

Численные методы расчета конструкций

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СХЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЛАСТИН

И.Н. СЕРПИК*, д-р техн. наук, профессор

М.В. ШВЫРЯЕВ**, инженер

А.И. ТЮТЮННИКОВ***, инженер

* Брянская государственная инженерно-технологическая академия;

** Брянский государственный технический университет;

*** ООО «Научно-инженерная компания», Жуковский, Московская обл.

241007, РФ, Брянск, ул. В. Сафроновой, д. 75, 29, iserpik@online.debryansk.ru

Разработан стержневой конечный элемент, обеспечивающий при эксцентричном соединении стержня с тонкой плоской обшивкой совместность по перемещениям, направленным вдоль линии стыка. Такой подход к аппроксимации перемещений позволяет уменьшить разрывы для внутренних усилий в стержнях по узловым точкам. Приводятся результаты расчета подкрепленной консольной пластины, показывающие существенное повышение точности получаемых решений по сравнению с традиционной процедурой дискретизации стержней в пластинчато-стержневых системах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пластинчато-стержневые системы, метод конечных элементов, стержневой конечный элемент, условие совместности перемещений.

Современные программные комплексы конечно-элементного анализа позволяют выполнять эффективное моделирование деформаций пластин. В то же время анализ работы пластинчато-стержневых конструкций во многих случаях вызывает определенные сложности. При эксцентричном присоединении стержней к пластине обычно получаются существенные скачки на эпюрах внутренних силовых факторов стержней. По мере сгущения сетки эти скачки уменьшаются достаточно медленно, что затрудняет анализ результатов расчетов. В настоящей работе представлена схема конечно-элементного описания стержней в рамках метода перемещений, которая удовлетворяет условию совместности перемещений на стыке стержня и пластины, направленных вдоль линии стыка. При этом значительно повышается точность получаемых решений.

Рассмотрим стержень, имеющий постоянное по длине поперечное сечение с главными центральными осями Cz и Cy (рис. 1). Ось Cz параллельна срединной плоскости Π подкрепляемой обшивки. Полагаем, что стержень может быть подвергнут растяжению-сжатию, поперечному изгибу в двух главных плоскостях и чистому кручению. Центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Считаем для стержня справедливыми классические гипотезы плоских сечений и ненадавливания волокон.

Первоначально введем конечно-элементное описание деформаций изгиба стержня в плоскости Cxy и растяжения-сжатия. В отличие от традиционных подходов к построению стержневых конечных элементов продольные перемещения будем аппроксимировать не по оси стержня Cx , а вдоль прямой ab (рис. 2), по которой главная плоскость Cxy стержня пересекается с плоскостью Π . На этой прямой введем узлы 1, 2.

Продольное перемещение точки, лежащей на оси стержня, представим выражением

$$u^c = u_{ab} - e_y \theta_z, \quad (1)$$

где u_{ab} - продольное перемещение точки прямой ab для рассматриваемого поперечного сечения стержня; e_y - проекция вектора \vec{e} на ось Cy ; θ_z - угол поворота данного сечения относительно оси Oz .

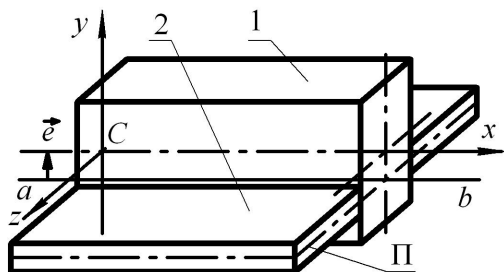


Рис. 1. Соединение стержня 1 с тонким листом 2: \vec{e} - вектор эксцентриситета при соединении стержня к обшивке

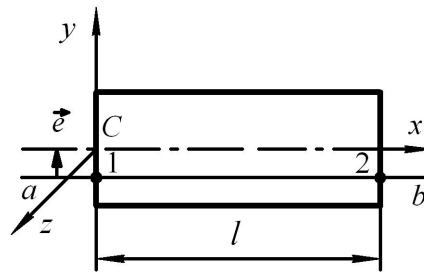


Рис. 2. Плоский стержневой конечный элемент

Вектор обобщенных деформаций конечного элемента определяется следующим образом:

$$\{\varepsilon_e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \chi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^c}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где ε_x - относительная линейная деформация вдоль оси стержня; χ_z - деформация изгиба стержня; v - проекция перемещения на ось Cy .

Соотношение (2) с учетом равенства (1) запишем таким образом:

$$\{\varepsilon_e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{ab}}{\partial x} - e_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Вектор узловых перемещений плоского стержневого конечного элемента представим в виде

$$\{\delta_e\} = \{u_{ab}^{(1)}, v^{(1)}, \theta_z^{(1)}, u_{ab}^{(2)}, v^{(2)}, \theta_z^{(2)}\}^T, \quad (4)$$

где $u_{ab}^{(i)}, v^{(i)}, \theta_z^{(i)}$ - перемещения u_{ab} , v и угол поворота θ_z для узла i ($i = 1, 2$).

Будем аппроксимировать перемещение u_{ab} по линейному закону, а v - с помощью полинома третьей степени [1]. Тогда матрица деформаций [2] конечного элемента

$$[B_e] = \begin{bmatrix} -1/l & -e_y\varphi_1 & -e_y\varphi_2 & 1/l & -e_y\varphi_3 & -e_y\varphi_4 \\ 0 & -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 & -\varphi_3 & -\varphi_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $\varphi_1 = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$; $\varphi_2 = -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}$; $\varphi_3 = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}$; $\varphi_4 = -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}$.

Вектор обобщенных напряжений стержня

$$\{\sigma_e\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где N – продольная сила; M_z - изгибающий момент относительно оси Cz .

Матрица упругости [2] конечного элемента

$$[D_e] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где E - модуль упругости материала; A - площадь поперечного сечения стержня; I_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси Cz .

Используя равенства (5)-(7) и зависимость для вычисления матрицы жесткости конечного элемента, занимающего объем V , [2]

$$[K_e] = \int_V [B_e]^T [D_e] [B_e] dV, \quad (8)$$

получим

$$[K_e] = \begin{bmatrix} f & 0 & -e_y f & -f & 0 & e_y f \\ \frac{12}{l^2}(e_y^2 f + n) & \frac{6}{l}(e_y^2 f + n) & 0 & -\frac{12}{l}(e_y^2 f + n) & \frac{6}{l}(e_y^2 f + n) & 0 \\ 4(e_y^2 f + n) & e_y f & -\frac{6}{l}(e_y^2 f + n) & 2(e_y^2 f + n) & 0 & -e_y f \\ \text{Симметрично} & & f & 0 & \frac{12}{l^2}(e_y^2 f + n) & -\frac{6}{l}(e_y^2 f + n) \\ & & & & -\frac{6}{l}(e_y^2 f + n) & 4(e_y^2 f + n) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Здесь $f = EA/l$; $n = EI_z/l$; l – длина конечного элемента.

В соответствии с формулами (5)-(7) внутренние усилия $N^{(i)}$, $M_z^{(i)}$ в сечениях по узлам 1, 2 можно определить таким образом:

$$\begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ M_z^{(1)} \\ N^{(2)} \\ M_z^{(2)} \end{Bmatrix} = [S_e] \{\delta_e\}, \quad (10)$$

где матрица

$$[S_e] = \begin{bmatrix} [D_e] & 0 \\ 0 & [D_e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{6e_y}{l^2} & \frac{4e_y}{l} & \frac{1}{l} & -\frac{6e_y}{l^2} & \frac{2e_y}{l} \\ 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{6e_y}{l^2} & -\frac{2e_y}{l} & \frac{1}{l} & \frac{6e_y}{l^2} & -\frac{4e_y}{l} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При рассмотрении пространственной работы стержня вектор узловых перемещений конечного элемента представим в виде

$$\{\delta_e\}_O = \begin{Bmatrix} \{\delta_e\} \\ \{\delta_e\}_I \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где $\{\delta_e\}_I = \{w^{(1)}, \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, w^{(2)}, \theta_x^{(2)}, \theta_y^{(2)}\}^T$; (13)

$w^{(i)}, \theta_x^{(i)}, \theta_y^{(i)}$ - значения проекции w перемещения узла i на ось Cz и углов поворота θ_x, θ_y поперечного сечения в этом узле относительно осей Cx и Cy ($i=1, 2$).

Тогда матрицу жесткости конечного элемента, отражающую все рассматриваемые деформации, можно записать следующим образом:

$$[K_e]_O = \begin{bmatrix} [K_e] & 0 \\ 0 & [K_e]_I \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $[K_e]_I$ - матрица, связанная с деформациями изгиба в плоскости Oxz и чистого кручения.

Матрица $[K_e]_I$ формируется по традиционной схеме [1] с учетом эксцентричного присоединения стержня к узлам на жестких консолях.

Пример

Приведем некоторые результаты расчета с помощью предлагаемого конечного элемента половины симметричной системы, в которой стержень эксцентрично подкрепляет лист обшивки (рис. 3). Кромка AD пластины защемлена, кромки AB, BC, CD свободны.

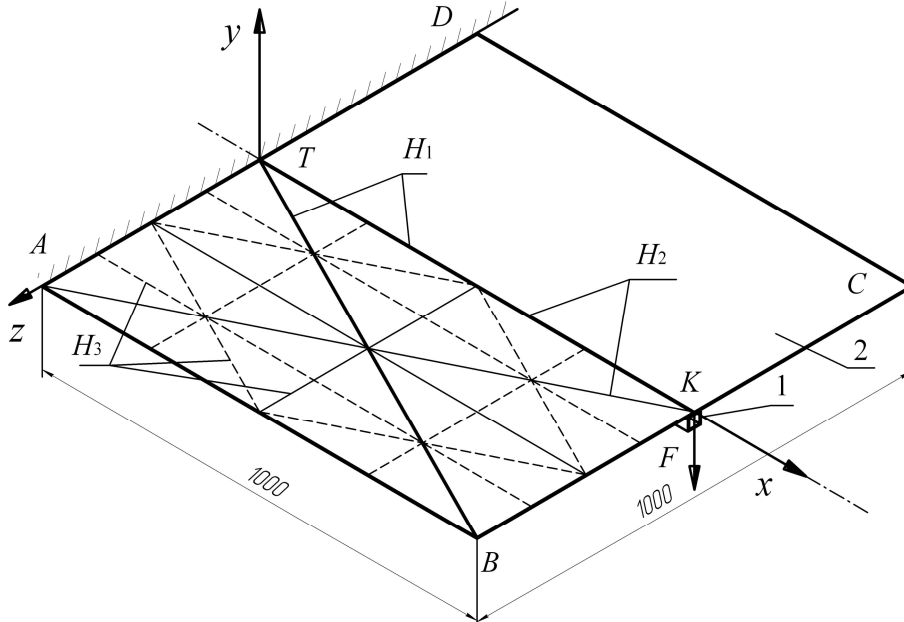
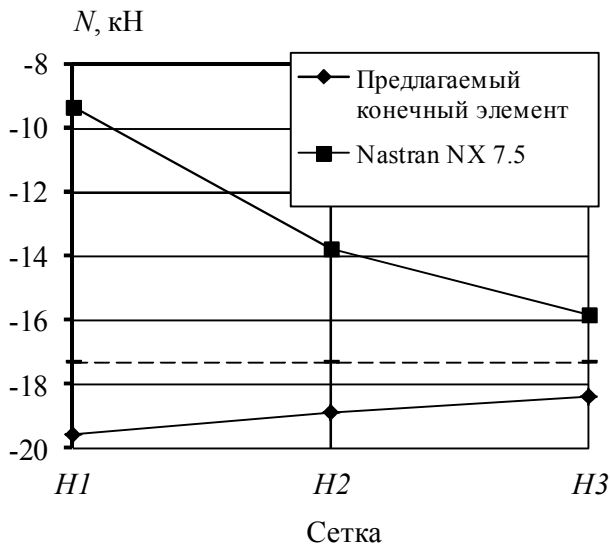
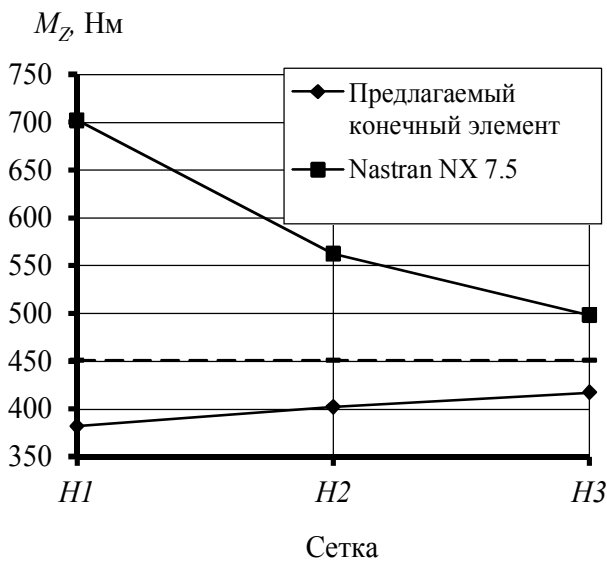


Рис. 3. Подкрепленная консольная пластина: 1 – стержень; 2 – обшивка

Задавалось: толщина листа $h = 3$ мм; сечение стержня – квадратная труба $60 \times 60 \times 3$ мм; материал листа и стержня – сталь с модулем упругости $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. На пластину действует сосредоточенная сила $F = 1$ кН.



а)



б)

Рис. 4. Внутренние усилия в стержне по сечению заделки: а – продольная сила; б – изгибающий момент

На рис. 4, 5 проиллюстрирована скорость сходимости рассматриваемых решений по мере сгущения сеток. Штриховыми линиями здесь отражены результаты, полученные с помощью пакета NASTRAN NX 7.5 для уточненной мелкой сетки H_L , дальнейшее сгущение которой не приводит к сколько-нибудь значительным изменениям результатов счета.

На рис. 6 приведены эпюры продольных сил и изгибающих моментов в стержне, найденные для сетки H_2 . Кроме того, на этих схемах штриховыми линиями показаны графики изменения вдоль стержня внутренних усилий, полученные в программном комплексе NASTRAN NX 7.5 с помощью сетки H_L .

Работа обшивки моделировалась с помощью треугольного трехузлового конечного элемента, в котором мембранные перемещения аппроксимировались по линейному закону, а прогиб – на основе методики, представленной в работе [3]. Рассматривались равномерные сетки H_j ($j = 1, 2, 3$) конечных элементов разной густоты. На рис. 3 сплошными толстыми линиями показана сетка H_1 , сплошными толстыми и тонкими линиями – сетка H_2 , сплошными и штриховыми линиями – сетка H_3 . Полученные решения сравнивались с результатами, установленными для тех же сеток с помощью пакета конечно-элементного анализа NASTRAN NX 7.5 (имеется лицензия на использование у Брянского государственного технического университета). В этом пакете треугольные трехузловые конечные элементы пластин близки по точности к реализуемому нами подходу к описанию деформаций тонкой обшивки, а для моделирования стержней применяются классические конечные элементы на жестких консолях.

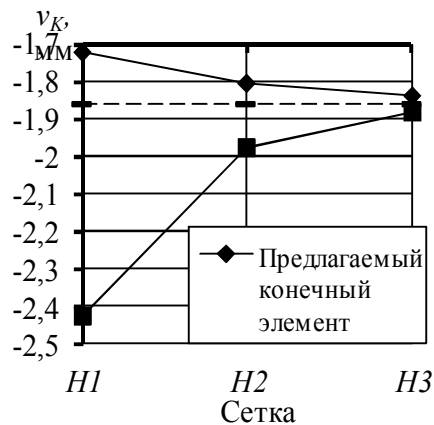


Рис. 5. Вертикальное перемещение стержня в узле K

Из рис. 4-6 видно, что предлагаемая нами аппроксимация перемещений позволила значительно повысить точность решений для крупных сеток H_1 , H_2 по сравнению с традиционной схемой дискретизации стержней в пластинчато-стержневых системах. При этом существенно снизились скачки по внутренним усилиям в стержне.

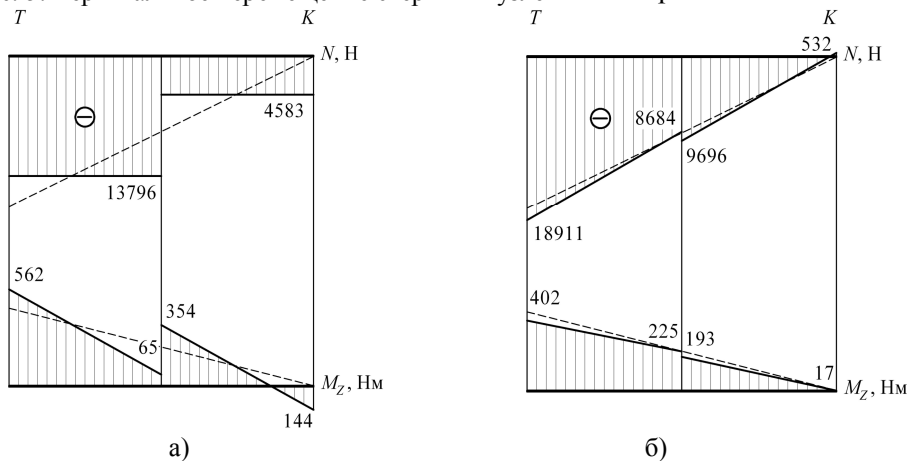


Рис. 6. Эпюры внутренних силовых факторов в стержне для сетки H_2 :

а – расчет в пакете Nastran NX 7.5; б – расчет с помощью разработанного стержневого конечного элемента

Л и т е р а т у р а

1. Аганов, В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В.П. Аганов. – М.: Изд. АСВ, 2000. – 152 с.
2. Zienkiewicz, O.C. The finite element method, Vol. 2: Solid mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 pp.
3. Serpik, I.N. Development of a new finite element for plate and shell analysis by application of generalized approach to patch test / I.N. Serpik // Finite Elements in Analysis & Design. – 2010. – Vol. 46, № 11. – P. 1017-1030.

IMPROVEMENT OF AN APPROXIMATION SCHEME FOR ROD FINITE ELEMENT DISPLACEMENTS TO ANALYZE THE REINFORCED PLATES

Serpik I.N., Shviryaev M.V., Tyutyunnikov A.I.

The rod finite element providing displacement compatibility in case of eccentric connection a rod with a thin plate in the direction along the interface circuit is developed. This approach to the approximation of displacements allows to reduce the discontinuities of the rod internal forces on nodes. The results of the reinforced plate calculation showing a significant increasing of the solution accuracy in the comparison with the traditional procedure of discretization of plate-rod systems are presented.

KEY WORDS: plate-rod systems, finite element method, rod finite element, displacement compatibility condition.