаем на устойчивость шарнирно-опертую по контуру прямоугольную пластину, сжатую в двух направлениях (рис. 2).

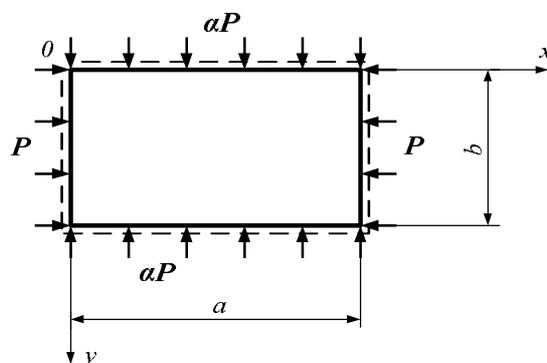


Рис. 2. Схема нагружения пластины

Выполним расчет в первом приближении:

$$w(x, y) = W_1(y) f_1(x). \quad (8)$$

Полагая, что потеря устойчивости происходит по одной полуволне синусоиды в направлении оси  $x$ , координатную функцию принимаем в виде:

$$f_1(x) = \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (9)$$

При расчете в первом приближении система дифференциальных уравнений устойчивости (6) будет состоять из одного уравнения:

$$a_{11} W_1^{IV} - \left( 2b_{11} - \frac{\alpha P a_{11}}{a D} \right) W_1'' + \left( c_{11} - \frac{P b_{11}}{b D} \right) W_1 = 0, \quad (10)$$

где коэффициенты уравнения определяем по формулам (7):

$$a_{11} = \frac{a}{2}; \quad b_{11} = \frac{\pi^2}{2a}; \quad c_{11} = \frac{\pi^4}{2a^3}.$$

Форму потерю устойчивости в направлении оси  $y$  принимаем в виде одной полуволны синусоиды:

$$W_1(y) = W_{11} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11)$$

Из уравнения (10) определяем величину критической силы  $P_{кр.}$ :

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 D \left( \frac{a}{2b^4} + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{2a^3} \right)}{\frac{\alpha}{2b^2} + \frac{1}{2ab}}. \quad (12)$$

Для квадратной пластины ( $a=b$ ), при одинаковой сжимающей нагрузке, действующей в двух направлениях ( $\alpha=1$ ), получим выражение для погонной критической нагрузки:

$$P_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{a} = 2 \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (13)$$

Полученное значение погонной критической нагрузки (13) совпадает с данными в работе [6].

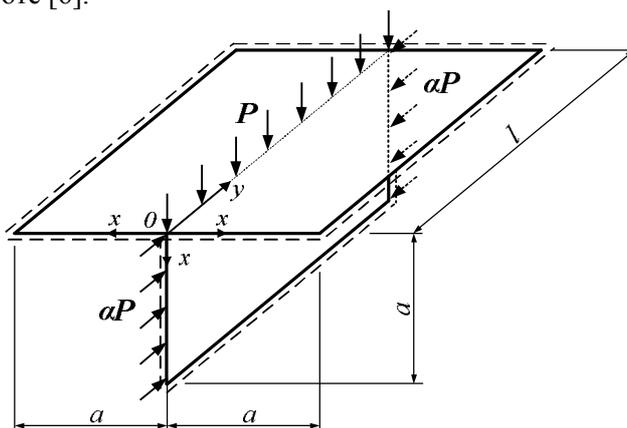


Рис. 3. Пластиночная система, сжатая в двух направлениях

Рассмотрим второй пример. Выполним расчет на устойчивость Т-образной пластиночной системы, сжатой в двух направлениях (рис. 3). Опираие пластин по всем краям принимаем шарнирное.

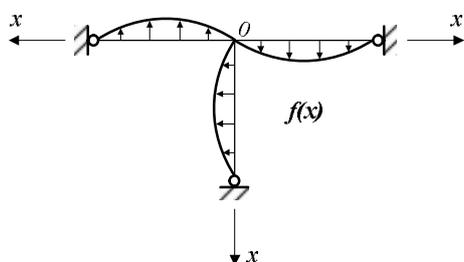


Рис. 4. Вид координатной функции

Минимальная величина критической нагрузки будет соответствовать потере устойчивости пластиночной системы с поворотом узла, где сходятся три пластины. При решении задачи в первом приближении, согласно граничным условиям, координатная функция (рис. 4) будет иметь следующее выражение:

$$f_1(x) = \frac{x}{a} \left( -1 + \frac{3x}{2a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (14)$$

Дифференциальное уравнение устойчивости имеет вид (10). В продольном направлении  $y$  принимаем, что система теряет устойчивость в виде одной полу волны синусоиды:

$$W_1(y) = W_{11} \sin(\pi y / l). \quad (15)$$

Для пластинчатой системы, составленной из квадратных пластин ( $l=a$ ), при сжатии одинаковыми силами ( $\alpha=1$ ) величина погонной критической нагрузки:

$$p_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{a} = 23,5 \frac{D}{a^2}. \quad (16)$$

Данные результаты (16) приближено совпадают с результатами, полученными по методу конечных элементов.

В заключение, можно отметить, что уравнения устойчивости, полученные на основе вариационного метода В.З. Власова, позволяют достаточно просто рассчитывать пластины и пластинчатые системы на устойчивость при общем случае действия сжимающих нагрузок.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем/ А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. - 432с.
2. *Wu, Z.* Post-buckling analysis of variable angle tow composite plates/ Z .Wu, G. Raju, P. M. Weaver // Jnt. J. Solids and Struct. – 2013, 50, № 10. - P. 1770-1780.
3. *Upadhyay A.K.* Post-buckling of composite and sandwich skew plates / A.K. Upadhyay, K.K. Shukla // Jnt. J. Non-Linear Mech. – 2013. 55. - P. 120-127.
4. *Shafei, E.* Dynamic stability optimization of laminated composite plates under combined boundary loading/ E. Shafei, M.Z. Kabir// Appl. Compos. Mater. – 2011, 18, № 6. - P. 539-557.
5. *Власов, В.З.* Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
6. *Вайнберг, Д.В.* Пластины, диски, балки-стенки. Прочность, устойчивость и колебания / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. - Киев: Госстройиздат, 1959. - 1052 с.

#### R e f e r e n c e s

1. *Volmir, A.S.* (1972). *Ustojchivost' Deformiruemyh Sistem*, Moscow: Nauka, 432 p.
2. *Wu, Z., Raju, G., Weaver, P. M.* (2013). Post-buckling analysis of variable angle tow composite plates, *Jnt. J. Solids and Struct.*, 50, № 10, p. 1770-1780.
3. *Upadhyay, A.K., Shukla, K.K.* (2013). Post-buckling of composite and sandwich skew plates, *Jnt. J. Non-Linear Mech.*, 55, p. 120-127.
4. *Shafei, E., Kabir, M. Z.* (2011). Dynamic stability optimization of laminated composite plates under combined boundary loading, *Appl. Compos. Mater*, 18, № 6, p. 539-557.
5. *Vlasov, V.Z.* (1958). *Tonkostennye Prostranstvennyye Sistemy*, Moscow: Gosstrojizdat, 502 p.
6. *Vajnberg, D.V., Vajnberg E.D.* (1959). *Plastiny, Diski, Balki-Stenki. Prochnost', Ustojchivost' i Kolebanija*, Kiev: Gosstrojizdat, 1052 p.

### THE STATIC STABILITY OF PLATES AND PLATE SYSTEMS WITH NONSHIFTING RIBS UNDER TWO-WAY COMPRESSION

S.P. Ivanov, A.S. Ivanova

*Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola*

The method of static stability analysis of plates and plate systems is presented. The set of differential equations of static stability of plates and plate systems is given. The examples of stability calculation of hinged plate and T-shaped plate system under two-way compression are presented.

KEY WORDS: static stability, plate, plate system.