

**Динамика конструкций и сооружений**

**О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ  
С УТОНЧЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТЬЮ  
И ПРИКРЕПЛЕННОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ**

А.Г. ХАКИМОВ, канд. физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник  
ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра  
Российской академии наук;  
450054, Россия, г. Уфа, пр. Октября, 71, [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

*Рассматриваются изгибные колебания круглой плиты, в которой имеется центральный круговой участок с меньшей толщиной и прикрепленной распределенной массой. Используется уравнение, определяющее форму осесимметричных изгибных колебаний плиты постоянной толщины. Получено, что с уменьшением толщины центральной части плиты и с увеличением величины прикрепленной распределенной массы происходит уменьшение низших волновых чисел. По трем собственным частотам изгибных колебаний определяются радиус, толщина утонченной центральной области плиты и величина прикрепленной распределенной массы.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плита, собственные частоты, изгибные колебания, утонченная центральная область, прикрепленная распределенная масса

**Введение.** Устройства, содержащие круглые плиты, широко применяются в технике. Диагностика плиты по собственным частотам изгибных колебаний является актуальной задачей. Наиболее распространенным элементом строительных конструкций является плита, защемленная по контуру, поэтому здесь рассматривается задача определения параметров плиты с утонченной центральной областью и прикрепленной распределенной массой по собственным частотам свободных изгибных колебаний. Прикрепленная распределенная масса моделирует, например, снеговую нагрузку. Задача об осесимметричных собственных колебаниях круглой жестко заделанной пластины рассматриваются в [1]. В работе [2] получено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях с одним узловым диаметром круглых ортотропных и изотропных пластин. Колебания круглых пластин переменной толщины рассматриваются в [3]. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины изучаются в статье [4]. Звуковое поле, возбужденное изгибными колебаниями упругой пластины с круглым включением исследуется в статье [5]. Определение коэффициента жесткости шва круглой составной изотропной пластины по ее основной частоте колебаний рассматривается в [6]. По двум собственным частотам изгибных колебаний определяются радиус и толщина утонченной центральной области круглой плиты в [7]. В отличие от упомянутой работы к утонченной центральной области круглой плиты прикреплена распределенная масса.

**Постановка задачи.** Рассматриваются изгибные колебания круглой плиты. Предполагается, что в плите имеется центральный круговой участок с меньшей толщиной и прикрепленной распределенной массой (рис. 1). Этот центральный круговой участок моделирует ее повреждение. Задача состоит в определении радиуса, толщины утонченной центральной области плиты и величины прикрепленной распределенной массы по трем низшим частотам ее изгибных осесимметричных колебаний.

Обозначим через  $R$ ,  $H$  радиус и толщину плиты,  $a$ ,  $h$  – радиус и толщину центрального кругового участка плиты,  $D$ ,  $\rho$ ,  $m_s$  – цилиндрическая жесткость плиты толщиной  $H$ , плотность и интенсивность прикрепленной распределенной по площади массы, через  $w$  – прогиб плиты.

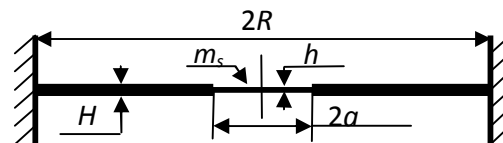


Рис. 1.

Используя уравнение, определяющее форму осесимметричных изгибных колебаний пластины постоянной толщины [8], граничные условия для защемленной пластины, условия стыкования решений при  $r=a$  (условия равенства перемещений, углов поворота, изгибающих моментов  $M$ , перерезывающих сил  $Q$ ) и переходя к безразмерным переменным [7], прогиб плиты на двух участках представляется в виде [9]:

$$w_1 = C_1 J_0(m_1 m \lambda \xi) + C_2 I_0(m_1 m \lambda \xi),$$

$$w_2 = C_3 J_0(\lambda \xi) + C_4 I_0(\lambda \xi) + C_5 Y_0(\lambda \xi) + C_6 K_0(\lambda \xi),$$

$$\lambda = R\lambda^*, \lambda^4 = \frac{\rho R^4 H \omega^2}{D}, m_1 = \sqrt{\frac{H}{h}}, m = \sqrt[4]{1 + m_1^2 m_2}, m_2 = \frac{m_s}{\rho H},$$

где использованы стандартные обозначения цилиндрических функций. Граничные условия для защемленной плиты и условия стыкования решений в развернутом виде записываются

$$\begin{aligned} & C_3 J_0(\lambda) + C_4 I_0(\lambda) + C_5 Y_0(\lambda) + C_6 K_0(\lambda) = 0, \\ & C_3 J_1(\lambda) - C_4 I_1(\lambda) + C_5 Y_1(\lambda) + C_6 K_1(\lambda) = 0, \\ & C_1 J_0(m_1 m \lambda \xi_c) + C_2 I_0(m_1 m \lambda \xi_c) = \\ & = C_3 J_0(\lambda \xi_c) + C_4 I_0(\lambda \xi_c) + C_5 Y_0(\lambda \xi_c) + C_6 K_0(\lambda \xi_c), \\ & -C_1 m_1 m J_1(m_1 m \lambda \xi_c) + C_2 m_1 m I_1(m_1 m \lambda \xi_c) = \\ & = -C_3 J_1(\lambda \xi_c) + C_4 I_1(\lambda \xi_c) - C_5 Y_1(\lambda \xi_c) - C_6 K_1(\lambda \xi_c), \\ & \quad -C_1 m^2 \left[ J_0(m_1 m_2 \lambda \xi_c) - \frac{J_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{m_1 m \lambda \xi_c} \right] + \\ & \quad + C_2 m^2 \left[ I_0(m_1 m \lambda \xi_c) - \frac{I_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{m_1 m \lambda \xi_c} \right] = \\ & = m_1^2 \left\{ -C_3 \left[ J_0(\lambda \xi_c) - \frac{J_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c} \right] + C_4 \left[ I_0(\lambda \xi_c) - \frac{I_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c} \right] \right\} + \\ & + m_1^2 \left\{ -C_5 \left[ Y_0(\lambda \xi_c) - \frac{Y_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c} \right] + C_6 \left[ K_0(\lambda \xi_c) + \frac{K_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c} \right] \right\}, \\ & -C_1 m^3 \left[ -J_1(m_1 m \lambda \xi_c) + \frac{J_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{(m_1 m)^2 \lambda^2 \xi_c^2} - \frac{J_0(m_1 m \lambda \xi_c) - \frac{J_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{m_1 m \lambda \xi_c}}{m_1 m \lambda \xi_c} \right] + \\ & + C_2 m^3 \left[ I_1(m_1 m \lambda \xi_c) + \frac{I_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{(m_1 m)^2 \lambda^2 \xi_c^2} - \frac{I_0(m_1 m \lambda \xi_c) - \frac{I_1(m_1 m \lambda \xi_c)}{m_1 m \lambda \xi_c}}{m_1 m \lambda \xi_c} \right] = \\ & = -m_1^3 C_3 \left[ -J_1(\lambda \xi_c) + \frac{J_1(\lambda \xi_c)}{\lambda^2 \xi_c^2} - \frac{J_0(\lambda \xi_c) - \frac{J_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c}}{\lambda \xi_c} \right] + \\ & + m_1^3 C_4 \left[ I_1(\lambda \xi_c) + \frac{I_1(\lambda \xi_c)}{\lambda^2 \xi_c^2} - \frac{I_0(\lambda \xi_c) - \frac{I_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c}}{\lambda \xi_c} \right] - \end{aligned}$$

$$-m_1^3 C_5 \left[ -Y_1(\lambda \xi_c) + \frac{Y_1(\lambda \xi_c)}{\lambda^2 \xi_c^2} - \frac{Y_0(\lambda \xi_c) - \frac{Y_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c}}{\lambda \xi_c} \right] +$$

$$-m_1^3 C_6 \left[ K_1(\lambda \xi_c) + \frac{K_1(\lambda \xi_c)}{\lambda^2 \xi_c^2} + \frac{K_0(\lambda \xi_c) + \frac{K_1(\lambda \xi_c)}{\lambda \xi_c}}{\lambda \xi_c} \right].$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели плиты с утонченной центральной областью и прикрепленной распределенной массой фигурируют радиус  $\xi_c$  и параметры  $m_1$  и  $m_2$ . Для того, чтобы  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Из частотного уравнения видно, что по трем собственным частотам можно определить радиус  $\xi_c$  и параметры  $m_1$  и  $m_2$  для утонченной центральной области плиты и прикрепленной распределенной массы. Расчеты проведены для следующих параметров плиты:  $E = 3.0 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 3$  м,  $H = 0.15$  м,  $h = 0.1$  м,  $a = 1.5$  м,  $m_s = 100$  кг/м<sup>2</sup>.

При этом вычисленные значения первой и второй собственных частот плиты без утончения и без прикрепленной распределенной массы  $\lambda_1 = 3.0489$ ,  $\lambda_2 = 5.7405$ ,  $\lambda_3 = 8.5781$  ( $f_1 = 25.3365$  Гц,  $f_2 = 89.8191$  Гц,  $f_3 = 200.5651$  Гц).

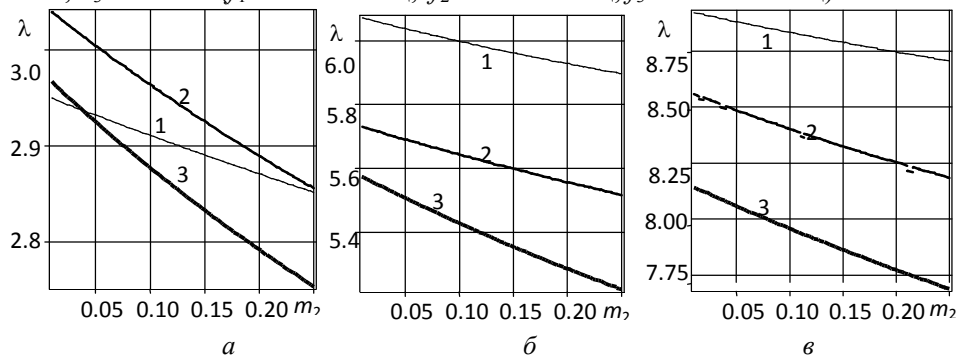


Рис. 2. Зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент а),  $\lambda_2$  (фрагмент б) и  $\lambda_3$  (фрагмент в) от параметра  $m_2$  для  $\xi_c = 0.3; 0.5; 0.7$  (кривые 1–3, соответственно) при  $h = 0.1$  м.

**Прямая задача.** Решение прямой задачи для плиты с вышеприведенными параметрами дает, что  $\lambda_1 = 2.8449$ ,  $\lambda_2 = 5.5043$ ,  $\lambda_3 = 8.1649$  ( $f_1 = 22.0604$  Гц,  $f_2 = 82.5805$  Гц,  $f_3 = 181.7097$  Гц). На рис. 2 даются зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент а),  $\lambda_2$  (фрагмент б) и  $\lambda_3$  (фрагмент в) от параметра  $m_2$  для  $\xi_c = 0.3; 0.5; 0.7$  (кривые 1–3, соответственно) при  $h = 0.1$  м. Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра  $m_2$  или с увеличением величины прикрепленной распределенной массы происходит уменьшение низших волновых чисел. На рис. 3 даются зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент а),  $\lambda_2$  (фрагмент б) и  $\lambda_3$  (фрагмент в) от параметра  $m_1$  для  $\xi_c = 0.3; 0.5; 0.7$  (кривые 1–3, соответственно) при  $m_s = 100$  кг/м<sup>2</sup>. Из рис. 3 видно, что с увеличением параметра  $m_1$  или с уменьшением толщины центральной части плиты происходит уменьшение низших волновых чисел. На рис. 4 приводятся зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент а),  $\lambda_2$  (фрагмент б) и  $\lambda_3$  (фрагмент в) от координаты  $\xi_c$  для  $m_1 = 1.00; 1.05; 1.10$  (кривые

1–3, соответственно) при  $m_s = 100 \text{ кг/м}^2$ . Также получено, что с увеличением координаты  $\xi_c$  в рассматриваемом диапазоне параметров происходит уменьшение низших волновых чисел.

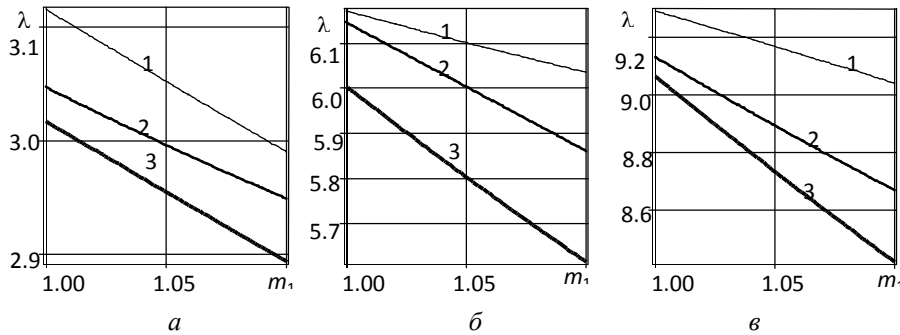


Рис. 3. Зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент *a*),  $\lambda_2$  (фрагмент *б*) и  $\lambda_3$  (фрагмент *в*) от параметра  $m_1$  для  $\xi_c = 0.3; 0.5; 0.7$  (кривые 1–3, соответственно) при  $m_s = 100 \text{ кг/м}^2$

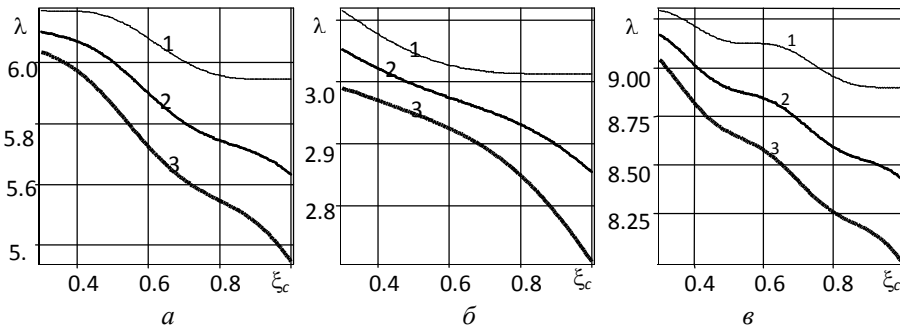


Рис. 4. Зависимости волновых чисел  $\lambda_1$  (фрагмент *a*),  $\lambda_2$  (фрагмент *б*) и  $\lambda_3$  (фрагмент *в*) от координаты  $\xi_c$  для  $m_1 = 1.00; 1.05; 1.10$  (кривые 1–3, соответственно) при  $m_s = 100 \text{ кг/м}^2$

**Обратная задача.** Решение обратной задачи для плиты с вышеприведенными параметрами для  $\lambda_1 = 2.8$ ,  $\lambda_2 = 5.5$ ,  $\lambda_3 = 8.1$  ( $f_1 = 21.3691 \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 82.4510 \text{ Гц}$ ,  $f_3 = 178.8302 \text{ Гц}$ ) дает, что параметры  $m_1 = 1.2213$ ,  $m_2 = 0.2774$ , радиус  $\xi_c = 0.5026$ . На рис. 5 приводятся зависимости от волнового числа  $\lambda_1$  радиуса  $\xi_c$  (фрагмент *a*), параметров  $m_1$  (фрагмент *б*) и  $m_2$  (фрагмент *в*) для различных волновых чисел  $\lambda_2$ : 5.50 – кривая 1; 5.51 – 2; 5.52 – 3 при  $\lambda_3 = 8.1$ . Таким образом, по трем низшим частотам изгибных колебаний плиты можно определить координату  $\xi_c$  и параметры  $m_1$  и  $m_2$  для утонченной центральной ее области и прикрепленной распределенной массы. Определение области, где это решение является единственным, представляет отдельную задачу.

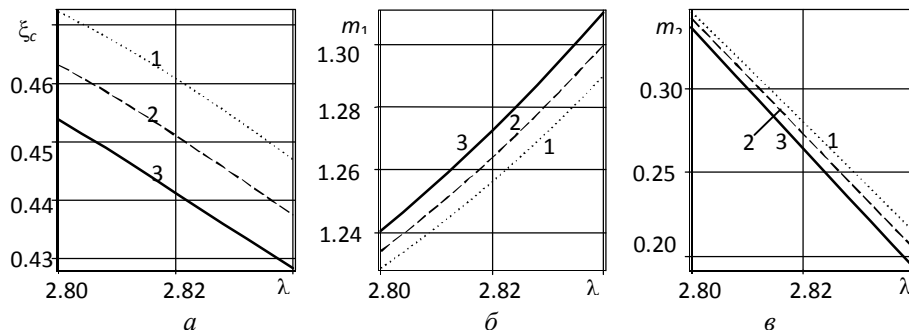


Рис. 5. Зависимости от волнового числа  $\lambda_1$  радиуса  $\xi_c$  (фрагмент *a*), параметров  $m_1$  (фрагмент *б*) и  $m_2$  (фрагмент *в*) для различных волновых чисел  $\lambda_2$ : 5.50 – кривая 1; 5.51 – 2; 5.52 – 3 при  $\lambda_3 = 8.1$ .

Проведенные исследования показывают, что по трем низшим частотам изгибных осесимметричных колебаний плиты можно определить  $\xi_c$  и параметры  $m_1$  и  $m_2$  для утонченной центральной ее области и прикрепленной распределенной массы.

Результаты работы могут быть применены для диагностики круглых плит, в частности, круглых плит с утолщенной или утонченной центральной областью, к которой прикреплена распределенная масса.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97010-поволжье\_a).*

#### Л и т е р а т у р а

1. Миронов В.В., Кузнецова Н.В. Задача об осесимметричных собственных колебаниях круглой жестко заделанной пластины // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2006. – № 6. – С. 193-198.
2. Гросман В.Р. Задача о собственных колебаниях с одним узловым диаметром круглых ортотропных и изотропных пластин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Т. 9. – № 1. – С. 48-52.
3. Коренева Е.Б. Колебания круглых пластин переменной толщины // Сб. «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». – 2005. – №8. – М.: МГСУ. – С. 168-171.
4. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 90-100.
5. Боровиков В.А., Попов А.Л., Челобеев Д.А. Звуковое поле, возбужденное изгибными колебаниями упругой пластины с круглым включением // Акустический журнал. – 2007. – Т. 53. – № 6. – С. 749-759.
6. Турков А.В., Марфин К.В. Определение коэффициента жесткости шва круглой составной изотропной пластины по ее основной частоте колебаний // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 4 (249). – С. 58-62.
7. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях круглой плиты с утонченной центральной областью // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 3. – С. 63-66.
8. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. – М.; Л.: Гостехиздат, 1940. – 500 с.
9. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1964. – 288 с.

#### References

1. Mironov, V.V., Kuznetsova, N.V. (2006). Problem on axisymmetric natural vibrations of a rigidly fixed circular plate. *Vestnik Syktyvkarского университета*, Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. No. 6, p. 193-198.
2. Grosman, V.R. (2013). Problem on natural vibrations of circular orthotropic and isotropic plates with one nodal diameter. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 9. No. 1. P. 48-52.
3. Koreneva, E.E. (2005). Vibrations of variable-thickness circular plates. *Voprosy prikladnoy matematiki i vychislitelnoy mekhaniki*. Moscow: MGSU. No. 8. P. 168-171.
4. Shlyakhin, D.A. (2014) Forced axisymmetric vibrations of a rigidly clamped thick circular piezoceramic plate. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk MTT*. No. 4. P. 90-100.
5. Borovikov, V.A., Popov, A.L., Chelobeev, D.A. (2007). Acoustic field engendered by flexural vibrations of an elastic plate containing a circular inclusion. *Akusticheskiy zhurnal (Acoustic Journal)*. Vol. 53. No. 6. P. 749-759.
6. Turkov, A.V., Marfin, K.V. Determination of the stiffness coefficient of a junction in a circular composite isotropic plate using its major frequency of vibrations. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. No 4 (249). P. 58-62.
7. Khakimov, A.G. (2011). On natural vibrations of a circular plate with thinned central portion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No. 3. P. 63-66.
8. Stuaatt, J. (Lord Rayleigh). (1940). *Theory of Sound*. Vol. 1. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 500 p.
9. Gontkevich, V.S. (1964). *Natural Vibrations of Plates and Shells*. Kiev: Naukova dumka, 288 p.

**NATURAL VIBRATIONS OF A CIRCULAR PLATE HAVING A THINNED  
CENTRAL PORTION AND ATTACHED DISTRIBUTED MASS**

Khakimov A.G.

Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov,  
Ufa Scientific Center of Russian Academia of Science, Ufa

The paper considers flexural vibrations of a circular plate with a central round portion of lesser thickness and attached distributed mass. The equation is used that determines the shape of axisymmetric flexural vibrations in a plate with uniform thickness. It has been found that the lower wave numbers are reduced as the thickness of the central portion in the plate decreases and the magnitude of the attached distributed mass grows. Using three natural frequencies of flexural vibrations, it is possible to determine the radius, the thickness of the thinned central portion in the plate and the magnitude of the attached distributed mass.

KEYWORDS: plate, natural frequencies, flexural vibrations, thinned central fragment.

