

Численные методы расчета конструкций

АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ С ЛОКАЛЬНЫМ УГЛУБЛЕНИЕМ

С.Н. ЯКУПОВ, к.т.н., старший научный сотрудник,

Т.Р. НАСИБУЛЛИН, инженер - исследователь

ИММ КазНЦ РАН, Казань

Для определения концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций с локальными углублениями или дефектами необходимо использовать трехмерный подход. Для оболочек и панели выполнен анализ концентрации напряжений с локальным углублением. Исследовано влияния конечно элементного разбиения панели на получаемый результат, а также концентрация напряжений для панели от типа материала: модель Гука и модель Нео-Гука (резиноподобный материал).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сферическая и цилиндрическая оболочки, плоская панель, локальное углубление, трехмерные конечные элементы, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений, модель Гука, модель Нео-Гука, сетка разбиения.

Введение. Для обеспечения безопасной работы конструкций и сооружений необходимо совершенствовать каждый этап его создания: проектирование и создание материала, проектирование архитектуры конструкции и сооружений с учетом условий эксплуатации, разработка технологии изготовления элементов и конструкций в целом и т.д. Важную роль в этой цепочке играет оценка уровня напряжений в элементах конструкций. Наряду с внутренними дефектами в структуре материала, наличие различных предусмотренных и непредусмотренных конструктивных углублений в элементах конструкций приводит к концентрации напряжений в этой области, что может стать причиной разрушения конструкций [1-6]. Теоретическим коэффициентом концентрации напряжений называется отношение наибольшего местного напряжения σ_{max} к номинальному напряжению σ [3]:

$$k = \sigma_{max} / \sigma$$

Любые физические объекты, конструкции и сооружения, окружающие нас, являются трехмерными телами, поэтому при строгой постановке их надо рассматривать в трехмерной постановке. Напряжения в окрестности отверстия не могут быть определены методами сопротивления материалов [3], т.е. по одномерной схеме расчета. Обычно для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) гладких тонкостенных элементов конструкций под действием равномерного давления используют оболочечные теории – задачу определения НДС сводят к двумерной схеме расчета. Задача определения напряжения в окрестности отверстия, возможно, впервые была решена методами теории упругости [7], в предположении, что длина и ширина пластины безгранично велики, а отверстие имеет конечный диаметр. Вопросы концентрации напряжений в однородном листе с центрально расположенным круговым отверстием при одноосном растяжении плоскими конечными элементами рассмотрено в статье [8]. При наличии локальных утонений и углублений или несквозных дефектов в тонкостенных конструкциях (при наличии геометрических концентраторов напряжений [3]), а также в области локальных креплений и районе приложения сосредоточенных нагрузок (при наличии силовых концентраторов напряжений [3]) возникает необходимость обращения к трехмерному подходу.

Для анализа концентрации напряжений тонкостенных элементов конструкций в трехмерной постановке можно использовать известные программные

комплексы, например ANSYS, в которой имеются трехмерные элементы с квадратичной аппроксимацией искомым переменных.

Также для расчета тонкостенных конструкций сложной геометрии в трехмерной постановке можно использовать сплайновый вариант МКЭ [9-12]. В этих работах описывается подход моделирования напряженно-деформированного состояния тела трехмерными конечными элементами, базирующегося на идеях предварительной параметризации рассматриваемой области параметрами единичного куба и метода конечных элементов с аппроксимацией искомым переменных интерполяционными эрмитовыми кубическими сплайнами во всех трех направлениях. Сплайновый вариант МКЭ обеспечивает непрерывность полей перемещения и его первых производных в рассматриваемом пространстве исследуемого тела, что позволяет получать необходимые результаты при небольшом разбиении (количестве конечных элементов).

Представляет практический интерес влияния типа материала на концентрацию напряжений вблизи дефекта в элементах конструкций. Если в элементах конструкций из пластичных материалов в окрестности концентратора образуется локальная зона пластических деформаций и происходит некоторое перераспределение (выравнивание) местных напряжений, то несущая способность элементов конструкций из высокопрочных материалов резко снижается [3].

Представляет интерес и влияния концентраторов напряжений на несущую способность элементов конструкций при нелинейно упругом деформировании, например, из эластомеров. Для резиноподобных материалов на сегодняшний день существует около десяти потенциалов [13-21].

Трехмерными элементами определены напряженно-деформированные состояния упругих (модель Гука) сферических и цилиндрических оболочек с локальными утонениями [9-12], на результатах этих исследований выполнен анализ концентрации напряжений в дефектных областях. Определена также концентрация напряжений в плоской панели с локальным углублением для двух типов материала: по модели Гука и по модели Нео-Гука (резиноподобный материал).

Сферическая и цилиндрическая оболочки

Сферическая оболочка под действием внутреннего избыточного давления $P = 10$ МПа внутренним диаметром $D_{bn} = 200$ см толщиной $h = 1,5$ см с отверстиями в области полюсов диаметром $d = 12,56$ см и углублением в области экватора [11]. Модуль упругости $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Оболочка разбита на 144 элемента: 2 элемента по толщине, 9 элементов по φ и 8 элементов по θ (всего 243 узлов). Разбиение по окружной координате: $t^2 = -\pi; -0,75\pi; -0,5\pi; -0,25\pi; -0,1\pi; 0,1\pi; 0,25\pi; 0,5\pi; 0,75\pi; \pi$. Разбиение по меридиональной координате $t^3 = -0,48\pi; -0,375\pi; -0,25\pi; -0,125\pi; 0; 0,125\pi; 0,25\pi; 0,375\pi; 0,48\pi$. Геометрические параметры углубления: $62,8$ см \times $78,5$ см с центром $\varphi = 0$ и $\theta = 0$; глубина: $0,5$ см; $0,75$ и 1 см.

Решение задачи проводилось сплайновым вариантом МКЭ. В табл. 1 приведены значения максимальных концентраций окружных напряжений $k^{\sigma_{22}} = \sigma_{def}^{\sigma_{22}} / \sigma^{\sigma_{22}}$ под утонённой областью при $t^2 = 0$; $t^3 = \pm 0,0312\pi$.

Таблица 1. Коэффициенты концентрации напряжений $k^{\sigma_{22}}$

Глубина дефекта		
$t_{def} = 0,5$ см	$t_{def} = 0,75$ см	$t_{def} = 1,00$ см
1,58	2,12	3,04

Для сферической оболочки максимальные напряжения возникают вблизи дефектной поверхности и смещены от экватора на $\pm 0,0312 \pi$. При этом с увеличением глубины дефекта в два раза концентрация напряжений возрастает почти в два раза. Отметим, что для плоской пластины с центральным сквозным отверстием концентрация напряжений равна 3.

Цилиндрическая оболочка под действием внутреннего избыточного давления $P = 10$ МПа наружным диаметром $D_n = 82$ см толщиной $h = 0,9$ см и углублением [12]. Модуль упругости $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Оболочка разбита на 80 элементов: 1 элемент по толщине, 8 элементов по длине и 10 элементов по окружности. Разбиение по окружной координате: $t^2 = 0, 0,25\pi, 0,5\pi, 0,75\pi, 0,875\pi, \pi, 1,125\pi, 1,25\pi, 1,5\pi, 1,75\pi, 2\pi$. Разбиение по длине: $t^3 = 0, 20$ см, 40 см, 50 см, 60 см, 70 см, 80 см, 100 см, 120 см. Геометрические параметры углубления: диаметр 21,4 см; глубина: 0,18 см; 0,27 см и 0,36 см.

Решение задачи проводилось сплайновым вариантом МКЭ. В табл. 2 приведены значения максимальных концентраций окружных напряжений $k^{\sigma^{22}} = \sigma_{\text{def}}^{\sigma^{22}} / \sigma^{\sigma^{22}}$ в области утонения.

Таблица 2. Коэффициенты концентрации напряжений $k^{\sigma^{22}}$

Глубина дефекта		
$t_{\text{def}} = 0,18$ см	$t_{\text{def}} = 0,27$ см	$t_{\text{def}} = 0,36$ см
1,232	1,384	1,568

Для цилиндрической оболочки максимальные напряжения возникают под дефектом. При этом с увеличением глубины дефекта в два раза концентрация напряжений возрастает в 1,27 раза.

Можно отметить, что для рассмотренных объектов при глубине дефекта равной 1/3 коэффициент концентрации для сферической оболочки на 9,3% превышает коэффициент концентрации для цилиндрической оболочки.

Плоская панель: панель (рис.1) длиной $l = 20$ см, шириной $b = 10$ см, толщиной $h = 2$ см с центральным односторонним локальным углублением (дефектом) с параметрами – в плане 0,15см x 0,15 см; глубина: 0,025 см; 0,05 см; 0,075 см; 0,1 см. Вдоль продольной оси ox на торцы панели действует распределенная нагрузка $q = 200$ Н/см² (суммарная сила $P = 4000$ Н). В качестве материала рассмотрены два разных вида материала – модель Гука (Сталь): $\eta = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; модель Нео-Гука (резиноподобный материал): $\mu = 0,4225$ Н/мм²; $K = 5$ Н/мм².

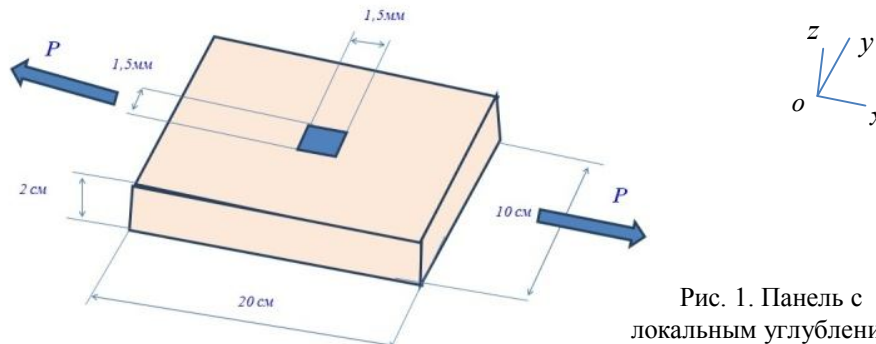


Рис. 1. Панель с локальным углублением

Расчетная схема. Решение задачи проводилось методом конечных элементов на базе учебного варианта пакета прикладных программ ANSYS. В силу симметрии относительно осей ox и oy была рассмотрена только четверть пане-

ли. На плоскости симметрии накладывались ограничения на передвижение относительно оси симметрии. При решении был использован конечный элемент SOLID186 (двадцати узловой конечный элемент). На рис.2 приведена четверть панели со схемой разбиения. На рис. 3 приведен график сходимости решения от степени разбиения. Исследование сходимости решения в зависимости от разбиения на конечные элементы выполнялось в следующем порядке: задавалось первоначальное разбиение и определялось максимальное напряжение в области дефекта. Затем увеличивалось разбиение и определялось максимальное напряжение для этого разбиения: плотность выбранной первоначальной сетки на каждом шаге увеличивалась на 10% на первых 10

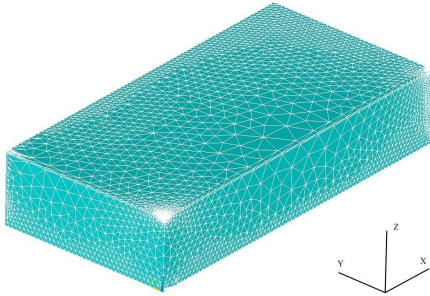


Рис. 2. Схема разбиения на КЭ

шагах и затем увеличивалась на 50%, когда наблюдается сходимость решения – начиная с некоторого разбиения, не происходит изменения максимальных напряжений (рис. 3). Минимальная сетка – схема разбиения на конечные элементы, при котором наблюдается сходимость решения, используется дальнейших расчетах.

Численные результаты. Для анализа влияния глубины дефекта, а также материала панели на НДС панели был выполнен цикл расчетов. На рис. 4-11 представлены интенсивности напряжений σ_i в Н/м² для рассмотренной панели в зависимости от глубины и типа материала: слева по модели Нео-Гука (рис.4, 6, 8 и 10), а справа по модели Гука (рис.5, 7, 9 и 11).

В табл. 3 и 4 приведены концентрации напряжений и максимальные величины интенсивности напряжений для моделей Нео-Гука и Гука, соответственно, в зависимости от глубины дефекта.

панели со схемой разбиения. На рис. 3 приведен график сходимости решения от степени разбиения. Исследование сходимости решения в зависимости от разбиения на конечные элементы выполнялось в следующем порядке: задавалось первоначальное разбиение и определялось максимальное напряжение в области дефекта. Затем увеличивалось разбиение и определялось максимальное напряжение для этого разбиения: плотность выбранной первоначальной сетки на каждом шаге увеличивалась на 10% на первых 10

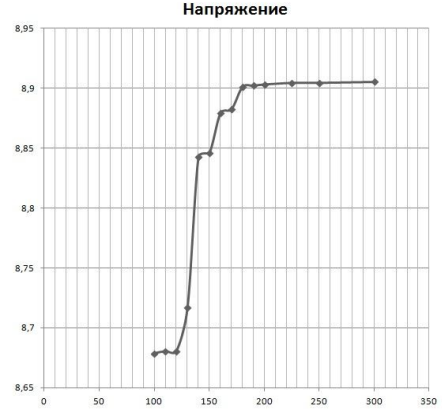


Рис. 3. Сходимость от разбиения на КЭ

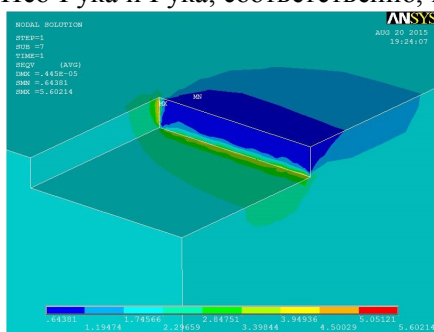


Рис. 4. σ_i (Н/м²), $h = 0,25$ мм, Нео-Гук

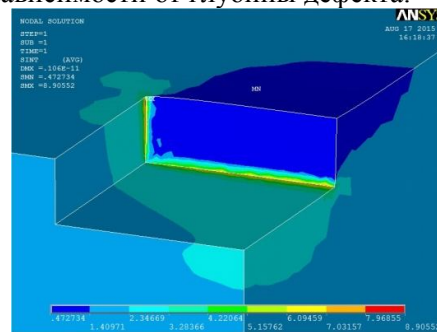


Рис. 5. σ_i (Н/м²), $h = 0,25$ мм, Гук

Таблица 3. Коэффициенты концентрации напряжений (модель Нео-Гука)

	Глубина дефекта			
	$h = 0,25$ мм	$h = 0,5$ мм	$h = 0,75$ мм	$h = 1$ мм
$k_{\sigma}^{11} = k_{\sigma}^x$	2,20	2,92	3,17	3,21
Max σ , МПа	5,602	5,842	6,342	6,419

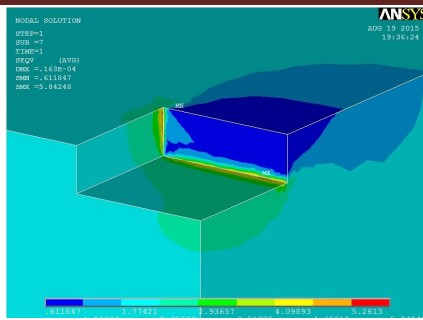


Рис. 6. σ_i (Н/м²), $h = 0,5$ мм, Нео-Гук

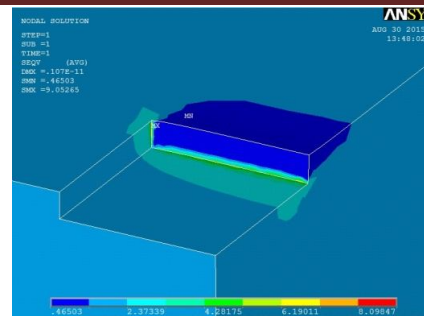


Рис. 7. σ_i (Н/м²), $h = 0,5$ мм, Гук

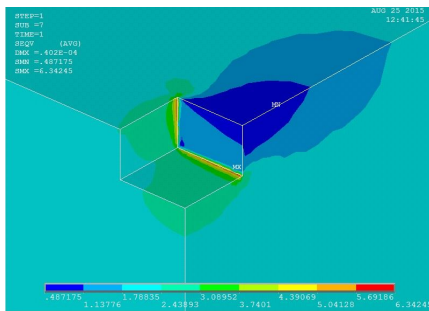


Рис. 8. σ_i (Н/м²), $h = 0,75$ мм, Нео-Гук

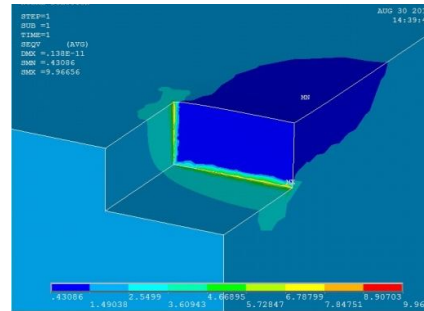


Рис. 9. σ_i (Н/м²), $h = 0,75$ мм, Гук

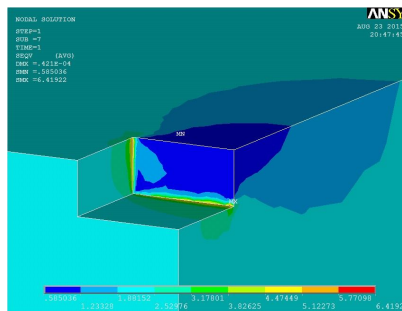


Рис. 10 – σ_i (Н/м²), $h = 1,0$ мм, Нео-Гук

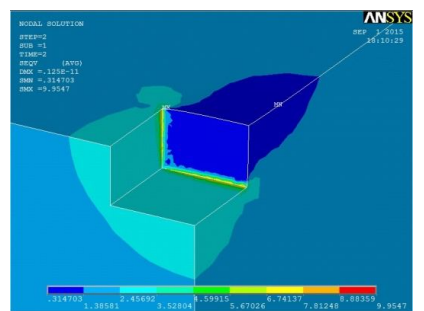


Рис. 11 – σ_i (Н/м²), $h = 1,0$ мм, Гук

Таблица 4. Коэффициенты концентрации напряжений (модель Гука)

	Глубина дефекта			
	$h = 0,25$ мм	$h = 0,5$ мм	$h = 0,75$ мм	$h = 1$ мм
$k_{\sigma}^{11} = k_{\sigma}^x$	4,45	4,50	5,00	5,00
Max σ , МПа	8,906	9,053	9,967	9,955

Выводы:

1. В области углублений возникают концентрации напряжений.
2. С увеличением глубины дефекта величина концентрации напряжений возрастает.
3. В сферических оболочках концентрация напряжений больше концентрации напряжений в цилиндрической оболочке.
4. В плоских панелях с локальным углублением концентрация напряжений выше, чем для панелей со сквозным дефектом – эффект трехмерности.
5. Начиная с некоторой сетки разбиения результаты не уточняются.
6. Концентрации напряжений σ_i в панели по модели Гука в 1,55 - 1,59 раз превышает концентрации напряжений в панели по модели Нео-Гука.

Л и т е р а т у р а

1. *Neuber H.* Theory of Notch Stress. – Ann Arbor, Mich.: J.W. Edwards, 1946.
2. *Grover H.J., Gordon S.A. and Jackson L.R.* Fatigue of metals structures. – Thames and Hudson. – 1956.
3. *Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т.3. – М.: ГНТИ Машиностроительной литературы, 1959. – 1119 с.
4. *Peterson R.E.* Stress Concentration Factors. – New York: J. Wiley & Sans, 1974.
5. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention. – The Ohio State University. New York: J. Wiley & Sans, 1981. – 624 с.
6. *Якупов Н.М.* Механика: проблема - идея - практика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2010. – 161 с.
7. *Kirsch G.* Die Theorie der Elasticitat und die Bedurfnisse der Festigkeitlehre. – «VDI Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure». Bd. 32, 1898.
8. *Segal A., Klosner J.M.* Stress concentration in an elastomeric sheet subject to large deformations. – PIBAL Rep. 70-11. Polytechnic Inst. of Brooklyn, March. 1970. – 11 p.
9. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х.* Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – №1. – С.145-154.
10. *Кантюков Р.А., Якупов Н.М., Тамеев И.М., Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Кантюков Р.Р.* Моделирование напряженно - деформированного состояния цилиндрического тела с локальным углублением трехмерными конечными элементами // Наука и техника в газовой промышленности. – 2012. – №2. – С.53-60.
11. *Якупов С.Н., Киямов И.Х.* Analysis of the mode of deformation of spherical covers three-dimensional elements // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2014. – No 2. – P.76-80.
12. *Кантюков Р.А., Якупов Н.М., Тамеев И.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Кантюков Р.Р.* Концентрация напряжений в трубе с протяженным углублением // Газовая промышленность. – 2013. – №7. – С.28-30.
13. *Трелоар Л.Р.Г.* Физика упругости каучука. – М.: Изд-во «Иностранная литература», 1953. – 336с.
14. Расчеты на прочность в машиностроении. Т.2. – Изд-во «Машгиз», 1958. –944с.
15. *Green A.E., Zerna W.* Theoretical elasticity. –Oxford University Press, Oxford, 1960.
16. *Klosner J.M., Segal A.* Mechanical characterization of a natural rubber. – PIBAL Rep. 69-42. Polytechnic Inst. of Brooklyn, N.Y. 1969. – 42 p.
17. *Oden J.T.* Finite elements of nonlinear continua. – McGraw-Hill BOOK COMPANY. 1972 (Дж. Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Изд-во «Мир», 1976. – 464 с.).
18. *Oden J.T., Key J.E.* Numerical analysis of finite axisymmetric deformation of incompressible elastic solids of revolution// Int. J. Solids Struct. – 1970. – № 6. – P. 497-518.
19. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Изд-во «Машиностроение», 1986. – 216 с.
20. *Simo J.C., Laursen T.A.* An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction// Comput. and Structures. – 1992. – Vol. 42, N 1. – P. 97-116.
21. *Галимов Н.К., Якупов С.Н.* К определению упругого потенциала сферических резиновых мембран // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – № 4. – С.74-76.

Reference

1. *Neuber, H.* (1946). *Theory of Notch Stress*, Ann Arbor, Mich.: J.W. Edwards.
2. *Grover, H.J., Gordon, S.A. and Jackson, L.R.* (1956). *Fatigue of Metals Structures*, Thames and Hudson.
3. *Ponomarev, S.D., Biderman, V.L., et al* (1959). *Raschety na Prochnost v Mashinostroenii*, Vol. 3, Moscow: GNTI Mashinostroitel'noy literatury, 1119 p.
4. *Peterson, R.E.* (1974). *Stress Concentration Factors*, New York: J. Wiley & Sans.
5. *Collins, J.A.* (1981). *Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention*, The Ohio State University, New York: J. Wiley & Sans, 624 p.
6. *Yakupov, N.M.* (2010). *Mehanika – Problema – Ideya – Praktika*, Kazan: Kaz. Gos. Un-t, 161 p.
7. *Kirsch, G.* (1898). *Die Theorie der Elasticitat und die Bedurfnisse der Festigkeitlehre*, «VDI Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure», Bd. 32.

8. Segal, A., Klosner, J.M. (1970). Stress concentration in an elastomeric sheet subject to large deformations, PIBAL Rep. 70-11. Polytechnic Inst. of Brooklyn, March. 1970, 11 p.
9. Yakupov, N.M., Kiyamov, H.G., Yakupov, S.N., Kiyamov, I.H. (2011). The Modelling of elements of structures of complex geometry by three-dimensional finite elements, *Mehanika kompozitsionnyh Materialov i Konstruktsiy*, №1, p.145-154.
10. Kanyukov, R.A., Yakupov, N.M., Tameev, I.M., Yakupov, S.N., Kiyamov, H.G., Kanyukov, R.R. (2012). The modelling of stress-strain state of cylindrical body with local in-depth by 3D finite elements, *Nauka i Tehnika v Gazovoy Promyshlennosti*, № 2, p. 53-60.
11. Yakupov, S.N., Kiyamov, I.H. (2014). Analysis of the mode of deformation of spherical covers three-dimensional elements, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 2, p. 76-80.
12. Kanyukov, R.A., Yakupov, N.M., Tameev, I.M., Kiyamov, H.G., Yakupov, S.N., Kanyukov, R.R. (2013). Concentration of stresses in a pipe with long in-depth, *Gazovaya Promyshlennost*, №7, p. 28-30.
13. Treloar, L.R.G. (1953). *Physics of Elasticity of Rubber*, M: Izd-vo "Inostran. Literatura", 336 p.
14. *Raschety na Prochnost v Mashinostroenii* (1958), Vol. 2, Izd-vo "Mashgiz", 944 p.
15. Green, A.E., Zerna, W. (1960). *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press, Oxford.
16. Klosner, J.M., Segal, A. (1969). Mechanical characterization of a natural rubber, PIBAL Rep. 69-42. Polytechnic Inst. of Brooklyn, N.Y., 42 p.
17. Oden, J.T. (1972). *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill BOOK COMPANY. 464 p..
18. Oden, J.T., Key, J.E. (1970). Numerical analysis of finite axisymmetric deformation of incompressible elastic solids of revolution, *Int. J. Solids Struct.*, № 6, p. 497-518.
19. Chernyh, K.F. (1986). *Nelineynaya Teoriya Uprugosti v Mashinostroitel'nyh Raschotah*, Izd-vo "Mashinostroenie", 216 p.
20. Simo, J.C., Laursen, T.A. (1992). An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. and Structures*, Vol. 42, N 1, p. 97-116.
21. Galimov, N.K., Yakupov, S.N. (2012). On the determination of elastic potential of spherical rubber membranes, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p.74-76.

ANALYSIS OF THE STRESS CONCENTRATION IN THIN-WALLED ELEMENTS OF STRUCTURES WITH LOCAL IN-DEPTH

S.N. Yakupov, T.R. Nasibullin

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences

One must use a three-dimensional approach to determine the concentration of stresses in thin-walled elements of structures with local deepening or defects. The stress concentration is analyzed for shells and panels with local deepening. The authors investigated the effect of the finite element partition of a panel on the results and the concentration of the stress for the panels made from the different type of material: the model of Hooke and the model of Neo-Hooke (rubber-like material).

KEYWORDS: spherical shell, cylindrical shell, plane model, local in-depth, 3D finite element, stress-strain state, concentration of stress, the model of Hooke, the model of Neo-Hooke.

