ЕЩЕ РАЗ О ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА БАЛКИ ОТ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ*

А. К. АЛДАБЕРГЕНОВ, *кандидат технических наук, профессор*
Костанайский инженерно – экономический университет, Казахстан;
al.abai.41@mail.ru

В статье приводится метод интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки, когда на нее действует равномерно распределенная нагрузка. Впервые без ввода каких–либо дополнительных условий и ограничений получены универсальные уравнения деформаций изгиба, совпадающиеся с известными уравнениями метода начальных параметров.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, дифференцирование, балка.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (EI = const) для малых перемещений запишется в виде [1] (ось z направлена вниз):

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M. \tag{1}$$

В известных источниках утверждено мнение о том, что для балок, состоящих из большого числа участков, вычисления интегралов этого дифференциального уравнения сопряжены со значительными трудностями. В данной работе будет показано, что эти трудности сильно преувеличены. Во–первых, используя условия в местах сопряжения участков, на концах балки, число постоянных интегрирования всегда можно свести к двум (по деформациям), что сильно облегчает решения задач. Во–вторых, после несложных преобразований окончательные выражения интегралов уравнения (1) можно привести к удобному для практических расчетов виду.

Начало координат общее для всех участков поместим на левом конце балки (рис. 1).

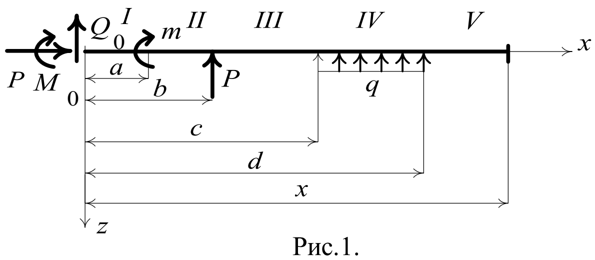

Рис.1.

Выражения изгибающих моментов на участках балки запишутся так:

$$M_1 = M_0 + Q_0x\,; \quad M_2 = M_0 + Q_0x + m\,; \quad M_4 = M_0 + Q_0x + m + P(x-b) + q\frac{(x-c)^2}{2}\,;$$

$$M_3 = M_0 + Q_0x + m + P(x-b)\,; \quad M_5 = M_0 + Q_0x + m + P(x-b) + q(d-c)(x-\frac{c+d}{2}). \tag{2}$$

С учетом (2) напишем уравнение (1) для каждого участка. Проинтегрировав его, получим выражения для углов поворота в виде:

I. *а)* $EI\theta_1 = -M_0x - Q_0\dfrac{x^2}{2} + C_1\,;$ II. *б)* $EI\theta_2 = -M_0x - Q_0\dfrac{x^2}{2} - mx + C_2$

III. *в)* $EI\theta_3 = -M_0x - Q_0\dfrac{x^2}{2} - mx - P\dfrac{x^2}{2} + Pbx + C_3\,;$

Статья рекомендована к публикации д.т.н., профессором М.Ф. Баймухамедовым, проректором по НИР Костанайского социально-технического университета, Казахстан.

IV. *г)* $EI\theta_4 = -M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - mx - P\dfrac{x^2}{2} + Pbx - q(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{cx^2}{2} + \dfrac{xc^2}{2}) + C_4$;

V. *д)* $EI\theta_5 = -M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - mx - P\dfrac{(x-b)^2}{2} - q(d-c)\dfrac{(x^2 - cx - dx)}{2} + C_5$. (3)

Для определения постоянных интегрирования используем известные условия задачи на конце балки и в местах сопряжения участков:
1) при $x = 0$: $\theta_1 = \theta_0$; 2) при $x = a$: $\theta_1 = \theta_2$; 3) при $x = в$: $\theta_2 = \theta_3$;
4) при $x = c$: $\theta_3 = \theta_4$; 5) при $x = d$: $\theta_4 = \theta_5$. (4)

Из условий (4) с учетом (3) находим:

$$C_1 = EI\theta_0; \qquad C_2 = EI\theta_0 + ma; \qquad C_3 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2};$$

$$C_4 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2} + q\frac{c^3}{6}; \quad C_5 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2} - q\frac{d^3 - c^3}{6}. \qquad (5)$$

Внеся значения постоянных (5) в уравнения (3),получим:

I. *а)* $EI\theta_1 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2}$; II. *б)* $EI\theta_2 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - m(x-a)$;

III. *в)* $EI\theta_3 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - m(x-a) - P\dfrac{(x-b)^2}{2}$;

IV. *г)* $EI\theta_4 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - m(x-a) - P\dfrac{(x-b)^2}{2} - q\dfrac{(x-c)^3}{6}$;

V. *д)* $EI\theta_5 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \dfrac{x^2}{2} - m(x-a) - P\dfrac{(x-b)^2}{2} -$

$$-q(d-c)\frac{(x^2 - cx - dx)}{2} - \frac{(d^3 - c^3)}{6}. \qquad (6)$$

После преобразований уравнения *д*) системы (6) можно получить:

$$д)\, EI\theta_5 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} - m(x-a) - P\frac{(x-b)^2}{2} - q[\frac{(x-c)^3}{6} - \frac{(x-d)^3}{6}] \qquad (6а)$$

При повторном интегрировании системы уравнений (6) появятся еще пять постоянных D_i. Они находятся из условий:
1) при $x = 0$: $w_1 = w_0$; 2) при $x = a$: $w_1 = w_2$; 3) при $x = в$: $w_2 = w_3$;
4) при $x = c$: $w_3 = w_4$; 5) при $x = d$: $w_4 = w_5$. (7)

Из условий (7) вытекают:

$$D_1 = EIw_0; \quad D_2 = EIw_0 - m\frac{a^2}{2}; \quad D_3 = EIw_0 - m\frac{a^2}{2} + P\frac{b^3}{6};$$

$$D_4 = EIw_0 - m\frac{a^2}{2} + P\frac{b^3}{6} - q\frac{c^4}{24}; \quad D_5 = EIw_0 - m\frac{a^2}{2} + P\frac{b^3}{6} + q\frac{d^4 - c^4}{24}.$$

С учетом этих постоянных нетрудно записать уравнения прогибов на участках балки. Например, для пятого участка будем иметь:

$$EIw_5 = EIw_0 + EI\theta_0 x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m\frac{(x-a)^2}{2} - P\frac{(x-b)^3}{6} -$$

$$-q(d-c)(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}c - \frac{x^2}{4}d) - q\frac{d^3 - c^3}{6}x + q\frac{d^4 - c^4}{24}.$$

После преобразований это уравнение можно привести к виду:

$$EIw_5 = EIw_0 + EI\theta_0 x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m\frac{(x-a)^2}{2} -$$
$$-P\frac{(x-b)^3}{6} - q[\frac{(x-c)^4}{24} - \frac{(x-d)^4}{24}]. \qquad (8)$$

Обратите внимание на то, что уравнения деформаций любого предыдущего участка содержатся в уравнении деформаций последнего участка. Отсюда следует, что уравнение для данного участка можно получить из уравнения для последнего участка путем исключения из него слагаемых от нагрузок, расположенных справа от него. Тогда уравнения (6) и (8) можно обобщить и записать в виде:

$$EI\theta_x = EI\theta_0 - M_0\cdot x - Q_0\cdot\frac{x^2}{2} - m_i\cdot(x-a_i) - P_i\cdot\frac{(x-b_i)^2}{2} - q_i\cdot[\frac{(x-c_i)^3}{6} - \frac{(x-d_i)^3}{6}]$$

$$EIw_x = EIw_0 + EI\theta_0\cdot x - M_0\cdot\frac{x^2}{2} - Q_0\cdot\frac{x^3}{2} - m_i\cdot\frac{(x-a_i)^2}{2} -$$
$$-P_i\cdot\frac{(x-b_i)^3}{6} - q_i\cdot[\frac{(x-c_i)^4}{24} - \frac{(x-d_i)^4}{24}]. \qquad (9)$$

Эти уравнения назовем универсальными уравнениями деформаций изгиба. Ими удобно пользоваться в общем случае изгиба балок.

Итак, в результате интегрирования дифференциального уравнения (1) получили окончательные уравнения (9) . По сути, здесь идет продолжение метода непосредственного интегрирования, поэтому есть смысл термин «непосредственное интегрирование» заменить на «интегрирование». Насколько известно автору такое решение ранее никем еще не получено. Заметим, что в работе эти уравнения получены без ввода каких – либо дополнительных условий или ограничений. В этом и заключается ее новизна. Данный подход может найти применение в расчетах, несмотря на существование большого выбора численных методов [3].

Уравнения (9) совпадают с известным уравнениями метода начальных параметров, который получен с привлечением дополнительных условий [2].

Л и т е р а т у р а

1. *Алдабергенов А. К.* Сопротивленире материалов с основами теории упругости. – Алматы : Рауан, 1994. – 468стр.

2. *Писаренко Г. С.* Сопротивление материалов. – Киев: ИТЛ, 1963.

3. *Pilkey, Walter D.* Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods. NY: John Wiley & Sons, Inc.,2002, 462 p.

References

1. *Aldabergenov, A.K.* (1994). *Strength of Materials with Bases of Theory of Elasticity*. Almaty: Rauan, 468 p.

2. *Pisarenko, G*.S. (1963). *Strength of Materials.* Kiev: ITL.

3. *Pilkey, Walter D.* (2002). *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*. NY: John Wiley & Sons, Inc., 462 p.

ON DEFORMATION OF BENDING OF A BEAM SUBJECTED TO UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

ALDABERGENOV A.K.
Kostanayskiy injenerno-ekonomicheskiy universitet, Kazachstan

A method of integrating of a differential equation of the bended axis of a beam subjected to uniformly distributed load is presented in the paper. The universal equations of deformation of bending are obtained without introduction of any additional conditions and limitations. These equations coincide with the known equations of a method of initial parameters.

KEYWORDS: differential equation of bended axis of a beam, differencing, beam.