

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПЛАСТИН ПРИ ПЛОСКОМ НАГРУЖЕНИИ НА ОСНОВЕ МКЭ

А.П. КИСЕЛЕВ, кандидат техн. наук, доцент;

Н.А. ГУРЕЕВА, кандидат техн. наук, доцент;

Р.З. КИСЕЛЕВА, кандидат техн. наук;

В.В. ЛЕОНТЬЕВА, ассистент.

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия,  
400002, Волгоград, Университетский пр., 26

Для определения напряженно-деформированного состояния пластин, находящихся в условиях плоского нагружения, используется объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме четырехугольника с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных. Для узла на границе сочленения пластин под произвольным углом  $\alpha$  получены соотношения между узловыми неизвестными одной пластинки, принятой за основную, и пластинки, примыкающей к основной под углом  $\alpha$ . Рассмотрены два случая: пластинки из однородного материала и пластинки из разнородных материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод конечного элемента, пластина, плоское нагружение.

Матрица жесткости объемного конечного элемента в форме произвольного четырехугольника формируется согласно [1]. Для выполнения численного интегрирования произвольный четырехугольник отображается на квадрат с локальными координатами  $a$  и  $b$ , интервалы изменения которых находятся в пределах  $-1 \leq a, b \leq 1$ . Глобальные координаты  $x, z$  внутренней точки четырехугольного элемента пластины определяются через узловые значения координат билинейными соотношениями

$$\lambda = \{f(a, b)\}^T \{\lambda_y\} \quad (1)$$

где под символом  $\lambda$  понимаются координаты  $x, z$ ;

$$\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l\}_{1 \times 4} \text{ - матрица-строка узловых значений координаты } \lambda.$$

Дифференцированием (1) определяются производные глобальных координат  $x, z$  в локальной системе координат  $x_a, x_b, z_a, z_b$  и локальных координат  $a, b$  в глобальной системе координат  $a_x, a_z, b_x, b_z$ .

Перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируются через соответствующие узловые значения матричными соотношениями

$$\gamma = \{\varphi(a, b)\}^T \{\gamma_y^n\} \quad (2)$$

где  $\{\gamma_y^n\}_{1 \times 12} = \{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l \gamma_{,a}^i \gamma_{,a}^j \gamma_{,a}^k \gamma_{,a}^l \gamma_{,b}^i \gamma_{,b}^j \gamma_{,b}^k \gamma_{,b}^l\}$  - вектор узловых неизвест-

ных в локальной системе координат; под символом  $\gamma$  понимаются перемещения  $u, v$  в системе координат  $x, z$ ;  $\{\varphi(a, b)\}$  - матрица функций формы, полученных на основе полиномов Эрмита третьей степени.

Вектор узловых неизвестных в глобальной системе координат имеет вид

$$\{\gamma_y^\Gamma\}_{1 \times 12} = \{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l \gamma_{,x}^i \gamma_{,x}^j \gamma_{,x}^k \gamma_{,x}^l \gamma_{,z}^i \gamma_{,z}^j \gamma_{,z}^k \gamma_{,z}^l\}.$$

Связь между векторами  $\{\gamma_y^n\}$  и  $\{\gamma_y^\Gamma\}$  записывается в матричном виде

$$\left\{ \gamma_y^a \right\}_{1 \times 12}^T = [r]_{12 \times 12} \left\{ \gamma_y^a \right\}_{12 \times 1}^T \quad (3)$$

где матрица  $[r]$  формируется на основе соотношений

$$\gamma_{,a} = \gamma_{,x} \cdot x_{,a} + \gamma_{,z} \cdot z_{,a} \quad (4)$$

Формулы Коши теории упругости с использованием выражений (1), (2), (3), (4) представляются в матричном виде

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 24} \left\{ \gamma_y^a \right\}_{24 \times 1} \quad (5)$$

где  $\left\{ \varepsilon \right\}^T = \{ \varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xz} \}$  – вектор- строка деформаций внутренней точки конечного элемента;

$$\left\{ \gamma_y^a \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \left\{ u_y^a \right\}_{1 \times 12}^T \right\} \left\{ \left\{ w_y^a \right\}_{1 \times 12}^T \right\}$$

Связь между напряжениями и деформациями внутренней точки конечного элемента принимается в виде

$$\left\{ \sigma \right\}_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon \right\}_{3 \times 1}, \quad (6)$$

где  $\left\{ \sigma \right\}^T = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xz} \}$ .

Матрица жесткости конечного элемента формируется на основе равенства работ внешних и внутренних сил при нагружении упругого тела [1]

$$[K] \left\{ \gamma_y^a \right\} = \left\{ f_y^a \right\}$$

1. Геометрия пластин в зоне пересечения из однородных материалов. Для описания геометрии двух пересекающихся под углом  $\alpha$  пластин вводятся две системы координат:  $x, z$  для основной пластины и  $x', z'$  для примыкающей пластины (рис. 1). Здесь и далее символы без штриха будут относиться к параметрам основной пластины, со штрихом - к примыкающей пластине.

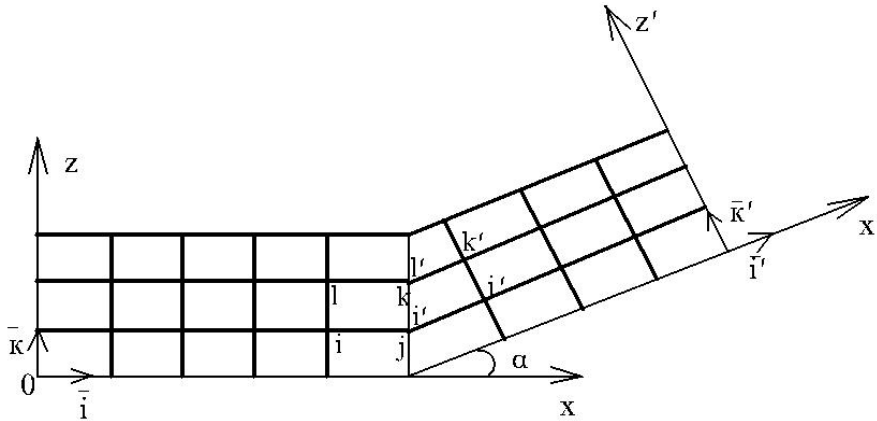


Рис. 1

Единичные векторы координатного базиса основной пластины выражаются через векторы координатного базиса примыкающей пластины и наоборот матричными соотношениями

$$\left\{ \vec{i}' \right\} = [s] \left\{ \vec{i} \right\}, \quad \left\{ \vec{i} \right\} = [l] \left\{ \vec{i}' \right\}, \quad (7)$$

где  $\left\{ \vec{i}' \right\} = \left\{ \vec{i}', \vec{k}' \right\}^T$ ;  $\left\{ \vec{i} \right\} = \left\{ \vec{i}, \vec{k} \right\}^T$ ,  $[l] = [s]^{-1}$ .

В узлах, расположенных на грани пересечения, введем следующие векторы узловых неизвестных для основной пластинки и примыкающей, соответственно

$$\{q^{\bar{\omega}}\}^T = \{u^{\bar{\omega}} \ u_{,x}^{\bar{\omega}} \ u_{,z}^{\bar{\omega}} \ w^{\bar{\omega}} \ w_{,x}^{\bar{\omega}} \ w_{,z}^{\bar{\omega}}\}; \quad (8)$$

$$\{q^{\bar{\omega}'}\}^T = \{u^{\bar{\omega}'} \ u_{,x}^{\bar{\omega}'} \ u_{,z}^{\bar{\omega}'} \ w^{\bar{\omega}'} \ w_{,x}^{\bar{\omega}'} \ w_{,z}^{\bar{\omega}'}\}, \quad (9)$$

где  $\bar{\omega} = j, k$ ;  $\bar{\omega}' = i', l'$ .

Соотношения между перемещениями (8) и (9) определяется из условия равенства векторов перемещения узловой точки

$$u\bar{i}' + w\bar{k}' = u\bar{i} + w\bar{k} = u(l_{11}\bar{i}' + l_{12}\bar{k}') + w(l_{21}\bar{i}' + l_{22}\bar{k}'), \quad (10)$$

из которого получается  $u' = ul_{11} + wl_{21}$ ;  $w' = u(l_{21}) + wl_{22}$ .

Зависимости между производными компонент вектора перемещений для двух пластин на линии пересечения можно получить, используя выражения производной по направлению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x} \cos(x, x') + \frac{\partial u'}{\partial z} \cos(x', z) = l_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, x') + l_{21} \frac{\partial w}{\partial x} \cos(x, x') + \\ &+ l_{11} \frac{\partial u}{\partial z} \cos(x', z) + l_{21} \frac{\partial w}{\partial z} \cos(x', z); \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} &= \frac{\partial u'}{\partial x} \cos(z', x) + \frac{\partial u'}{\partial z} \cos(z', z) = \frac{\partial u}{\partial x} l_{11} \cos(z', x) + \frac{\partial w}{\partial x} l_{21} \cos(z', x) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial z} l_{11} \cos(z', z) + \frac{\partial w}{\partial z} l_{21} \cos(z', z); \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} &= \frac{\partial w'}{\partial x} \cos(x, x') + \frac{\partial w'}{\partial z} \cos(x', z) = \frac{\partial u}{\partial x} l_{12} \cos(x, x') + \frac{\partial w}{\partial x} l_{22} \cos(x, x') + \\ &+ \left( \frac{\partial u}{\partial z} l_{12} \cos(x', z) + \frac{\partial w}{\partial z} l_{22} \cos(x', z) \right); \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} &= \frac{\partial w'}{\partial x} \cos(z', x) + \frac{\partial w'}{\partial z} \cos(z', z) = \frac{\partial u}{\partial x} l_{12} \cos(z', x) + \frac{\partial w}{\partial x} l_{22} \cos(z', x) + \\ &\left( \frac{\partial u}{\partial z} l_{12} \cos(z', z) + \frac{\partial w}{\partial z} l_{22} \cos(z', z) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

На основании выражений (10), (11) матричная зависимость между векторами (9) и (8) получит вид

$$\left\{ q^{\bar{\omega}'} \right\}_{6 \times 1} = [z] \left\{ q^{\bar{\omega}} \right\}_{6 \times 1}. \quad (12)$$

С использованием (12) формируется матрица преобразования [T] для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок примыкающих конечных элементов пластины

$$[K'] = [T]^T [K] [T]; \quad \{f'\} = [T]^T \{f\}. \quad (13)$$

2. Геометрия пластин в зоне пересечения из разнородных материалов. Основная пластинка представлена в декартовой системе координат с ортами  $\{\bar{i}\}$ , примыкающая под углом  $\alpha$  пластинка - ортами  $\{\bar{i}'\}$ . Граница между разнородными материалами определяется плоскостью с ортами  $\{\bar{v}\}^T = \{\bar{v} \ \bar{i}'\}$ , наклоненной под углом  $\beta$  к оси  $ox$  основной пластинки (рис. 2). Угол  $\gamma$  между норма-

лю к границе пересечения пластин  $\vec{v}$  и осью  $x'$  будет равен  $\gamma = (90 - \beta) - \alpha$ , а угол  $\varphi$  между нормалью к границе пересечения пластин  $\vec{v}$  и осью  $x$  будет равен  $\varphi = (90 - \beta)$ .

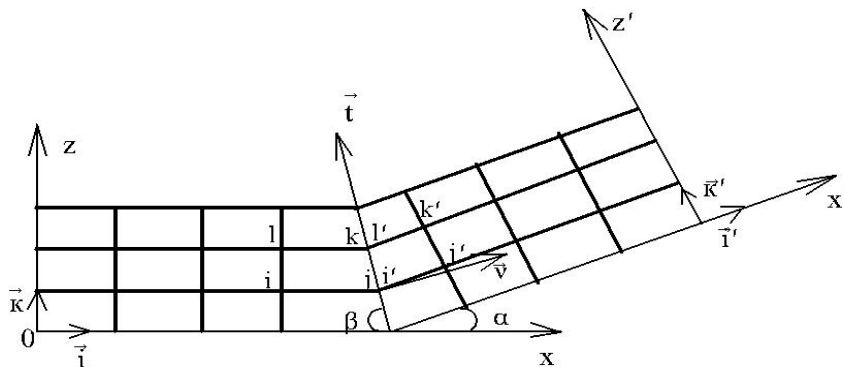


Рис. 2

В узлах, расположенных на грани пересечения, введем следующие векторы узловых неизвестных для основной пластинки и примыкающей, соответственно

$$\{q^{\varpi}\}^T = \{u_V^{\varpi} \ u_{V,V}^{\varpi} \ u_{V,t}^{\varpi} \ w_t^{\varpi} \ w_{t,V}^{\varpi} \ w_{t,t}^{\varpi}\}, \quad (14)$$

$$\{q^{\varpi'}\}^T = \{u_V^{\varpi'} \ u_{V,V}^{\varpi'} \ u_{V,t}^{\varpi'} \ w_t^{\varpi'} \ w_{t,V}^{\varpi'} \ w_{t,t}^{\varpi'}\}, \quad (15)$$

где  $\varpi = j, k$ ;  $\varpi' = i', l'$ .

Для конечных элементов, примыкающих к плоскости разграничения разнородных материалов, выполняется преобразование узловых неизвестных (8) и (9) к узловым неизвестным (14) и (15) по выражениям (13).

В узлах, расположенных на грани пересечения пластин, за основные неизвестные принимаются узловые неизвестные элементов основной пластинки (14). Узловые неизвестные конечного элемента примыкающей пластинки (15) на грани пересечения должны быть выражены через основные узловые неизвестные с использованием следующих условий:

1. Перемещение узловых точек в зоне пересечения пластин в системе координат  $\vec{v}, \vec{t}$ , являются одинаковыми, что приводит к равенству

$$u_V^{\varpi'} = u_V^{\varpi}; \quad w_t^{\varpi'} = w_t^{\varpi}. \quad (16)$$

2. Производная перемещений вдоль оси  $\vec{t}$  по координате  $\vec{t}$  для сопрягающих пластин являются равными

$$w_{t,t}^{\varpi'} = w_{t,t}^{\varpi}. \quad (17)$$

3. Равенство углов наклона касательного вектора  $\vec{t}$  к плоскости разграничивающей материалы

$$u_{V,t}^{\varpi'} = u_{V,t}^{\varpi}. \quad (18)$$

4. Из условия равенства касательных напряжений на границе пересечения пластин

$$G'(u_{V,t}^{\varpi'} + w_{t,V}^{\varpi'}) = G(u_{V,t}^{\varpi} + w_{t,V}^{\varpi}) \quad (19)$$

получается 
$$w_{t,V}^{\varpi'} = w_{t,V}^{\varpi} \frac{G}{G'} + u_{V,t}^{\varpi} \left( \frac{G}{G'} - 1 \right). \quad (20)$$

5. Из равенства нормальных напряжений вдоль оси  $\vec{v}$  в зоне пересечения пластин

$$\frac{E'}{1-\mu'^2}(\varepsilon'_{vv} + \mu'\varepsilon'_{tt}) = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{vv} + \mu\varepsilon_{tt}) \quad (21)$$

находим

$$u'_{v,v} \omega' = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu'^2}{E'} \left( \frac{\partial u_v}{\partial s_v} + \mu \frac{\partial w_t}{\partial s_t} \right) - \mu \frac{\partial w_t}{\partial s_t}. \quad (22)$$

На основании выражений (16), (17), (18), (20) и (22) матричная зависимость между векторами (15) и (14) получит вид

$$\left\{ q^{\sigma'} \right\}_{6 \times 1} = [z] \left\{ q^{\sigma} \right\}_{6 \times 1}. \quad (23)$$

С использованием (23) формируется матрица преобразования [T] для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок граничного конечного элемента примыкающей пластины

$$[K'] = [T]^T [K] [T]; \quad \{f'\} = [T]^T \{f\}. \quad (24)$$

*Пример №1.* Определялось напряженно-деформированное состояние пересекающихся пластин, нагруженных сосредоточенной силой  $Q$  (рис.3). Материал пластин однородный.

Были приняты следующие исходные данные:  $l_1 = 1\text{м}$ ;  $l_2 = 0,8\text{м}$ ;  $Q = 20\text{кН}$ ;  $h_1 = 0,1\text{м}$ ;  $h_2 = 0,1\text{м}$ ;  $E = 2 \cdot 10^6\text{МПа}$ ;  $E' = 2 \cdot 10^6\text{МПа}$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\mu' = 0,3$ .

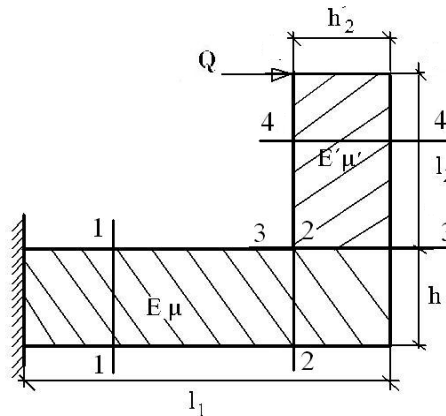


Рис. 3

По толщине основная и примыкающая пластины разбивались на 9 равных дискретных элементов. По длине основная пластина разбивалась на 70 одинаковых элементов, а примыкающая пластина на 50 одинаковых элементов.

По полученным результатам построены эпюры нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечениях 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 (рис.3), разделенным по высоте на 9 равных частей, рис. 4а; рис. 4б; рис. 4в; рис. 4г.

По полученным результатам нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  с использованием эпюр нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  для контроля точности вычислений выполнены проверки  $\sum M = 0$ .

Условие равновесия по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,1\%$  (рис. 4а); для (рис. 4б) условие равновесия по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 2\%$ ; для (рис.4в) условие равно-

весия по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 2\%$ ; для (рис. 4з) условие равновесия по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,1\%$ .

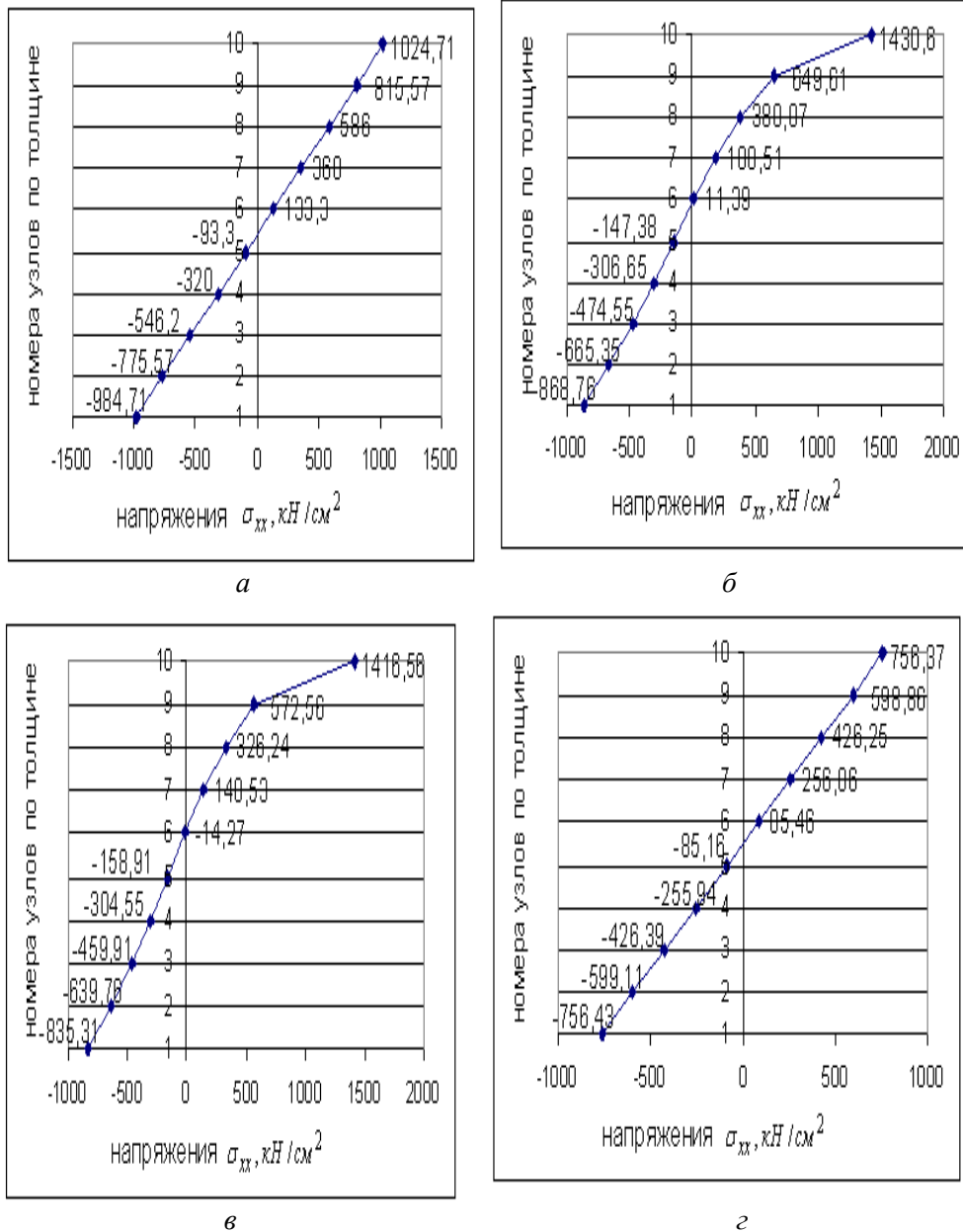


Рис. 4

Пример №2. Определялось напряженно-деформированное состояние пересекающихся пластин, нагруженных сосредоточенной силой  $Q$  (рис. 5). Материал пластин разнородный.

Были приняты следующие исходные данные:  $l_1 = 1\text{м}$ ;  $l_2 = 0,8\text{м}$ ;  $Q = 20\text{кН}$ ;  $h_1 = 0,1\text{м}$ ;  $h_2 = 0,1\text{м}$ ;  $E = 2 \cdot 10^6\text{МПа}$ ;  $E' = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\mu' = 0,25$ .

По толщине основная и примыкающая пластины разбивались на 10 равных дискретных элементов. По длине основная пластина разбивалась на 70 одинаковых элементов, а примыкающая пластина на 50 одинаковых элементов.

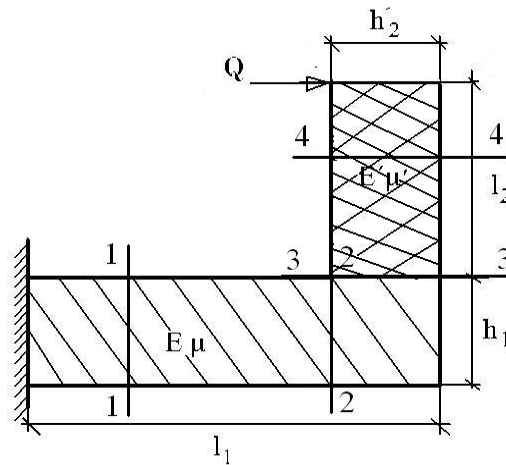


Рис. 5

По полученным результатам построены эпюры нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечениях 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 (рис.6), разделенным по высоте на 10 равных частей, рис. 6а; рис. 6б; рис. 6в; рис. 6г и для контроля точности вычислений выполнены проверки

$$\sum x = 0, \sum M = 0.$$

Условие равновесия по силам ( $\sum x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,001 \%$ , а по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) погрешность составила  $\delta = 1 \%$  (рис. 6а); для (рис. 6б) условие равновесия по силам ( $\sum x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,001 \%$ , а по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) погрешность составила  $\delta = 2 \%$ ; для (рис.6в) условие равновесия по силам ( $\sum x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,001 \%$ , а по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) погрешность составила  $\delta = 2 \%$ ; для (рис.6г) условие равновесия по силам ( $\sum x = 0$ ) выполняется с погрешностью  $\delta = 0,01 \%$ , а по моментам ( $\sum M_x = 0$ ) погрешность составила  $\delta = 0,1 \%$ .

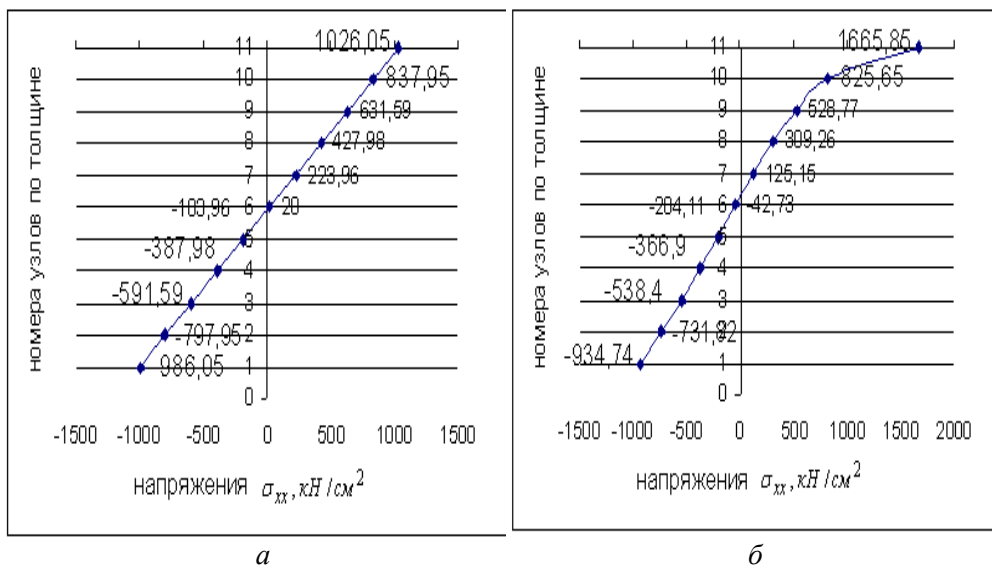


Рис. 6 (начало)

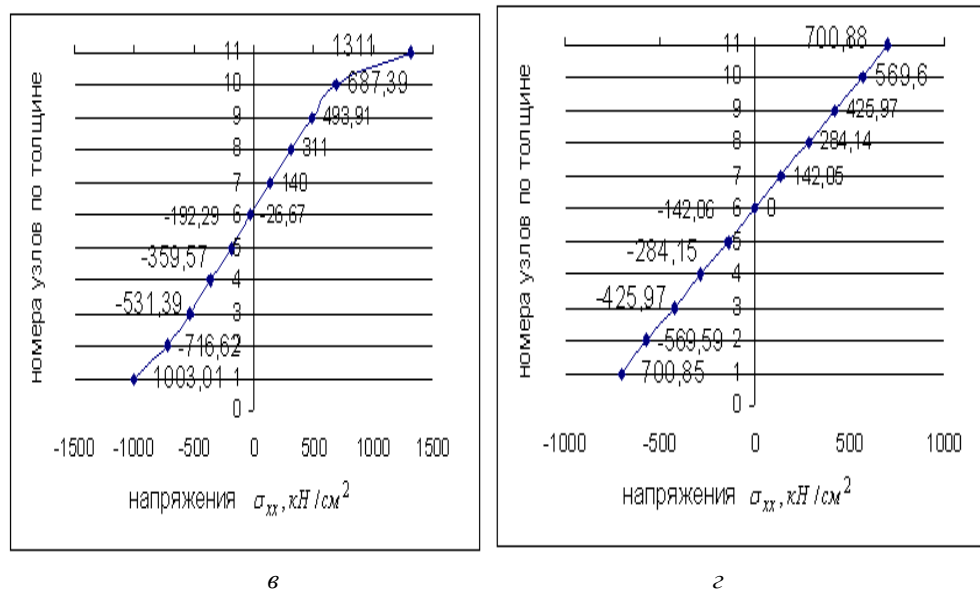


Рис. 6 (продолжение)

Анализ численных результатов показал удовлетворительное выполнение граничных условий по напряжениям на всех внешних гранях сочленяемых пластин. Напряжения, нормальные к внешним граням и касательные к ним, имели близкие к нулю значения (не более 0.3% от максимального нормального напряжения).

Нормальные и касательные напряжения в точке приложения сосредоточенной силы  $Q$  быстро уменьшались на участке трех элементов по толщине пластинки и на расстоянии 0.2 толщины пластинки по её длине, что соответствует принципу Сен-Венана [3].

На основе анализа результатов выполненных примеров расчета можно сделать вывод о пригодности разработанного алгоритма по формированию матрицы жесткости конечного элемента уточненного расчета, пересекающихся тонкостенных конструкций из однородных и разнородных материалов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Использование трехмерных конечных элементов в расчетах прочности многослойных панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2009. - № 4. - С. 37-40.
2. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности.- М.: «Высшая школа», 1970.- 288с.
3. Филлин А.П. Современные проблемы использования ЭЦВМ в механике твердого деформированного тела. – Л: Стройиздат, 1974.-411с.

### DETERMINATION OF STRESSES IN THE INTERSECTION OF PLANES UNDER PLANE LOADING ON THE BASIS OF THE FEM

A.P. Kiselyov, N.A. Gureyeva, R.Z. Kiselyova, V.V. Leont'eva

For the determination of the stress-strain state of plates which are under flat loading, a volume finite element with quadrilateral cross-section and with the nodal unknown displacements and their derivatives is used. For a node on the border junction of the plates at an arbitrary angle  $\alpha$ , it is obtained relations between the nodal unknowns of one plate, taken as main one and the plate adjacent to the main plane with angle  $\alpha$ . Two cases are considered: a plate of homogeneous material and a plate made of dissimilar materials.

KEY WORDS: finite element method, plate, plane loading.