

**МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Ф.С. ХАЙРУЛЛИН, доктор физико-математических наук, доцент,
О.М. САХБИЕВ, инженер,
Казанский национальный исследовательский технологический университет,
420029, Казань, Сибирский тракт 12, кафедра теоретической механики и со-
противления материалов; X_farid@mail.ru, somkazan@yandex.ru,

*В работе предлагается вариационный метод расчета трехмерных упругих конст-
рукций, основанный на использовании функций с конечными носителями произвольной
степени аппроксимации, позволяющих определять напряженно- деформированное
состояние конструкций с криволинейными граничными поверхностями, а также
составных конструкций.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вариационный метод, трехмерные конструкции, напряжен-
ное состояние, аппроксимация.

Для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы используется в основном методом конечных элементов [1-2]. В работе излагается вариационный метод расчета трехмерных конструкций, который позволяет определять напряженно-деформированное состояние конструкций с криволинейными граничными поверхностями, а также

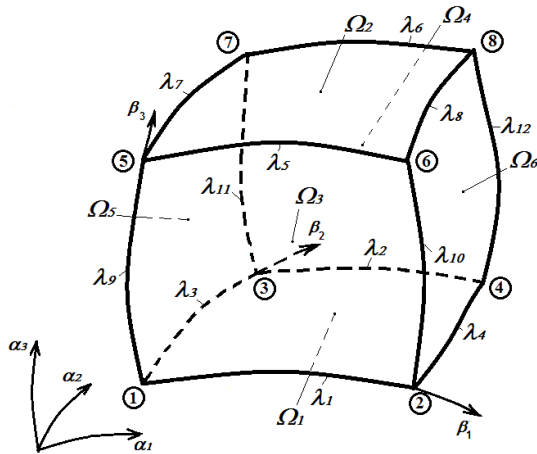


Рис.1

составных конструкций. Данный метод основан на методе расчета тонких оболочек, предложенном в работе [3]. Рассмотрим деформацию трехмерной конструкции, ограниченной кусочно-гладкими поверхностями. Предполагается, что перемещения и деформации малы, материал тела изотропен, справедлив закон Гука. Конструкция разбивается на подобласти V_k в виде шестигранников (рис. 1) с криволинейными гладкими гранями $\Omega_i, i = \overline{1,6}$, которые в ортогональной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ описываются уравнениями $\alpha_3 = F_1(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3 = F_2(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_2 = F_3(\alpha_3, \alpha_1), \alpha_2 = F_4(\alpha_3, \alpha_1), \alpha_1 = F_5(\alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = F_6(\alpha_2, \alpha_3)$, где $F_i, i = \overline{1,6}$ - однозначные функции класса C^1 ; $\lambda_j, j = \overline{1,12}$ - граничные линии.

Причем уравнения граней задаются относительно соответствующих координатных плоскостей. Здесь и в дальнейшем для упрощения последующих записей у введенных величин упускаем индекс k , показывающий принадлежность к подобласти V_k , в кружечках показаны номера угловых точек (узлов).

В подобласти V_k вводится локальная криволинейная система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, связанная с системой координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F_5(\alpha_2^{15}, \alpha_3^{15})(1 - \beta_1) + F_6(\alpha_2^{16}, \alpha_3^{16})\beta_1 + \alpha_1^0, \\ \alpha_2 &= F_3(\alpha_3^{13}, \alpha_1^{13})(1 - \beta_2) + F_4(\alpha_3^{14}, \alpha_1^{14})\beta_2 + \alpha_2^0, \\ \alpha_3 &= F_1(\alpha_1^{11}, \alpha_2^{11})(1 - \beta_3) + F_2(\alpha_1^{12}, \alpha_2^{12})\beta_3 + \alpha_3^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha_2^{15} = f_{59}(g_9(s_9^0 \beta_3))(1 - \beta_2) + f_{5,11}(g_{11}(s_{11}^0 \beta_3))\beta_2 + q_{51}(\beta_2, \beta_3),$
 $\alpha_3^{15} = f_{53}(g_3(s_3^0 \beta_2))(1 - \beta_3) + f_{57}(g_7(s_7^0 \beta_2))\beta_3 + q_{52}(\beta_2, \beta_3),$
 $\alpha_2^{16} = f_{6,10}(g_{10}(s_{10}^0 \beta_3))(1 - \beta_2) + f_{6,12}(g_{12}(s_{12}^0 \beta_3))\beta_2 + q_{61}(\beta_2, \beta_3),$
 $\alpha_3^{16} = f_{64}(g_4(s_4^0 \beta_2))(1 - \beta_3) + f_{68}(g_8(s_8^0 \beta_2))\beta_3 + q_{62}(\beta_2, \beta_3),$
 $\alpha_1^0 = q_{11}(\beta_1, \beta_2)(1 - \beta_3) + q_{21}(\beta_1, \beta_2)\beta_3,$
 $q_{51}(\beta_2, \beta_3) = \left[g_3(s_3^0 \beta_2) - \alpha_{21}(1 - \beta_2) \quad -\alpha_{23}\beta_2 \right] (1 - \beta_3) +$
 $+ \left[g_7(s_7^0 \beta_2) - \alpha_{25}(1 - \beta_2) \quad -\alpha_{27}\beta_2 \right] \beta_3,$

$$\begin{aligned}
 q_{52}(\beta_2, \beta_3) &= \left[g_9(s_9^o \beta_3) - \alpha_{31}(1 - \beta_3) - \alpha_{35} \beta_3 \right] (1 - \beta_2) + \\
 &\quad + \left[g_{11}(s_{11}^o \beta_3) - \alpha_{33}(1 - \beta_3) - \alpha_{37} \beta_3 \right] \beta_2, \\
 q_{61}(\beta_2, \beta_3) &= \left[g_4(s_4^o \beta_2) - \alpha_{22}(1 - \beta_2) - \alpha_{24} \beta_2 \right] (1 - \beta_3) + \\
 &\quad + \left[g_8(s_8^o \beta_2) - \alpha_{26}(1 - \beta_2) - \alpha_{28} \beta_2 \right] \beta_3, \\
 q_{62}(\beta_2, \beta_3) &= \left[g_{10}(s_{10}^o \beta_3) - \alpha_{32}(1 - \beta_3) - \alpha_{36} \beta_3 \right] (1 - \beta_2) + \\
 &\quad + \left[g_{12}(s_{12}^o \beta_3) - \alpha_{34}(1 - \beta_3) - \alpha_{38} \beta_3 \right] \beta_2. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь для сокращения записей приведены соотношения, определяющие в формулах (1) только координату α_1 . Для остальных координат эти соотношения записываются аналогично. В соотношениях (2) $y = f_{ij}(x)$ - уравнения проекций граничных линий λ_j поверхностей Ω_i на соответствующие координатные плоскости; $x = g_j(s_j)$ - функции, определяющие координату точки на оси x по соответствующей дуговой координате s_j на линии λ_j ; s_j^o - длины дуг линий λ_j ; $\alpha_{1l}, \alpha_{2l}, \alpha_{3l}, l = \overline{1,8}$ - координаты угловых точек подобласти V_j . В этих формулах величинами x, y обозначены координаты α_1, α_2 или α_3 , которые выбираются в соответствии с задаваемой линией λ_j . Например, для линии λ_5 поверхности Ω_2 координаты $x = \alpha_1, y = \alpha_2$, уравнение граничной линии $\alpha_2 = f_{25}(\alpha_1)$. Функция $\alpha_1 = g_5(s_5)$ для точки, находящейся на линии λ_5 , имеющей дуговую координату s_5 , определяет координату на оси α_1 (рис.2).

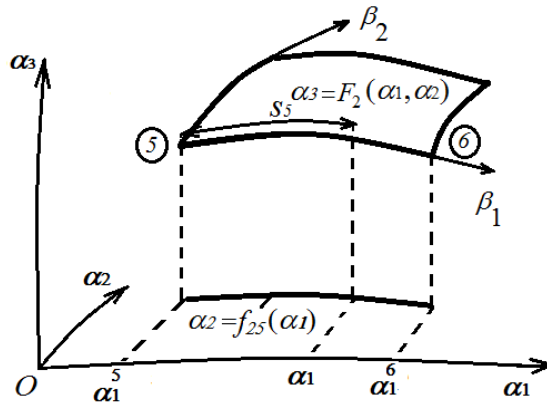


Рис.2

Система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в соответствии с соотношениями (1) - (2) выбрана таким образом, что в подобласти V_k выполняются условия $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 1$, грани Ω_i задаются уравнениями $\beta_l = 0$ или $\beta_l = 1, l = \overline{1,3}$; граничные линии λ_j задаются одной из координат $\beta_l, l = \overline{1,3}$. На гранях Ω_i уравнения (1) переходят в уравнения этих граней. Например, если в эти уравнения подставить $\beta_3 = 0$, то получаются уравнения, определяющие грань Ω_1 :

$$\alpha_1 = \alpha_1^{11}, \alpha_2 = \alpha_2^{11}, \alpha_3 = F_1(\alpha_1^{11}, \alpha_2^{11}) \quad (0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1). \quad (3)$$

На граничных линиях уравнения (1) переходят в уравнения этих линий. Например, если в уравнениях (3) задать $\beta_1 = 1$, то получается уравнение линии λ_4 :

$$\alpha_1 = f_{14}(g_4(s_4^0 \beta_2)), \alpha_2 = g_4(s_4^0 \beta_2), \alpha_3 = F_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (0 \leq \beta_2 \leq 1).$$

При решении задач предполагается, что исследуемую трехмерную конструкцию можно разбить на подобласти вида V_k . Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции используется вариационный принцип Лагранжа [4], на основании которого должно выполняться условие

$$\delta E = \sum_{k=1}^K \delta E_k(U) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} (\delta \Pi_k - \delta' W_k) d\Omega = 0, \quad (4)$$

где E – полная энергия конструкции, E_k – полная энергия подобласти V_k ; Π_k , $\delta' W_k$ – соответственно удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил единицы объема подобласти V_k ; $U = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ – вектор перемещений подобласти V_k в системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; K – количество подобластей.

В подобласти V_k компоненты перемещения аппроксимируются функциями, заданными в системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ следующим образом:

$$U(V_k) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{m_3=1}^{M_3} D_{m_1 m_2 m_3}^k t_{m_1}(\beta_1) t_{m_2}(\beta_2) t_{m_3}(\beta_3), \quad (5)$$

где $D_{m_1 m_2 m_3}^k$ – вектор неизвестных постоянных; функции формы

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, t_2(\beta_1) = \beta_1, t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1) [t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}). \quad (6)$$

На граничных поверхностях Ω_i^k подобласти V_k трехмерные полиномы (5) переходят в двумерные полиномы. Например, для грани Ω_1^k , где $\beta_3 = 0$,

$$U(\Omega_1^k) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} D_{m_1 m_2 1}^k t_{m_1}(\beta_1) t_{m_2}(\beta_2). \quad (7)$$

На граничных линиях λ_j^k двумерные полиномы вида (7) переходят в одномерные полиномы. Например, на линии λ_4^k при $\beta_1 = 1$:

$$U(\lambda_4^k) = \sum_{m_2=1}^{M_2} D_{2 m_2 1}^k t_{m_2}(\beta_2). \quad (8)$$

Если, например, для линии λ_4^k определить значения в угловых точках, то

$$U(\lambda_4^k) \Big|_{\beta=0} = D_{211}^k, U(\lambda_4^k) \Big|_{\beta=1} = D_{221}^k. \quad (9)$$

Из формул вида (7) следует, что на каждой из поверхностей Ω_i^k искомые функции определяются двумерными полиномами, зависящими только от двух криволинейных координат из трех. Эти криволинейные координаты с учетом соотношений вида (3) зависят только от уравнений, задающих поверхность Ω_i^k . Это обеспечивает непрерывность искомых функций при переходе из одной

подобласти на другую и позволяет легко выполнять геометрические граничные условия и условия стыковки искомых функций на границах подобластей V_k .

Например, если граничная поверхность Ω_2^1 (рис.1), которая является верхней гранью подобласти V_1 , стыкуется с поверхностью Ω_1^2 , которая является нижней гранью подобласти V_2 , то для обеспечения непрерывности вектора перемещений U достаточно выполнить условия $D_{m_1 m_2}^1 = D_{m_1 m_2}^2, m_1 = \overline{1, M_1}, m_2 = \overline{1, M_2}$. Если на границе Ω_3^k подобласти V_k заданы граничные условия $U = 0$, то необходимо положить $D_{m_1 m_3}^k = 0, m_1 = \overline{1, M_1}, m_3 = \overline{1, M_3}$. Если требуется выполнить стыковку подобластей по некоторой линии, например, граничная линия λ_8^1 поверхности Ω_2^1 подобласти V_1 совпадает с линией λ_3^2 поверхности Ω_1^2 подобласти V_2 , то достаточно в соответствии с формулами вида (8) удовлетворить условиям

$$D_{2 m_2}^1 = D_{1 m_2}^2, m_2 = \overline{1, M_2}.$$

Из всех неизвестных постоянных $D_{m_1 m_2 m_3}^k$, входящих в аппроксимирующую функцию (5), в соответствии с формулами вида (9) только постоянные $D_{m_1 m_2 m_3}^k, m_1 = \overline{1, 2}, m_2 = \overline{1, 2}, m_3 = \overline{1, 2}$ имеют механический смысл. Они определяют перемещения угловых точек подобласти V_k , т.е. являются узловыми значениями. Подставляя аппроксимирующие функции (5) в вариационное уравнение (4), удовлетворяя соответствующим граничным условиям и условиям стыковки подобластей, после численного интегрирования по некоторой квадратурной формуле получается система линейных уравнений относительно неизвестных постоянных $D_{m_1 m_2 m_3}^k$:

$$[K]D = P,$$

где $[K]$ - матрица жесткости конструкции, D - вектор неизвестных постоянных, составленный соответствующим образом из векторов $D_{m_1 m_2 m_3}^k$, P - вектор правой части, учитывающий действие внешних нагрузок.

Для исследования сходимости решения в таблице 1 приводятся значения максимального перемещения u_{\max} , максимального растягивающего σ_{\max}^p и максимального сжимающего σ_{\max}^c напряжений для кубика, представленного на рис. 3. Одна грань кубика, задаваемая уравнением $y = 0$, жестко закреплена, на одной из перпендикулярных к ней граней (уравнение $z = a$) действует равномерно распределенная растягивающая нагрузка интенсивности q . Расчеты получены для следующих числовых параметров: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3; a = b = 1$ см, $q = 1$ МПа.

Таблица 1

$M_1 = M_2 = M_3$	3	4	5	6	Ansys	
					10	20
$u_{\max} \cdot 10^6, \text{ см}$	1.49	1.69	1.69	1.72	1.70	1.72
$\sigma_{\max}^p, \text{ МПа}$	2.63	4.50	4.98	5.96	4.15	5.40
$\sigma_{\max}^c, \text{ МПа}$	-3.14	-5.22	-6.06	-7.35	-4.94	-6.67

Максимальное перемещение возникает в точке A по направлению оси z , максимальное растягивающее напряжение – в точке D по направлению оси y , максимальное сжимающее напряжение – в точке B по направлению оси y , т.е.

$$u_{\max} = u_z^A, \sigma_{\max}^p = \sigma_{yy}^D, \sigma_{\max}^c = \sigma_{yy}^B.$$

Для подтверждения достоверности результатов в последних двух столбцах представлены соответствующие величины, полученные с помощью пакета программ «Ansys». В первом столбце приведены результаты, которые получены при линейной аппроксимации компонент перемещений на сетке $10 \times 10 \times 10$, во втором столбце – на сетке $20 \times 20 \times 20$.

В табл. 2 приводятся результаты расчета той же самой конструкции, когда принимались следующие геометрические размеры: $a = 10 \text{ см}$, $b = 100 \text{ см}$, т.е. рассматривалась балка. Конструкция разбивалась на два элемента по сечению $y = 10 \text{ см}$.

Приведены значения напряжений σ_{yy} на нижней поверхности балки в двух точках для двух поперечных сечений: в заделке ($y = 0$) и в середине балки ($y = 50 \text{ см}$). В последней строке приведены значения напряжений, полученные методами сопротивления материалов [5].

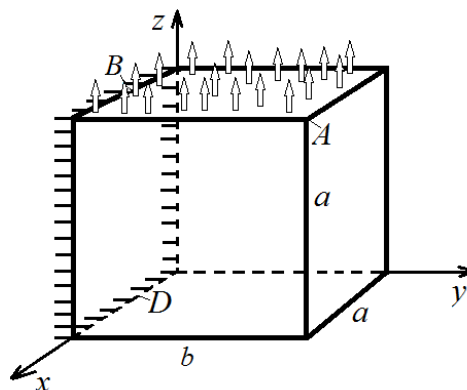


Рис. 3

Таблица 2

$M_1 \times M_2$	$y = 0$		$y = 50 \text{ см}$	
	$x = 5 \text{ см}$	$x = 10 \text{ см}$	$x = 5 \text{ см}$	$x = 10 \text{ см}$
2x4	309	309	88.8	88.8
3x4	300	367	89.5	89.7
4x4	346	389	89.3	89.4
2x5	304	304	75	75
3x5	284	375	75	75.2
4x5	349	404	74.7	74.9
5x5	376	451	74.8	75
2x6	301	301	75	75
3x6	273	378	74.9	75.1
4x6	355	411	74.7	74.8
5x6	389	482	74.7	74.8
6x6	424	501	74.8	74.8
[4]	300	300	75	75

Как видно из представленных результатов уже при порядке аппроксимирующей функции 2x5 (т.е. в поперечном сечении балки искомые функции аппроксимируются линейными функциями) получается решение, совпадающее с решением, найденным методами сопротивления материалов. При увеличении порядка аппроксимирующей функции в поперечном сечении балки напряжения в заделке ($y=0$) начинают возрастать, т.е. приведенное решение улавливает концентрацию напряжений. Причем в угловой точке ($x = 10 \text{ см}$) напряжения выше, чем посередине поперечного сечения балки ($x = 5 \text{ см}$). В точках удаленных от заделки ($y = 50 \text{ см}$) напряжения совпадают с решением, полученным методами сопротивления материалов.

Л и т е р а т у р а

1. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
3. *Хайруллин Ф.С.* Метод расчета тонких оболочек сложной формы// Известия РАН. Механика твердого тела. - 1998, № 3. - С. 30 - 33.
4. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
5. *Феодосьев В.И.* Сопrotivление материалов. - М.: Наука, 1979. – 560 с.

References

1. *Gallagher, R.* (1984). *Metod Konechnih Elementov. Osnovi.* – М.: “Mir”, 428 p.
2. *Zenkevich, O.* (1975). *Metod Konechnih Elementov v Tehnike.* – М.: “Mir”, 511 p.
3. *Khayrullin, F.S.* (1998). A Method of Analysis of Thin Shells of Complex Form, *Izvestia RAN. Mehanika Tverdogo Tela*, № 3, p. 30-33.
4. *Abovskii, N.P., Andreev, N.P., Deruga, A.P.* (1978). *Variazionnii Prinzipi Teorii Uprugosti i Teorii Obolochek*, Moscow: “Nauka”, 288 p.
5. *Pheodosiev, V.I.* (1979). *Soprotivlenie materialov*, Moscow: “Nauka”, 560 p.

**A METHOD OF DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE
OF 3D STRUCTURES OF COMPLEX FORM**

Khayrullin F. S, Sahbiev O.M.

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

In the article, the variation method of definition of the tense-deformed condition of three-dimensional constructions is offered which based on using of functions with final carriers of any extent of approximation that allows making calculations of constructions with curvilinear boundary surfaces, and also compounding constructions.

KEYWORDS: three-dimensional constructions, variation method, tense condition, approximation.

