

## Динамика конструкций и сооружений

### ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРАВИЛЬНЫХ N-УГОЛЬНЫХ, ТРЕУГОЛЬНЫХ И РОМБИЧЕСКИХ ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТНОШЕНИЯ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ В КАЧЕСТВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА<sup>1</sup>

А.А. ЧЕРНЯЕВ, аспирант

Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс,  
г. Орел, ул. Московская, д. 77; Chernyev87@yandex.ru

*Для определения основной частоты собственных колебаний упругих изотропных правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок предлагается использовать единую для всех расчетную функцию одной переменной. В качестве этой переменной выступает новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач строительной механики – безразмерная геометрическая характеристика формы плоской области – отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** динамический расчет пластинок, основная частота собственных колебаний, правильные n-угольные, треугольные, ромбические пластинки, отношение конформных радиусов, геометрические методы строительной механики.

**Состояние проблемы и постановка задачи.** Проблема обеспечения эксплуатационной надежности (прочности, жесткости и устойчивости) любых конструкций связана с всесторонними расчетами, как на статические, так и динамические воздействия. Нормы [1] устанавливают предельные значения основной частоты собственных колебаний несущих и ограждающих элементов конструкций зданий и сооружений, при которых допускается не учитывать силы инерции, возникающие при колебаниях по соответствующей собственной форме. Одними из таких элементов конструкций являются пластинки<sup>2</sup>, широко распространенные так же и во многих других областях техники: судостроении, авиастроении, строении гидротехнических сооружений, мостостроении, машиностроении и проч. В которых зачастую испытывают динамические воздействия инициирующие возникновение собственные колебаний.

Точные решения основной частоты собственных колебаний пластинок найдены лишь в ряде частных случаев для простейших форм: круглой, кольцевой, прямоугольной, правильной треугольной, и во всех остальных и практически важных случаях приходится прибегать к различным приближенным методам строительной механики.

Применение вариационных методов (В. Ритца, Б.Г. Галеркина, С.П. Тимошенко, Э. Треффца и др. [2]) требует решения сложных дифференциальных уравнений, что является достаточно трудоемким процессом. А для повышения точности результатов применять различные способы приближения выбираемых аппроксимирующих функций.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы Минобрнауки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» по проекту №2.1.2/10201 «Разработка теоретических основ и развитие вибрационных методов диагностики и контроля качества строительных конструкций балочного типа и пластинок».

<sup>2</sup> В работе рассматриваются упругие изотропные жесткие пластины средней толщины (пластинки):  $D_{\min} / 10 \leq h \leq D_{\min} / 100$ , где  $h$  – толщина пластинки,  $D_{\min}$  – минимальный габаритный размер в плане;  $w_0 \leq h / 5$ , где  $w_0$  – максимальный прогиб (выгиб).

Численные методы (метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и др. [3]) для обеспечения высокой точности требуют привлечения мощных ЭВМ. И производят однократный расчет, при котором нет возможности отследить изменение искомого решения, например основной частоты собственных колебаний, при изменении геометрических параметров и формы пластинки. Другие методы, такие как: метод R-функций, метод коллокаций, метод компенсирующих нагрузок и проч., в некоторых случаях являются более предпочтительными в сравнении с вариационными и численными. Однако так же являются достаточно трудоемкими, и в большинстве своем не применимы к пластинкам сложных форм.

В тех случаях, когда необходимо оперативно получить оценку искомой физико-механической характеристики пластинки, в их числе основная частота собственных колебаний, и (или) не требуется высокая точность, что особенно актуально на начальной стадии проектирования, активно применяют геометрические методы. Такие методы позволяют избежать решения сложных дифференциальных уравнений, не требуют мощных ЭВМ и сводятся к геометрическому моделированию формы плоской области. При этом выбирается, геометрическая характеристика формы области (в нашем случае – области пластинки), выступающая в роли основного аргумента, по которому оцениваются искомые решения. Среди таких методов стоит отметить изопериметрический метод (ИЗПМ), примененный впервые всемирно известными математиками Г. Полия и Г. Сеге [4] еще в 1962 году для решения задач математической физики, а для решения задач теории пластинок – профессором В.И. Коробко в 1980 году [5], а также метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [6], разработанный профессором А.В. Коробко и являющийся логическим развитием ИЗПМ. В этих методах в качестве геометрического аргумента для определения физико-механических характеристик пластинок используется интегральная характеристика формы плоской области – коэффициент формы  $K_f$ . Подробнее с этой характеристикой, ее изопериметрическими свойствами и закономерностями можно ознакомиться, например, в указанных работах [4–6].

В настоящей работе рассматривается новый аналогичный геометрический аргумент – безразмерная характеристика формы плоской области – отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов  $\hat{r}/\bar{r}$ . Как аргументы по отдельности конформные радиусы широко используются при решении многих прикладных задач математической физики, гидро- и аэродинамики, магнитогидродинамики и проч. [4, 7]. А как отношение впервые было использовано в теории пластинок профессором В.И. Коробко и доцентом А.Н. Хусточкиным в 1994 году при исследовании задачи устойчивости [8]. В которой было установлено одно «универсальное» свойство:

«Значения критического усилия при потере устойчивости от действия равномерного всестороннего сжатия для круглых, правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых (без круглых) либо жестко защемленных равновеликих (равной площади) пластинок, представленные как функции отношения внутреннего к внешнему конформных радиусов областей пластинок, вырождаются в единые кривые».

Как следствие, шарнирно опертые либо жестко защемленные равновеликие пластинки указанных форм, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов имеют и одинаковые значения критического усилия.

Ни одна другая геометрическая характеристика, в том числе коэффициент формы  $K_f$ , не позволяет объединить одной аналитической зависимостью решения критического усилия для такого большого подмножества форм пластинок.

Это свойство основано на возможности представления площади плоской области  $A$  (области пластинки) через внутренний  $\dot{r}$  и внешний  $\bar{r}$  конформные радиусы:

$$A = \pi \dot{r} \bar{r}. \quad (1)$$

Для правильных  $n$ -угольных и ромбических областей равенство (1) следует из выражений для  $\dot{r}$  и  $\bar{r}$  как данных, которые выводятся из формулы Э.Б. Кристоффеля – Г.А. Шварца, а для треугольных установлено Х.Р. Хиги [4, с. 330].

Учитывая известную математическую аналогию задач устойчивости и собственных колебаний пластинок (2), описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа четвертого порядка (см., например, [6, с. 46-47]) можно предположить, что это «универсальное» свойство и в задаче собственных колебаний для рассматриваемого множества пластинок так же может быть обнаружено. При этом параметром аналогичным критическому усилию будет выступать основная частота колебаний. Проверим эту гипотезу для случая шарнирного опирания пластинок.

$$\begin{cases} D\Delta^2\Delta^2 w - q_0\Delta^2 w = 0; \\ D\Delta^2\Delta^2 w - \omega^2 m w = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластинки;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $w$  – функция прогибов (выгибов);  $q_0$  – интенсивность равномерного всестороннего сжатия пластинки;  $\omega$  – частота собственных колебаний;  $m$  – масса единицы площади пластинки.

**Формулы для определения конформных радиусов.** В научной и справочной литературе по теории конформного отображения и математической физике приводятся формулы для нахождения внутреннего  $\dot{r}$  и внешнего  $\bar{r}$  и конформных радиусов для рассматриваемых в работе областей (здесь и далее, для простоты изложения, в тексте вместо слова «область» будем просто говорить «фигур»; т.е. правильный  $n$ -угольник, треугольник, ромб, вместо правильная  $n$ -угольная, треугольная, ромбическая область) [6, с. 314, 330]:

– для правильных  $n$ -угольников:

$$\dot{r} = \frac{\tilde{A}(1-1/n)}{2^{1-\frac{2}{n}} \tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\tilde{A}(1+1/n)}{2^{1+\frac{2}{n}} \tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} L, \quad (3)$$

где  $n$  – число сторон правильного многоугольника;  $L$  – его периметр; здесь и далее  $\Gamma(x)$  – Г-функция (Гамма-функция);

– для произвольных треугольников с углами  $\pi\alpha$ ,  $\pi\beta$ ,  $\pi\gamma$ :

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \cdot \rho, \quad (4)$$

где  $f(x) = \frac{1}{\tilde{A}(x)} \left\{ \frac{x^x}{(1-x)^{1-x}} \right\}^{1/2}$ ;  $\rho$  – радиус описанного круга;

– для равнобедренных треугольников с  $\alpha = \beta$  выражение (4) примет вид:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f^2(\alpha)f(\gamma) \cdot \rho. \quad (5)$$

Значение внешнего конформного радиуса  $\bar{r}$  для треугольников, получим из выражения (1):

$$\bar{r} = A/\pi\dot{r}. \quad (6)$$

– для равнобедренных треугольников по выражению (6) с учетом (4) после некоторых преобразований получим:

$$\bar{r} = \frac{ctg\alpha \cdot h^2}{\pi i}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – равный угол при основании;  $h$  – высота равнобедренного треугольника;

– для прямоугольных треугольников по выражению (6) с учетом (4) после некоторых преобразований получим:

$$\bar{r} = \frac{\sin 2\alpha \cdot c^2}{4\pi i}, \quad (8)$$

где  $\alpha$  – угол при гипотенузе;  $c$  – гипотенуза треугольника;

– для ромбов с углом  $\pi\alpha$ :

$$i = \frac{\pi^{1/2}}{\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\tilde{A}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L, \quad (9)$$

где  $L$  – периметр ромба.

**Значения конформных радиусов и их отношения.** Подсчитанные по формулам (3) – (9) значения конформных радиусов и их отношения сведем в табл. 1–4. Таблицу значений  $i/\bar{r}$  для произвольных треугольников из-за большого объема здесь не приводим. При расчете значения Г-функции подсчитывались в приложении «MSOffice Excel\_2003», а площади, периметры и описанные радиусы – в графическом редакторе «ArchiCAD\_12».

На основании табличных данных построим графики изменения отношения конформных радиусов  $i/\bar{r}$  в зависимости от характерного для каждой фигуры геометрического параметра (рис. 1–5, а). В качестве таких параметров в работе приняты следующие (возможно принятие и других геометрических параметров которые однозначно определяют форму фигуры [9]). Для правильных  $n$ -угольников – количество сторон  $n$  (при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n$ -угольник превращается в круг) (рис. 1, б), для ромбов – острый угол  $\alpha$  (рис. 2, б), для равнобедренных треугольников – угол при основании  $\alpha$  (рис. 3, б), для прямоугольных треугольников – меньший угол при гипотенузе  $\alpha$  (рис. 4, б), для произвольных треугольников – два меньших угла  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 5, б).

Для произвольных треугольников для использования в расчетах отношения конформных радиусов  $i/\bar{r}$  с помощью программы «TableCurve\_3D», была получена следующая функция, с погрешностью не превышающей 1,5%:

$$i/\bar{r} = \frac{a + c \ln \alpha + e \ln \beta + g(\ln \alpha)^2 + i(\ln \beta)^2 + k \ln \alpha \ln \beta}{1 + b \ln \alpha + d \ln \beta + f(\ln \alpha)^2 + h(\ln \beta)^2 + j \ln \alpha \ln \beta}, \quad (10)$$

где  $a = -0,07119$ ;  $b = -0,18777$ ;  $c = 0,07191$ ;  $d = -0,21962$ ;  $e = 0,026978$ ;  $f = 0,008523$ ;  $g = -0,011417$ ;  $h = 0,013928$ ;  $i = -0,004845$ ;  $j = 0,019253$ ;  $k = -0,0021934$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – два меньших угла треугольника (рис. 5, б).

**Определение основной частоты собственных колебаний пластинок (проверка гипотезы).** Для проверки выдвинутой в начале работы гипотезы о возможности объединения единой аналитической функцией значений основной частоты собственных колебаний для правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых равновеликих пластинок представленных в зависимости от отношения конформных радиусов форм пластинок, сведем в

Табл. 1 – Значения конформных радиусов и их отношения для правильных n-угольников

Форма области	$\dot{r}, a$	$\bar{r}, a$	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
Правильный:			
20-угольник	3,1690	3,1709	0,9994
16-угольник	2,5285	2,5315	0,9988
12-угольник	1,8852	1,8905	0,9972
10-угольник	1,5611	1,5688	0,9951
9-угольник	1,3980	1,4076	0,9931
8-угольник	1,2337	1,2458	0,9903
7-угольник	1,0676	1,0835	0,9853
6-угольник	0,8985	0,9204	0,9762
5-угольник	0,7243	0,7561	0,9579
4-угольник	0,5394	0,5902	0,9139
3-угольник	0,3268	0,4218	0,7748
Примечание: $a$ – сторона (рис. 1, б).			

Табл. 3 – Значения конформных радиусов и их отношения для равнобедренных треугольников

$\alpha$	$\dot{r}, h$	$\bar{r}, h$	$\dot{r}/\bar{r}$
№	1	2	3
$5^{\circ}$	0,6239	5,8315	0,1070
$10^{\circ}$	0,6102	2,9584	0,2063
$15^{\circ}$	0,5954	1,9952	0,2984
$20^{\circ}$	0,5793	1,5097	0,3837
$25^{\circ}$	0,5618	1,2151	0,4623
$30^{\circ}$	0,5427	1,0159	0,5342
$35^{\circ}$	0,5218	0,8712	0,5989
$40^{\circ}$	0,4987	0,7607	0,6556
$45^{\circ}$	0,4732	0,6727	0,7034
$50^{\circ}$	0,4449	0,6003	0,7411
$55^{\circ}$	0,4131	0,5395	0,7657
$60^{\circ}$	0,3774	0,4870	0,7748
$65^{\circ}$	0,3368	0,4407	0,7642
$70^{\circ}$	0,2902	0,3992	0,727
$75^{\circ}$	0,2362	0,3611	0,6541
$80^{\circ}$	0,1726	0,3252	0,5308
$85^{\circ}$	0,0960	0,2901	0,3309

Табл. 2 – Значения конформных радиусов и их отношения для ромбов

$\alpha$	$\dot{r}, a$	$\bar{r}, a$	$\dot{r}/\bar{r}$
№	1	2	3
$5^{\circ}$	0,0545	0,5094	0,1070
$10^{\circ}$	0,1066	0,5183	0,2057
$15^{\circ}$	0,1564	0,5268	0,2969
$20^{\circ}$	0,2036	0,5348	0,3807
$25^{\circ}$	0,2481	0,5423	0,4575
$30^{\circ}$	0,2898	0,5492	0,5277
$35^{\circ}$	0,3286	0,5557	0,5913
$40^{\circ}$	0,3643	0,5616	0,6487
$45^{\circ}$	0,3970	0,5670	0,7002
$50^{\circ}$	0,4264	0,5718	0,7457
$55^{\circ}$	0,4526	0,5761	0,7856
$60^{\circ}$	0,4754	0,5798	0,8199
$65^{\circ}$	0,4949	0,5830	0,8489
$70^{\circ}$	0,5108	0,5855	0,8724
$75^{\circ}$	0,5233	0,5876	0,8906
$80^{\circ}$	0,5322	0,5890	0,9036
$85^{\circ}$	0,5376	0,5899	0,9113
$90^{\circ}$	0,5394	0,5902	0,9139
Примечания: 1. $\alpha$ – острый угол ромба; 2. $a$ – сторона ромба (рис. 2, б).			

Табл. 4 – Значения конформных радиусов и их отношения для прямоугольных треугольников

$\alpha$	$\dot{r}, c$	$\bar{r}, c$	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
$5^{\circ}$	0,0510	0,2710	0,1882
$7,5^{\circ}$	0,0737	0,2795	0,2637
$10^{\circ}$	0,0949	0,2868	0,3309
$12,5^{\circ}$	0,1145	0,2937	0,3899
$15^{\circ}$	0,1326	0,3001	0,4419
$17,5^{\circ}$	0,1492	0,3059	0,4877
$20^{\circ}$	0,1644	0,3111	0,5284
$22,5^{\circ}$	0,1781	0,3159	0,5638
$25^{\circ}$	0,1903	0,3203	0,5941
$27,5^{\circ}$	0,2012	0,3240	0,6210
$30^{\circ}$	0,2106	0,3272	0,6436
$32,5^{\circ}$	0,2185	0,3301	0,6619
$35^{\circ}$	0,2250	0,3323	0,6771
$37,5^{\circ}$	0,2301	0,3341	0,6887
$40^{\circ}$	0,2337	0,3353	0,6970
$42,5^{\circ}$	0,2359	0,3361	0,7019
$45^{\circ}$	0,2366	0,3363	0,7034

Примечания: 1.  $\alpha$  – равный угол при основании треугольника; 2.  $h$  – его высота (рис. 3, б).



Рис. 1. Правильные n-угольники:  
а) график  $\dot{r}/\bar{r} = f(n)$ ;  
б) общий вид области

Примечания: 1.  $\alpha$  – меньший угол при гипотенузе треугольника; 2.  $c$  – его гипотенуза (рис. 4, б).

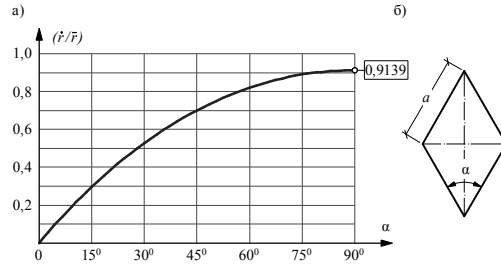


Рис. 2. Ромбы:  
а) график  $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$ ;  
б) общий вид области

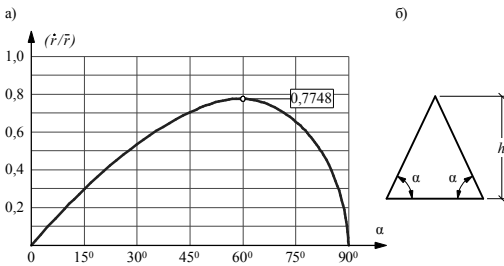


Рис. 3. Равнобедренные треугольники:  
а) график  $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$ ;  
б) общий вид области

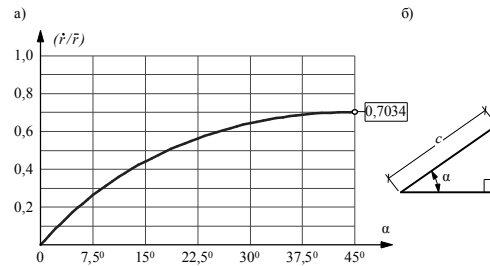


Рис. 4. Прямоугольные треугольники:  
а) график  $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$ ;  
б) общий вид области

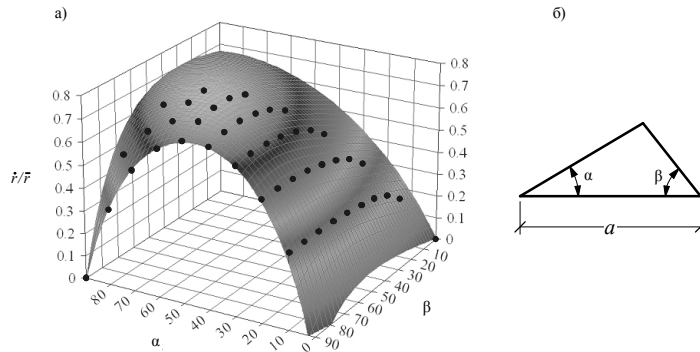


Рис. 5. Произвольные треугольники:  
а) график  $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha; \beta)$ ; б) общий вид области

табл. 5 (колонка 2) известные значения основной частоты колебаний и значения, полученные МКЭ с использованием программного комплекса «SCAD\_11.3» (с числом КЭ не менее 1000). А в колонку 1 (табл. 5) – значения отношений конформных радиусов  $\dot{r}/\bar{r}$  для пластинок рассматриваемых форм.

Значения основной частоты колебаний  $\omega_0$  представлены в общем виде, зависимость:

$$\omega_0 = k_\omega \sqrt{D/m} / A, \tag{11}$$

где  $k_\omega$  – коэффициент пропорциональности (численное решение), зависящий от формы пластинки и ее граничных условий;  $A$  – площадь пластинки;  $D$  и  $m$  – то же, что и в выражении (2).

Табл. 5. Сопоставление известных значений основной частоты собственных колебаний шарнирно опертых пластинок со значениями, найденными по аппроксимирующей функции (12), представленные в зависимости от отношения конформных радиусов их областей

Геометрические параметры пластинок	Отношение конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$	Известные значения основной частоты колебаний пластинок (11)			Значения, подсч. по (12)	$\Delta, \%$
		$k_{\omega}$	$k_{\omega}^{-1}$	источник	$k_{\omega}$	
№ п/п	1	2	3	4	5	6
Правильные n-угольные пластинки						
20 - угольник	0,9994	17,952	0,05570	[МКЭ]	17,958	0,03
16 - угольник	0,9988	17,821	0,05813	[МКЭ]	17,969	0,83
10 - угольник	0,9951	17,922	0,05618	[МКЭ]	18,036	0,64
8 - угольник	0,9903	18,04	0,05543	[МКЭ]	18,124	0,46
6 - угольник	0,9762	18,394	0,05437	[6]	18,384	-0,05
5 - угольник	0,9579	18,895	0,05292	[МКЭ]	18,730	-0,87
4 - угольник	0,9139	19,739	0,05066	[6]	19,597	-0,72
3 - угольник	0,7748	22,792	0,04388	[6]	22,741	-0,22
Равнобедренные треугольные пластинки						
$\alpha = 80^{\circ}$	0,5308	31,153	0,03210	[МКЭ]	31,068	-0,27
$\alpha = 70^{\circ}$	0,7270	23,866	0,04190	[МКЭ]	24,007	0,59
$\alpha = 60^{\circ}$	0,7748	22,792	0,04388	[6]	22,741	-0,22
$\alpha = 50^{\circ}$	0,7411	23,585	0,04240	[МКЭ]	23,621	0,15
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6556	26,178	0,03820	[МКЭ]	26,151	-0,10
$\alpha = 30^{\circ}$	0,5342	31,350	0,03190	[6]	30,905	-1,42
$\alpha = 20^{\circ}$	0,3837	41,667	0,02400	[МКЭ]	41,391	-0,66
Прямоугольные треугольные пластинки						
$\alpha = 45^{\circ}$	0,7034	24,674	0,04053	[6]	24,678	0,02
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6970	24,752	0,04040	[МКЭ]	24,866	0,46
$\alpha = 30^{\circ}$	0,6436	26,589	0,03761	[6]	26,549	-0,15
$\alpha = 20^{\circ}$	0,5284	31,546	0,03170	[МКЭ]	31,185	-1,14
$\alpha = 10^{\circ}$	0,3309	48,031	0,02082	[МКЭ]	48,095	0,13
Произвольные треугольные пластинки						
$\alpha = 60^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,7459	23,502	0,04255	[МКЭ]	23,493	-0,04
$\alpha = 40^{\circ}, \beta = 80^{\circ}$	0,7196	23,892	0,041855	[МКЭ]	24,214	1,35
$\alpha = 30^{\circ}, \beta = 70^{\circ}$	0,6528	26,045	0,038395	[МКЭ]	26,243	0,76
$\alpha = 30^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,6087	27,414	0,036478	[МКЭ]	27,781	1,34
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 60^{\circ}$	0,5205	32,02	0,03123	[МКЭ]	31,577	-1,38
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 50^{\circ}$	0,5064	32,02	0,03123	[МКЭ]	32,308	0,90
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 30^{\circ}$	0,4462	36,21	0,027617	[МКЭ]	36,015	-0,54
$\alpha = 15^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,4215	38,025	0,026298	[МКЭ]	37,902	-0,32
$\alpha = 10^{\circ}, \beta = 50^{\circ}$	0,3204	50,236	0,019906	[МКЭ]	49,796	-0,88
Ромбические пластинки						
$\alpha = 90^{\circ}$	0,9139	19,739	0,05066	[6]	19,597	-0,72
$\alpha = 80^{\circ}$	0,9036	19,810	0,05048	[МКЭ]	19,808	-0,01
$\alpha = 70^{\circ}$	0,8724	20,329	0,04919	[МКЭ]	20,465	0,67
$\alpha = 60^{\circ}$	0,8199	21,626	0,04624	[6]	21,644	0,08
$\alpha = 50^{\circ}$	0,7457	23,358	0,04324	[МКЭ]	23,498	0,60
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6487	26,268	0,03864	[МКЭ]	26,378	0,42
$\alpha = 30^{\circ}$	0,5277	30,972	0,03252	[МКЭ]	31,219	0,80
$\alpha = 20^{\circ}$	0,3807	41,289	0,02462	[МКЭ]	41,706	1,01

Примечания: 1. Значения  $\dot{r}/\bar{r}$  и обозначения геометрических параметров см. в табл. 1–4 и (10).  
 2. Значения основной частоты представлены в виде (11). 3.  $\Delta$  – разница между значениями в колонках 2 и 5.

В выражении (12) площадь пластинки  $A$  вычленяется из решения, и таким образом численное решение  $k_\omega$  приводится для пластинок единичной площади (равновеликих).

На основании данных табл. 5 (колонки 1 и 3) отложим в координатной плоскости  $k_\omega^{-1} - \dot{r}/\bar{r}$  значения основной частоты колебаний  $k_\omega$  из выражения (11) (рис. 6). Откладываем обратную величину основной частоты колебаний, т.к. в этом случае их значения приближаются к конечному значению. Максимальное значение обратной величины основной частоты собственных колебаний  $k_\omega^{-1}$  принадлежит правильной  $n$ -угольной пластинки с  $n \rightarrow \infty$ , но не круглой, поскольку для пластинок с криволинейным шарнирно опертым участком контура (в их числе круглые) значения физико-механических характеристик и характеристик напряженно-деформированного состояния существенно зависят от коэффициента Пуассона материала, не входящего в выражение для цилиндрической жесткости  $D$ .

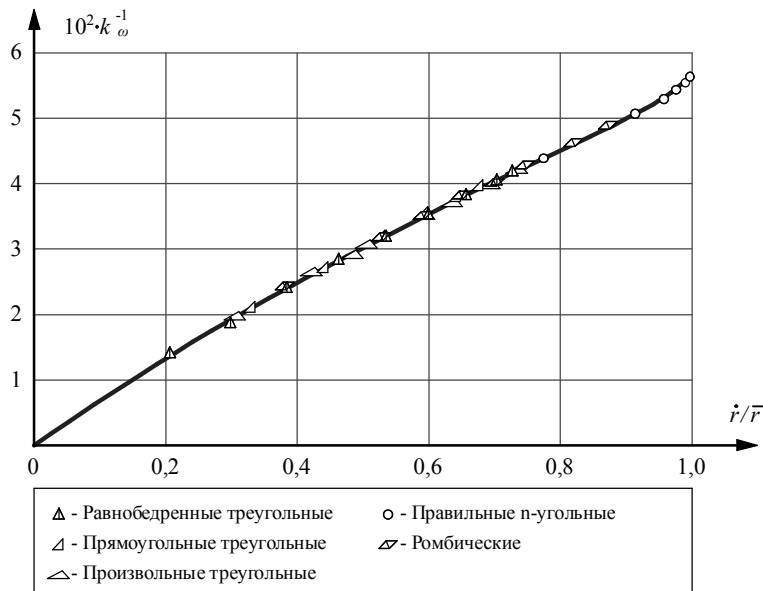


Рис. 6. Кривая  $k_\omega^{-1} - \dot{r}/\bar{r}$  для шарнирно опертых пластинок

Из рис. 6 видно, что все множество значений  $k_\omega^{-1}$  для пластинок рассматриваемого множества форм вырождаются в единую кривую. Воспользуемся программой «TableCurve\_2D» и получим аппроксимирующую функцию рационального вида «Rational Equations»:

$$k_q = \frac{1 + 10,52(\dot{r}/\bar{r})^2 - 0,25437(\dot{r}/\bar{r})^4}{0,38104(\dot{r}/\bar{r})^2 + 0,24668(\dot{r}/\bar{r})^4}. \quad (12)$$

Отклонение значений  $k_\omega$  получаемых по функции (12) от известных не превышает 1,4% (табл. 5, колонки 5 и 6). Таким образом, выдвинутую в начале работы гипотезу можно считать теоретически подтвержденной, ее экспериментальная проверка планируется в ближайшее время, результаты которой будут опубликованы в последующих работах автора.



## Выводы

1. Значения основной частоты собственных колебаний для правильных треугольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых равновеликих (равной площади) пластинок, представленные как функции отношения внутреннего к внешнему конформных радиусов областей пластинок, вырождаются в единую кривую.

2. Шарнирно опертые равновеликие пластинки указанных форм, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов имеют и одинаковую величину основной частоты собственных колебаний.

3. Полученная аналитическая функция (12) единая для шарнирно опертых пластинок указанных форм может эффективно использоваться при выполнении динамического расчета (определения основной частоты собственных колебаний) таких пластинок, где значения отношения конформных радиусов  $\bar{r}/\bar{r}$  можно определять по табл. 1–4 и (10). А так же имеет широкие возможности при решении оптимизационных задач, связанных с выбором оптимальных с точки зрения жесткости (ограничения собственных колебаний) геометрических параметров и форм плоских элементов конструкций.

## Литература

1. СНиП 2.01.07–85\*. Нагрузки и воздействия. Дата введения 01.01.1987. М.: Изд-во стандартов, 1996. – 62 с.

2. Сливкер, В.И. Строительная механика. Вариационные основы [Текст] / В.И. Сливкер. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.

3. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики [Текст] / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с.

4. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [Текст] / Г. Поля, Г. Сеге. – 2-е изд., стереотипное – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.

5. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы изопериметрического метода [Текст] / В.И. Коробко. – М.: АСВ, 1997. – 390 с.

6. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.

7. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения [Текст] / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.

8. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок [Текст] / В.И. Коробко, А.Н. Хусточкин. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1994. – 148 с.

9. Коробко, В.И. Количественная оценка симметрии [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: АСВ, 2008. – 128 с.

## DYNAMIC CALCULATION CORRECT N-COAL, TRIANGULAR AND RHOMBIC PLATES WITH HINGE A SUPPORT ON A CONTOUR WITH USE OF THE RELATIONS OF CONFORMAL RADIUSES AS GEOMETRICAL ARGUMENT

A.A. Chernyaev

For definition of the basic frequency natural vibration elastic isotropic of correct n-coal, triangular and rhombic plates with hinge a support on a contour is suggested to use the uniform for all settlement function of one variable. As this variable acts the new argument of geometrical methods of the decision of two-dimensional problems of building mechanics – dimensionless geometrical characteristic of the form of flat area – the relation internal to the external conformal radiuses.

KEYWORDS: dynamic calculation of plates, basic frequency of natural vibration, correct n-coal, triangular, rhombic plates, relation of conformal radiuses, the geometrical methods of engineering mechanics.