

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.С. ДОРОГАН, канд. техн. наук

Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск

Работа посвящена моделированию колебаний мостовых конструкций с учетом сил демпфирования и жесткости. Граничное интегральное уравнение (ГИУ) в скоростях многозонального тела (газ + конструкция) дополняются ГИУ колебаний упругого тела (конструкции), что позволяет находить нарастание амплитуды их колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: МГИУ, МГЭ, аэроупругость, аэродинамическая устойчивость.

Конструкции большепролетных мостов должны противодействовать силам лобового сопротивления ветра, а также различным аэроупругим явлениям. Для висячих мостов наиболее опасным является изгибно-крутильный флаттер.

В работе [1] изложен альтернативный подход решения связанных систем, основанный на многозональном МГЭ. Предполагается квази - динамическое решение для кратковременных воздействий шквала $\Delta t = 1-3$ мин. Приведенный там расчетный аппарат позволяет находить полные значения перемещений и усилий: $U(x) = u(x) \cdot \Delta t$ (м), $P(x) = p(t) \cdot \Delta t$ (Н).

Квази - динамическое решение может применяться для достаточно жестких конструкций при расчете на прочность и допустимые перемещения. При этом конечные перемещения не дают возможности оценить колебания конструкций, которые могут быть опасными при монтаже и эксплуатации. Поэтому для их нахождения необходимы дополнительные уравнения движения. Для гибких тонкостенных конструкций требуется оценить их колебания и выполнить расчет на аэродинамическую устойчивость.

Для уменьшения воздействия ветра на ванты или подвески висячих мостов применяются различные механические демпферы, которые необходимо учитывать в расчетах.

Чаще всего применяется нестационарная теория Келдыша-Геодорсена, которая сводится к решению уравнений связанных изгибно-крутильных колебаний балки жесткости в середине пролета без учёта сил демпфирования [2].

Наиболее общее решение получается, если применять уравнение движения 2М и 3М упругих тел с учетом демпфирования. Для их решения будем применять численный метод *прямого интегрирования* по времени.

При расчете колебаний необходимо учитывать наличие по всем трем направлениям:

- пружин с коэфф. жесткости K ;
- поглотителей колебаний с коэфф. вязкого (линейного) затухания D .

Уравнение равновесия Навье под действием динамических и демпфирующих сил в перемещениях в тензорной форме [3]:

$$C_p^2 \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (C_s^2 - C_p^2) \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{F_i}{\rho} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{D_i}{\rho} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{K_i}{\rho} \cdot u_i(x, y, z, t) \quad i, i=1, 2, 3, \quad (1)$$

где ρ - плотность материала; F - объемные силы; D - коэффициент вязкого затухания (т/с); K - коэффициент жесткости пружин (т/с²); C_s, C_p - скорости распространения продольных и поперечных волн; $C_s = \sqrt{G/\rho}$, $C_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$, $C_p / C_s > 1$; λ, G - упругие константы.

Для нестационарного движения возможны следующие формулировки.

Применение гармонического возбуждения $\tilde{f}(\vec{x}, t) = \tilde{P}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$. Реакция конструкции зависит от частоты ω внешнего воздействия. Используется преобразование Фурье для уравнения движения (Т.А. Cruse, F.J. Rizzo, R.E. Bellman, A.A. Ходжибоев). Гармоническое воздействие характерно для механизмов.

Применение импульсного возбуждения $\tilde{f}(\vec{x}, t) = \vec{a} \cdot \tilde{P}(t) \cdot \delta(\vec{x})$. Происходит воздействие импульса $P(t)$, действующего из точки в направлении \vec{a} . Такой подход основан на зависящих от времени функций влияния (W.J. Mansur) и будет применен ниже. Уравнение (1) необходимо интегрировать, чтобы получить перемещения. Для этого дополнительно определяются:

- начальные условия при $t = t_0$ в области S : $u_i(x, t) = u_i^0(x)$; $\dot{u}_i(x, t) = v_i^0(x)$;
- граничные условия: $u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t)$ на Γ_1 ; $p_i(x, t) = \bar{p}_i(x, t)$ на Γ_2 .

Известно решение (1) без включения 2-го и 3-го членов в правой части, когда учитываются только силы инерции. Тогда ГИУ для нестационарной задачи имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} & C_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) + \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x, t) \cdot u_j(x, t) \cdot d\Gamma(x) \cdot dt \\ & = \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x, t) \cdot p_j(x, t) \cdot d\Gamma(x) \cdot dt + \int_{t_0}^t \int_S U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot b_j(z, t) \cdot dS(z) \cdot dt + \\ & \rho \cdot \int_S [U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot \dot{u}_j(\xi, z, t) + \dot{U}_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot u_j(\xi, z, t)]|_{t_0} dS(z), \quad \xi \in \Gamma, \quad z \in S, \quad t \in T \end{aligned} \quad (2)$$

где $C_{ij} = 0.5 \delta_{ij}$ - для гладкой границы; $U_{i,j}^*(\xi, x, t), P_{i,j}^*(\xi, x, t)$ - зависящие от времени функции влияния Ахенбаха перемещений и усилий [4]. Последняя строка здесь учитывает влияние начального условия R_i при t_0 . ГИУ (2) линейное по своей структуре и требует только интегрирования по времени.

Предлагается учет всех членов ДУ (1). В этом случае с учетом сил демпфирования и сил жесткости после интегрирования по частям окончательно получается следующее ГИУ:

$$\begin{aligned} & C_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) + \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x, t) \cdot u_j(x, t) \cdot d\Gamma(x) \cdot dt = \quad \xi \in \Gamma, \quad z \in S, \quad t \in T \\ & = \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x, t) \cdot p_j(x, t) \cdot d\Gamma(x) \cdot dt + \int_{t_0}^t \int_S U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot b_j(z, t) \cdot dS(z) \cdot dt + \\ & + \rho \cdot \int_S [U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot \dot{u}_j(\xi, z, t) + \dot{U}_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot u_j(\xi, z, t)]|_{t_0} dS(z) - \end{aligned} \quad (3)$$

$$-\int_{\xi}^{\bar{\xi}} \int_S U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot K_j(z) \cdot u_j(z, t) \cdot dS(z) \cdot dt -$$

$$-\int_S U_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot D_j(z) \cdot u_j(z, t) |_{\xi} \cdot dS(z) + \int_{\xi}^{\bar{\xi}} \int_S \dot{U}_{ij}^*(\xi, z, t) \cdot D_j(z) \cdot u_j(z, t) \cdot dS(z) \cdot dt,$$

где K_j - параметр жесткости; D_j - параметр демпфирования. Видно, что это ГИУ становится дважды нелинейным относительно функции u на S в правой части. Ниже дается специальная процедура его численного решения.

Пространственная и временная дискретизация. Пространственная дискретизация задана L граничными элементами и M внутренними ячейками области.

Обычно считают функции u и p постоянными вдоль выбранных временных шагов. Общий интервал времени T делится на временные шаги $\Delta t = T/N$; N - число шагов. Временная сеть имеет равные шаги: $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$

Тогда дискретизация ГИУ (2) в тензорной форме будет:

$$C_{ij}(\xi) \mathbf{u}_j(\xi, \Delta t) + \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} P_{ij}^*(\xi, x, \Delta t) \cdot \Phi^k \cdot \mathbf{u}_j^k(x, \Delta t) \cdot d\Gamma(x) = \quad (4)$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^L \int_{\Gamma_e} U_{ij}^*(\xi, x, \Delta t) \cdot \Phi^k \cdot \mathbf{p}_j^k(x, \Delta t) \cdot d\Gamma(x) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \int_{S_m} U_{ij}^*(\xi, z, \Delta t) \cdot b_j(z, \Delta t) \cdot dS(z) +$$

$$\rho \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \int_{S_m} [U_{ij}^*(\xi, z, \Delta t) \cdot \dot{u}_j(\xi, z, \Delta t) + \dot{U}_{ij}^*(\xi, z, \Delta t) \cdot u_j(\xi, z, \Delta t)] |_0^{\Delta t} dS(z), \quad \xi \in \Gamma, \quad z \in S$$

где Γ_e - граничный элемент; S_m ячейка области; Φ^k - базисные функции пор-ка k .

Видно, что сначала выполняется суммирование по граничным элементам, а потом - по временным шагам. Это определяет схему численного решения.

В матричной форме система уравнений МГЭ, соответствующая ГИУ (2), имеет вид:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{R}_1, \quad (5)$$

где \mathbf{H} и \mathbf{G} - глобальные матрицы влияния; \mathbf{U} , \mathbf{P} - глобальные вектора узловых перемещений и усилий; \mathbf{B} - вектор объемных сил; \mathbf{R}_1 - вектор начальных условий; находится из предыдущего временного шага.

Аналогично выглядит матричная система для ГИУ (3):

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{R}_1 + (\mathbf{K} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{R}_2, \quad (6)$$

что \mathbf{K} - вектор жесткости, \mathbf{D} - вектор демпфирования; \mathbf{R}_2 - вектор начальных условий. Здесь нелинейные члены перенесены в правую часть и считаются известной функцией, т.е. это возбуждающие силы.

При малых значениях коэффициентов демпфирования (для стальных конструкций) возникает система с малым затуханием колебаний. Их решение вызывает малую степень нелинейности, когда достаточно точности метода последовательных приближений.

На каждом шаге временного цикла требуется решение нелинейной задачи. Используется алгоритм метода простой итерации вида:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}^{i+1}(z, t_n) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{R}_1 + (\mathbf{K} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{U}^i(z, t_n) + \mathbf{R}_2, \quad (7)$$

где задано начальное условие:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}^0(z, 0) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{R}_1. \quad (8)$$

При больших значениях коэфф. демпфирования (для ж.б. конструкций) возникает система с большим затуханием колебаний, что приводит к большей нелинейности. Требуются более точные методы решения нелинейной задачи: метод Эйткена - Стеффенсона или метод предиктор-корректора Ньюарка (Newark predictor-corrector [5]).

Схема 1 повременного численного решения ГИУ (2) состоит из шагов:

Шаг 1. Задание начальных полей перемещений $u_o(z) = 0$, $\dot{u}_o(z) = 0$; $z \in S$; $t_o = 0$.

Шаг 2. Начало временного цикла с шагом Δt и дискретом $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$

Шаг 3. Определение граничных скоростей усилий $\dot{p}(\xi, \Delta t)$ из ГИУ (см. (2) [1]) для Δt ;

$$p(\xi, \Delta t) = \dot{p}(\xi, \Delta t) \cdot \Delta t.$$

Шаг 4. Решение граничной задачи (5) и определение перемещений на границе Γ .

Шаг 5. Решение внутренней задачи в точках коллокаций области S : перемещений $u(z, t_n)$ и их скоростей $\dot{u}(z, t_n) = u(z, t_n) / \Delta t$.

Шаг 6. Накопление значений поля перемещений и его скоростей:

$$U(z) = U(z) + u(z, t_n), \dot{U}(z) = \dot{U}(z) + \dot{u}(z, t_n)$$

Шаг 7. Идти к шагу 2, если $t_n < T$.

Схема 2 повременного численного решения ГИУ (3):

Шаг 1. Задание начальных полей перемещений $u_o(z) = 0$, $\dot{u}_o(z) = 0$; $z \in S$; $t_o = 0$.

Шаг 2. Начало временного цикла с шагом Δt и дискретом $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$

Шаг 3. Определение граничных скоростей усилий $\dot{p}(\xi, \Delta t)$ из ГИУ (см. (2) [1]) для Δt ;

$$p(\xi, \Delta t) = \dot{p}(\xi, \Delta t) \cdot \Delta t.$$

Шаг 4. Решение *линейной* граничной задачи и определение перемещений на границе Γ по матричной формуле (8).

Шаг 5. Решение *линейной* внутренней задачи в точках коллокаций области S : перемещений $u(z, t_n)$ и их скоростей $\dot{u}(z, t_n) = u(z, t_n) / \Delta t$.

Шаг 6. Сохранение значений поля скоростей перемещений $u^k(z)$ итерации $k - 1$.

Шаг 7. Решение *нелинейной* граничной задачи и определение скоростей перемещений и усилий на границе Γ по матричной формуле (7).

Шаг 8. Решение *нелинейной* внутренней задачи итерации k в точках области S .

Шаг 9. Контроль условия сходимости итерацион. процесса:

$$\max_j |U_j^{i+1} - U_j^i| \leq \varepsilon;$$

если условие выполняется - решение закончено, иначе идти к шагу 6.

Шаг 10. Накопление значений поля перемещений и его скоростей:

$$U(z) = U(z) + u(z, t_n), \dot{U}(z) = \dot{U}(z) + \dot{u}(z, t_n)$$

Шаг 11. Идти к шагу 2, если $t_n < T$.

Программа Aero Zon (Azon) - это программа для решения 2М и 3М задач аэроупругости. Основана на методе граничных элементов (МГЭ). Имеет возможность учета флаттера.

Укрупненный алгоритм её решения:

1. Начинается цикл по скорости ветра $V = 10, 20, \dots, 100$ м/с; задается ускорение в порыве и общая его длительность T .

2. Составляется *квазидинамическая* многозональная МГЭ модель **A** (рис. 1, а), которая включает ветровой и структурный макеты (пролетное строение и пилон).

3. Для модели **A** находится её граничное значение $p(\Delta t)$ для всех временных и граничных узлов на внешнем контуре.

4. Составляется *динамическая* многозональная МГЭ модель **B** (рис. 1, б), которая включает только структурный макет, где заданное $p(\Delta t)$ учитывает воздействие ветра.

5. Для модели **B** решается задача упругой динамики по временным и граничным узлам с накоплением.

6. Строится график вертикальных перемещений граничных узлов для времени T и анализируется его поведение. Если происходит нарастание амплитуды колебаний, то скорость ветра характеризует начало изгибно-крутильных колебаний и $V_{cr} = V$.

По такой схеме выполняется аналогичное МКЭ моделирование связанного флаттера. В Azon не требуется значительного сгущения ГЭ сетки вокруг обтекаемых конструкций, как в МКЭ. При угле атаки $\alpha = 0^\circ$ анализируется плоский (классический) флаттер, а при $\alpha = 10^\circ$ - срывной флаттер, когда критическая скорость $V_{cr}(\alpha = 10^\circ) < V_{cr}(\alpha = 0^\circ)$ в 2-3 раза.

Демпферы в вантовых мостах активно применяются с 90-х годов. Их демпфирующая способность определяется требуемым логарифмическим декрементом [6]. Внутренние демпферы применялись для вантовых мостов во Владивостоке. Демпферы установили также для подвесок 3-го висячего моста через п. Босфор.

Azop моделирует появление в конструкции ветровых колебаний. Это позволяет частично исключить физические модели испытаний в аэродинамической трубе для большепролетных мостов. Она еще полностью не написана.

Особенности выбора моделей для расчета динамических колебаний 2М и 3М тел с применением многозального МГЭ (рис. 1, б):

- для учета сосредоточенных подвесок и вант создаются 2М и 3М ячейки ограниченного размера;
- соответствующие вантам / подвескам пружины и демпферы задаются своими паспортными параметрами демпфирования D_x, D_y, D_z , и жесткости K_x, K_y, K_z ;
- сосредоточенные воздействия корректируются (растягиваются) по ячейке: поверхности $d = D / A, k = K / A, A$ - площадь; объема $d = D / V, k = K / V, V$ - объем.

Заключение. Предложено решение ГИУ колебаний упругого тела (конструкция моста) с учетом сил демпфирования и жесткости, характерных для подвесок и вант. Такая ГИУ дополняется ГИУ многозального тела (газ + конструкция) в скоростях для решения связанной задачи аэроупругости. Предложен алгоритм численного моделирования флаттера с учетом демпфирования в виде нелинейного временного интегрирования.

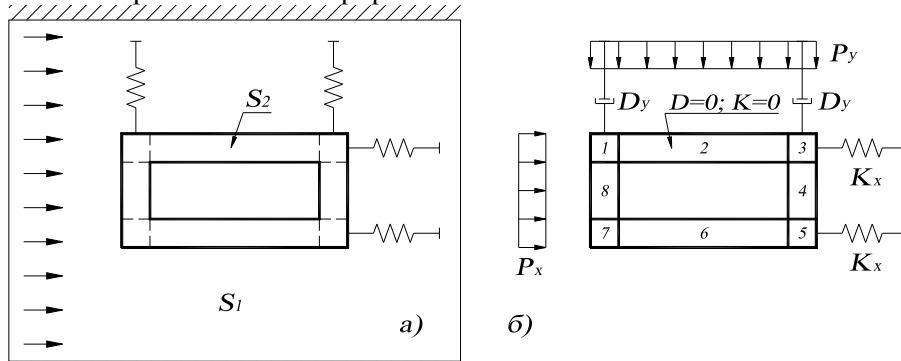
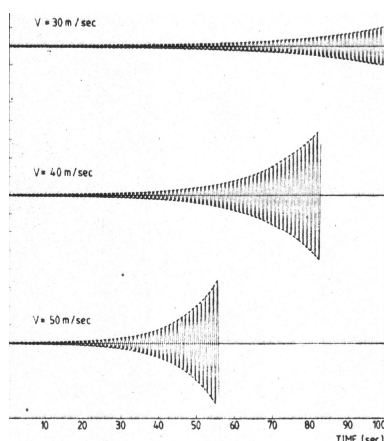


Рис. 1. Многозональные модели расчета: а) ветровой и структурный макет; б) структурный макет



Предложенное ГИУ (3), основанное на зависящих от времени функциях влияния, имеет более удобную и универсальную форму численной реализации.

На рис. 2 показаны вертикальные колебания для различных скоростей ветра висячего моста $L_0 = 3.3$ км через Мессинский пролив [5].

Рис. 2. История вертикальных перемещений висячего моста при скорости ветра 30, 40 и 50 м/с.

Л и т е р а т у р а

1. Дороган А.С. Применение МГИУ теории упругости для моделирования аэроупругости мостовых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 6. – С. 30-35.

2. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
3. Кин Н. Тонг. Теория механических колебаний. – М.: Машгиз, 1963. – 350 с.
4. Dominquez J., Alarcon E. Elastodynamics // Progress in BEM. Berlin: Springer Verlag, 1983. - Pp. 213 - 257.
5. Brotton D.M. Time integration in suspension bridge dynamics // Int. J. Numer. Meth. Eng. – Vol. 20, № 4, 1984, pp. 715 - 732.
6. Constantinou M.C., Tsopelas P. Toggle-brace-damper seismic energy dissipation systems using fluid viscous dampers // J. Struct. Eng., Vol. 127, №2, 2011, pp. 105 - 112.

References

1. Dorogan, A.S. (2014). The application of BEM elasticity for modeling of the wind flow - bridge structures interaction, *Struct. Mech. of Eng. Construct. and Buildings*, № 6, pp. 30-35.
2. Kazakevich, V.I. (1987). *Aerodinamika Mostov*, Moscow: Transport, 240 p.
3. Kin N. Tong (1963). *Theory of Mechanical Vibration*, Moscow: Mashgiz, 350 p.
4. Dominquez, J., Alarcon, E. (1983). *Elastodynamics*, Progress in BEM. Berlin: Springer Verlag, pp. 213 - 257.
5. Brotton, D.M. (1984). Time integration in suspension bridge dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 20, № 4, pp. 715 - 732.
6. Constantinou, M.C., Tsopelas, P. (2011). Toggle-brace-damper seismic energy dissipation systems using fluid viscous dampers, *J. Struct. Eng.*, Vol. 127, №2, pp. 105 - 112.

THE APPLICATION OF A METHOD OF THE BOUNDARY INTEGRATED EQUATIONS FOR MODELING OF AERODYNAMIC STABILITY OF BRIDGE CONSTRUCTION

A.S. Dorogan, *Khabarovsk*

The work is devoted the modeling of oscillations of bridge construction taking into account the forces of damping and rigidity. The boundary integral equation (BIE) in velocities of a multizonal body (gas + construction) is supplemented BIE oscillations of an elastic body (construction) that allows to find the increase of amplitude of their oscillations.

KEY WORDS: MBIE, BEM, aeroelasticity, aerodynamic stability.

