

Теория упругости

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ИНОРОДНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА РОСТ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН В ИЗГИБАЕМОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ**

Б.Б. КАЗБЕКОВ, аспирант

Институт математики и механики НАН Азербайджана  
Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9

*Рассматривается взаимодействие инородных упругих включений впаянных в круговые отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин. Берега трещин свободны от внешних нагрузок, а пластина подвергается однородному изгибу равномерно распределенными моментами.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** перфорированная пластина, инородные упругие включения, двоякопериодическая система прямолинейных трещин, изгиб.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается изотропная упругая пластина, ослабленная двоякопериодической системой круглых отверстий и сквозными прямолинейными трещинами. Круговые отверстия имеют радиус  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центры этих отверстий находятся в точках

$$P_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega_1 = 2; \quad \omega_2 = 2h^* e^{i\alpha}, \quad h^* > 0, \quad \text{Im } \omega_2 \geq 0.$$

В круговые отверстия  $L_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) впаяны упругие шайбы из другого материала. Берега трещин свободны от внешних нагрузок, а пластина подвергается однородному изгибу равномерно распределенными постоянными моментами (в решетке имеют место средние моменты):

$$M_x = M_x^\infty; \quad M_y = M_y^\infty; \quad H_{xy} = 0$$

Начало декартовой системы координат совмещаем с геометрическим центром отверстия  $L_{0,0}$  в срединной  $Oxy$  плоскости пластины (рисунок). В силу симметрии граничных условий и геометрии области, занятой упругой средой, напряжения в изгибаемой пластине будут двоякопериодическими функциями с основными периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

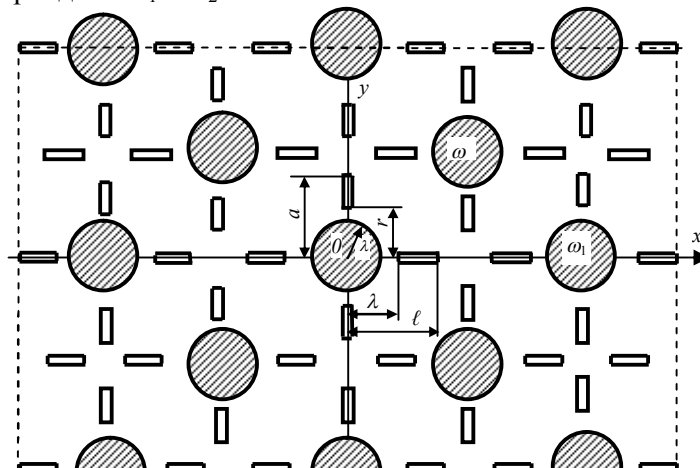


Рисунок. Расчетная схема задачи

Считается, что в процессе деформации пластины противоположные берега трещин не контактируют между собой. При изгибе пластины смежные точки

контуров включений и пластины будут иметь одинаковые смещения, а усилия, действующие со стороны пластины на любое включение, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на пластину со стороны шайбы. Поскольку решение задачи для пластины удовлетворяет свойствам периодичности, то достаточно рассмотреть условия сопряжения пластины с включением лишь вдоль контура основного отверстия  $L_{0,0}$ .

Комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили, относящиеся к шайбе с внешним контуром  $L_{0,0}$ , обозначим через  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ , а соответствующие упругой пластине – через  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$ .

В силу непрерывности смещений на контуре  $L_{0,0}$  ( $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ) имеем следующее граничное условие [1, 2] для комплексных потенциалов

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta}. \quad (1)$$

На основании равенства нагрузки, действующей на включение со стороны пластины и на пластину со стороны включения, имеем [1, 2] второе краевое условие на контуре  $L_{0,0}$  для комплексных потенциалов.

$$\begin{aligned} \varepsilon \overline{\Phi_*(\tau)} + \Phi_*(\tau) - [\overline{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \\ = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ \varepsilon_0 \overline{\Phi_0(\tau)} + \Phi_0(\tau) - [\overline{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nu$ ,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона материала пластины и включения, соответственно;  $D$ ,  $D_0$  – цилиндрическая жесткость пластины и включения.

Записывая условие отсутствия усилий на берегах двоякопериодической системы прямолинейных трещин в пластине, получаем краевое условие на  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t\overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi_*(t)} = iC; \\ \varepsilon \Phi_*(t_1) + \overline{\Phi_*(t_1)} + t_1\overline{\Phi'_*(t_1)} + \overline{\Psi_*(t_1)} = iC_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $t$ ,  $t_1$  – аффиксы точек берегов трещин, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно;  $C$ ,  $C_1$  – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба  $[w]$  в вершинах разрезов;

$$\varepsilon = \begin{cases} -\frac{3+\nu}{1-\nu} & \text{для первой основной задачи,} \\ 1 & \text{для второй основной задачи;} \end{cases}$$

$$L_1 = [-\ell, -\lambda_1] + [\lambda_1, \ell], \quad L_2 = [-a, -r] + [r, a].$$

Таким образом, в принятых предположениях теории Кирхгофа поставленная задача сводится к определению двух пар функций  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  и  $\Phi_*(z)$ ,  $\Psi_*(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих граничным условиям (1), (2), (3).

**2. Решение краевой задачи.** Обозначим левую часть краевого условия (1) через  $f_1 - if_2$ . Считаем, что контуре  $L_{0,0}$  ( $\tau = \lambda \exp(i\theta)$ ) функция  $f_1 - if_2$  разлагается в ряд Фурье, который на основании симметрии задачи имеет вид

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0. \quad (4)$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ , относящиеся к шайбе, будут регулярны в круговой области с радиусом  $\lambda$ . Следовательно, функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  могут быть представлены в следующем виде [1]:

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{2k} z^{2k}. \quad (5)$$

Для определения потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  на контуре  $L_{0,0}$  будем иметь граничное условие

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}. \quad (6)$$

Подставив комплексные потенциалы (5) в граничное условие (6), получим, приравнявая ряды Фурье в левой и правой частях (6):

$$\Phi_0(z) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}; \quad (7)$$

$$\Psi_0(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)A_{-2k-2} + A_{2k+2}] \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}.$$

С помощью потенциалов (7), после некоторых преобразований, запишем краевые условия на контуре  $L_{0,0}$  для комплексных потенциалов  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$  в следующем виде:

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \overline{\Phi_*(\tau)} + \Phi_*(\tau) - [\overline{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ A_0 \frac{1+\varepsilon_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} + \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} e^{-2ki\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдем теперь к построению решения задачи теории изгиба для пластины. Комплексные потенциалы для пластины в рассматриваемом случае однородного изгиба средними моментами (изгиб на бесконечности) ищем в виде [2, 3]:

$$\Phi_*(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+\nu)D} + \Phi(z); \quad \Psi_*(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1-\nu)D} + \Psi(z); \quad (10)$$

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z); \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z); \quad (11)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+k_0)} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-z) dt + A'; \quad (12)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+k_0)} \int_{L_1} g(t) [k_0 \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B';$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!};$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!};$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{\pi(1+k_0)} \int_{L_2} g_1(t_1) \zeta(it_1 - z) dt_1 + A''; \quad (13)$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{1}{\pi(1+k_0)} \int_{L_2} \{ \overline{g_1(t_1)} k_0 \zeta(it_1 - z) - g_1(t_1) [Q(it_1 - z) + it_1 \gamma(it_1 - z)] \} dt + B'' ,$$

где  $\gamma(z)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса;  $\zeta(z)$  – дзета-функция Вейерштрасса;  $Q(z)$  – специальная мероморфная функция [2].

Из условий равенства нулю главного вектора сил и главного момента этих же сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области, занятой пластиной, следует соотношение

$$(k_0 A - \bar{A}) \omega_k - \bar{B} \omega_k = -(\bar{\delta}_k + \delta_k) a_* + (\bar{\gamma}_k + \bar{\delta}_k) \bar{a}_* + (\bar{\delta}_k - \delta_k) b + (\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k) \bar{b} + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_k - \alpha_2 \lambda^2 (k_0 \delta_k - \bar{\gamma}_k); \quad (k = 1, 2)$$

$$a_* = \frac{k_0}{\pi i (1+k_0)} \int_L t \cdot g(t) dt; \quad b = -\frac{k_0}{\pi(1+k_0)} \int_{L_1} t_1 \cdot g_1(t_1) dt_1 .$$

Из условий симметрии относительно координатных осей, будем иметь, что

$$\text{Im } \alpha_{2k} = 0; \quad \text{Im } \beta_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

К основным представлениям (10) - (13) следует добавить [4] дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\lambda_1}^{-\ell} g(t) dt = 0; \quad \int_{\lambda_1}^{\ell} g(t) dt = 0; \quad \int_{-a}^{-r} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_r^a g_1(t_1) dt_1 = 0. \quad (15)$$

Подставив в левую часть (8) выражения для  $\Phi \square(z)$  и  $\Psi \square(z)$  на основании (10), (11), перепишем (8) в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}' e^{2ki\theta} + f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $A_0' = A_0 + \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2(1+\nu)D}$ ;  $A_2' = A_2 + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1-\nu)D}$ ;  $A_{2k}' = A_{2k}$  ( $k = -1, \pm 2, \dots$ ),

$$f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\bar{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (17)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (18)$$

Аналогично, преобразуем краевое условие (9). В результате получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \overline{\Phi_2(\tau)} + \Phi_2(\tau) - [\bar{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^* e^{2ki\theta} + g_1^*(\theta) + ig_2^*(\theta) + \varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $A_0^* = \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+\nu)D} (1+\varepsilon) + A_0 \frac{(1+\varepsilon_0)\mu_0}{2\mu}$ ;  $A_2^* = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1-\nu)D} + A_2 \frac{\mu_0}{\mu}$ ; (20)

$$A_{2k}^* = \frac{\mu_0}{\mu} A_{2k} \quad (k = 2, 3, \dots); \quad A_{-2k}^* = \varepsilon_0 \frac{\mu_0}{\mu} A_{-2k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\bar{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}; \quad (21)$$

$$g_1^*(\theta) + ig_2^*(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_1}(\tau) - \Phi_1(\tau) + [\overline{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Напомним, что краевые условия (16) и (19) должны быть совместными, что позволит определить коэффициенты  $A_{2k}$ . Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ , считаем, что функции (18) и (21) разлагаются на  $|\tau| = \lambda$  в ряды Фурье. На основании симметрии задачи для функций (18) будем иметь

$$\begin{aligned} f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}; \quad \text{Im } B_{2k} = 0; \\ \varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k}^* e^{2ki\theta}; \quad \text{Im } B_{2k}^* = 0 \\ B_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1^* + if_2^*) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \\ B_{2k}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta)) e^{-2ki\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив сюда соотношение (18) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, получим коэффициенты  $B_{2k}$  и  $B_{2k}^*$ .

Аналогично поступаем с функциями (21). В результате получим:

$$\begin{aligned} g_1^*(\theta) + ig_2^*(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B'_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } B'_{2k} = 0 \\ \varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } F_{2k} = 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$B'_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g_*(t) f_{2k}^* dt, \quad F_{2k} = -\frac{1}{2\pi(1+k_0)} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}^*(t_1) dt_1. \quad (24)$$

Подставив в левую часть краевого условия (16) вместо  $\Phi_2(\tau)$ ,  $\overline{\Phi_2}(\tau)$ ,  $\Phi_2'(\tau)$  и  $\Psi_2(\tau)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ , а в правую часть (16) вместо  $f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta)$  и  $\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta)$  ряды Фурье (22) и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ . После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k}$ .

Поступая с граничным условием (19) таким же образом, как это было сделано с условием (16), получим для определения коэффициентов  $\alpha_{2k+2}$  бесконечную линейную систему уравнений.

Упомянутую систему запишем в следующем виде

$$\alpha_{2j+2}^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}^* \alpha_{2k+2}^* + b_j^*. \quad (25)$$

Для получения уравнений, связывающих коэффициенты  $A_{2k}$  с постоянными  $\alpha_{2k}$ , поступаем, используя прием, изложенный в [2]. В результате получим следующие соотношения:

$$A_{2j+2} = \frac{1-\varepsilon}{1-\mu_0/\mu} \alpha_{2j+2}; \quad (26)$$

$$A_{-2j} = \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon\mu_0/\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} r_{j,k} \cdot \lambda^{2k+2j+2} \alpha_{2k+2} + \\ + (B'_{-2j} - B_{-2j}) \frac{\mu_0}{\mu_0 + \varepsilon_0\mu} + \frac{\mu_0}{\mu_0 + \varepsilon\mu} (F_{-2j} - B_{-2j}^*);$$

$$A_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+2} Q_{0,k} A_{2k+2} + Q_0 \frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{4D(1+\nu)} + Q_1.$$

В полученные системы алгебраических уравнений входят посредством интегральных членов через  $B_{2k}^0$  и  $B_{2k}'^0$  искомые функции  $g(x)$  и  $g_1(y)$ . Для их определения используем краевое условие (3) на берегах трещин.

Требую, чтобы комплексные потенциалы (10) – (13) удовлетворяли граничному условию (3), получим два сингулярных интегральных уравнения относительно искомых функций  $g(x)$  и  $g_1(y)$ :

$$\frac{1+\varepsilon}{\pi i(1+k_0)} \int_L g(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi i(1+k_0)} \int_L g(t) [k_0 \zeta(t-x) + Q(t-x) - \\ - (t-x) \gamma(t-x)] dt - k_0 A + \bar{A} + \bar{B} + (1+\varepsilon) \Phi_0(x) + \overline{x \Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} = iC;$$

$$\Phi_0(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x); \quad \Psi_0(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x),$$

$$- \frac{1+\varepsilon}{\pi i(1+k_0)} \int_{L_1} \{ g_1(t_1) [i \zeta(it-iy) - i \overline{\zeta(it-iy)}] + \overline{g_1(t_1)} [i Q(it-iy) + \\ + (it-iy) \overline{\gamma(it-iy)} - i \overline{\zeta(it-iy)}] \} dt_1 + N(y) = iC_1,$$

где  $N(y) = \varepsilon \Phi_s(iy) + \overline{\Phi_s(iy)} + iy \Phi_s'(iy) + \overline{\Psi_s(iy)},$

$$\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x); \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x).$$

Сингулярные интегральные уравнения и алгебраические системы уравнений (24), (25) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить напряженно-деформированное состояние изгибаемой пластины.

Для определения постоянных  $C$  и  $C_1$  были использованы соотношения [4]:

$$\operatorname{Re} \int_{-\lambda_1}^{-\ell} \bar{t} g(t) dt = 0; \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda_1}^{\ell} \bar{t} g(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{-a}^{-r} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \operatorname{Re} \int_r^a \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0,$$

Удовлетворяя этим условиям, обеспечивающих равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов  $L$  и  $L_1$ , находим, что

$$C = 0; \quad C_1 = 0.$$

Чтобы решить каждое сингулярное интегральное уравнение, воспользуемся разложением функций  $\zeta(z)$ ,  $\gamma(z)$  и  $Q(z)$  в основном параллелограмме периодов. Используя замену переменных, каждое сингулярное интегральное уравнение приводится к стандартному виду. Затем, применяя процедуру алгебраизации [3 – 5] вместо каждого интегрального уравнения получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^M b_{mk} p_k^0 + \frac{1}{2} N(\eta_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad \sum_{v=1}^M b_{mv} R_v^0 + \frac{1}{2} N_*(\eta_m) = 0, \quad (27)$$

где 
$$b_{mk} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\eta_k, \tau_m) \right].$$

К системе (27) необходимо присоединить дополнительные условия (15), которые в дискретной форме примут следующий вид

$$\sum_{k=1}^M \frac{p_k^0}{\sqrt{d(\tau_k + 1) + h_1^2}} = 0, \quad d = \frac{1}{2}(1 - h_1^2), \quad \sum_{v=1}^M \frac{R_v^0}{\sqrt{(1 - \lambda_2^2)/2(\tau_v + 1) + \lambda_2^2}} = 0. \quad (28)$$

Системы (27) – (28) являются связанными с бесконечными системами (25), (26), в которых вместо  $B_{2k}^0$  и  $B'_{2k}$  подставлены соотношения в виде интегральных сумм. Упомянутые три системы полностью определяют решение задачи изгиба пластины. После нахождения приближенных значений  $p_k^0$ ,  $R_v^0$  искомым функций в узловых точках вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений (моментов) [6].

**3. Численные результаты и их анализ.** Для нахождения искомым величин совместно решались линейные алгебраические системы (25) – (28). Использовался метод урезания алгебраических систем. Для численной реализации изложенного способа проводились расчеты. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами  $M_y^\infty (M_x^\infty = 0)$  и всесторонний изгиб моментами  $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$ . Урезанные системы уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $M$  в зависимости от радиуса отверстий.

Проводились расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений. Для одностороннего изгиба найдено, что

$$K_I^{\lambda_1} = \frac{6M_y^\infty \sqrt{\pi \ell}}{h^2} \sqrt{\frac{1 - h_1^2}{h_1}} F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^\ell = \frac{6M_y^\infty \sqrt{\pi \ell}}{h^2} \sqrt{1 - h_1^2} F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a);$$

$$K_I^r = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{1 - \lambda_2^2}{\lambda_2}} F_3(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^a = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{1 - \lambda_2^2} F_4(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a).$$

В табл. 1 даны для квадратной решетки результаты расчетов функций  $F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$ ,  $F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  при изменении расстояния  $\lambda_1$ . Длина трещины в расчетах бралась постоянной  $\ell - \lambda_1 = 0,3$ ;  $a - r = 0,25$ .

В случае всестороннего равномерного изгиба пластины для коэффициентов интенсивности напряжений получены следующие соотношения

$$K_I^{\lambda_1} = \frac{6M_0 \sqrt{\pi \ell}}{h^2} \sqrt{\frac{1 - h_1^2}{h_1}} F_1'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^\ell = \frac{6M_0 \sqrt{\pi \ell}}{h^2} \sqrt{1 - h_1^2} F_2'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a);$$

$$K_I^r = \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{1 - \lambda_2^2}{\lambda_2}} F_3'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^a = \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{1 - \lambda_2^2} F_4'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a).$$

В табл. 2 представлены результаты вычислений функций  $F_1'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  и  $F_2'(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  при изменении параметров  $\lambda_1, r, a$ .

**Таблица 1.** Значения функций  $F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  и  $F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  для квадратной сетки отверстий, заполненных включениями, при одностороннем изгибе

$\lambda$		$\lambda_1$							
		0,21	0,25	0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,49
0,2	$F_1(\lambda, \lambda_1, \ell)$	1,2034	0,9519	0,8651	0,8269	0,8419	0,8724	0,9076	0,9872
	$F_2(\lambda, \lambda_1, \ell)$	1,0561	0,9718	0,9907	1,0421	1,0742	1,0961	1,1079	1,243
$\lambda$		$\lambda_1$							
		0,31	0,35	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59
0,3	$F_1(\lambda, \lambda_1, \ell)$	3,2481	1,5712	1,2783	1,1483	1,0891	1,1297	1,1491	1,1671
	$F_2(\lambda, \lambda_1, \ell)$	1,5171	1,4884	1,2513	1,2319	1,2007	1,2163	1,2715	1,3018

**Таблица 2.** Значения функций  $F'_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  и  $F'_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$  в случае всестороннего равномерного изгиба пластины

$\lambda$		$\lambda_1$							
		0,21	0,25	0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,49
0,2	$F'_1(\lambda, \lambda_1, \ell)$	1,7203	1,5918	1,2784	1,1647	1,2043	1,2349	1,2719	1,3102
	$F'_2(\lambda, \lambda_1, \ell)$	1,5713	1,4706	1,4519	1,4016	1,3941	1,3602	1,3849	1,4219
$\lambda$		$\lambda_1$							
		0,31	0,35	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59
0,3	$F'_1(\lambda, \lambda_1, \ell)$	4,1479	3,4918	3,2979	3,0881	3,3102	3,6718	3,7507	3,7981
	$F'_2(\lambda, \lambda_1, \ell)$	2,9179	2,0981	1,9307	1,8763	1,9235	2,0184	2,1673	2,3152

Л и т е р а т у р а

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
3. Мирсалимов В.М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
5. Ladopoulos E.G. Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering, New York, Berlin: Springer Verlag, 2000. – 547 p.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

References

1. Muskhelishvili, N.I. (1977). Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Amsterdam: Kluwer, 707 p.
2. Grigolyuk, E.I., Filshhtinskii L.A. (1970). Perforated plates and Shells. Moscow: Nauka, 556 p.
3. Mirsalimov, VM (1987). Non-one Dimensional Elastoplastic Problems. Moscow: Nauka, 256 p.
4. Savruk M.P. (1981) Two-Dimensional Problem of Elasticity for Bodies with Cracks. Kiev: Naukova Dumka, 324 p.
5. Ladopoulos E.G. (2000). Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering, New York, Berlin: Springer Verlag, 547 p.
6. Cherepanov G.P. (1979). Mechanics of Brittle Fracture. New York, Mc Graw-Hill, 259 p.

**INFLUENCE OF ALIEN ELASTIC INCLUSIONS ON GROWTH OF DOUBLY PERIODIC SYSTEM OF THE RECTILINEAR CRACKS IN THE BEND THIN PLATE**

B.B. Kazbekov

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

Interaction of alien elastic inclusions soldered in circular holes of the isotropic elastic plate weakened by doubly periodic system of rectilinear through cracks is considered. Crack faces are free from external loadings, and the plate is exposed to a homogeneous bending by equally distributed moments.

KEYWORDS: perforated plate, alien elastic inclusions, doubly periodic system of rectilinear cracks, bending.