

## Расчет конструкций из композитных материалов

### ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ПЛИТЫ ИЗ КОМПОЗИТА ПОЛИЭСТЕР-ДЕРЕВО

ОЛОДОЭССЕЭММАНУЭЛЬ\*, канд.техн. наук;

АДЖОВИЭДМОНД\*\*, канд.техн. наук;

В.А.КОПНОВ\*\*\*, д-р техн.наук, профессор.

\*Институт Технологии Локоса/ Университет Абоме-Калави, Бенин

\*\*Политехническая Школа Абоме-Калави / Университет Абоме-Калави, Бенин

\*\*\* Военная академия РВСН им.Петра Великого, Москва, val-kopnov@yandex.ru

Работа посвящена разработке методики моделирования длительного поведения многослойных композитных конструкций под постоянными сложными нагрузками. Конкретно рассматривается вопрос об оценке длительной прочности некоторой модели из композита стеклопластик-дерево по критерию длительной прочности Гольденבלата-Копнова. Рассматриваемая модель является ортотропной трехслойной плитой типа «сэндвич», верхний и нижний слои которой выполнены из стеклотекстолита КАСТ-В, а средний слой – дерево (сосна). Исследование показало, что для подобного типа конструкции использование упомянутого критерия прочности возможно.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: трехслойная плита, композит, критерий длительной прочности.

#### Введение

На практике наиболее используемые плиты перекрытий зданий изготовлены либо из железобетона, либо из дерева. В первом случае для получения нужной прочностной способности часто требуются большие расходы материала (бетон + сталь), что удорожает стоимость строительства. Во втором случае известно, что деревянные перекрытия имеют свои ограничения по их способности держать большие эксплуатационные нагрузки длительное время. Поэтому сегодня нередко используют конструкции различной формы из композиционных материалов или композитов [1-3]. Их достоинствами являются высокая удельная прочность, низкая теплопроводность, высокая демпфирующая способность и др. Однако, они обладают специфическими особенностями строения и механического поведения, отличающими их от традиционных материалов, в частности, конструктивной неоднородностью, резкой анизотропией прочностных и деформационных свойств, низкой сдвиговой жесткостью, существенной сдвиговой ползучестью и др., что должно учитываться в расчетах. В работе [4] показано несколько типов панелей, изготовленных из стеклопластиков.

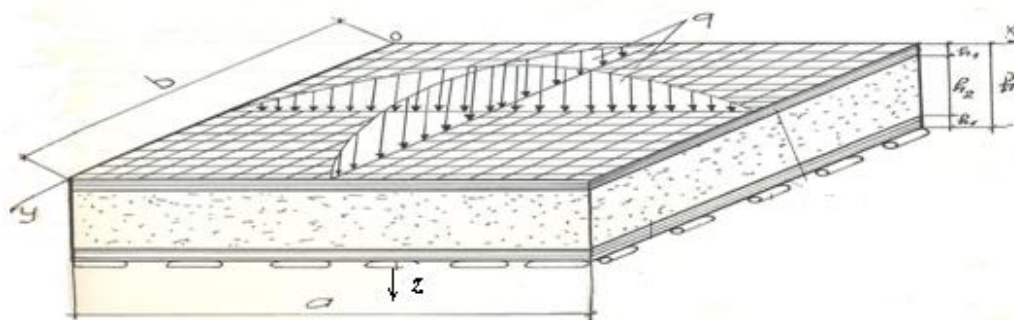


Рис.1

С целью избежать больших расходов материала предлагается применить трехслойную плиту перекрытия типа «сэндвич» из композита стеклопластик-дерево. Она состоит из двух слоев (нижнего и верхнего) стеклопластика КАСТ- В и среднего

слоя - из ламинированного дерева (рис.1). Известно что, стеклопластики в большей степени, чем металлы или сплавы, характеризуются временной зависимостью прочности, т.е. длительная прочность для них имеет существенное значение. Так, на рис. 2 показана кривая длительной прочности стеклопластика КАСТ-В, построенная по данным опытов на одноосное сжатие [5].

Длительная прочность ортогонально анизотропных (ортотропных) материалов рассматривается также в работах [6-8]. В частности, в [8] с целью предвидения длительной прочности ламинированных слоистых пластин разработана вероятностная модель развития повреждаемостей в материале. Эта модель предполагает, что каждый слой пластины состоит из большого числа микрообъемов, для которых используются функции вероятности, описывающие жесткости и напряжения в этих микрообъемах. Эти напряжения вычисляются с помощью теории слоистых пластин и теории невероятных функций. Определение жесткостей слоев производится на основе вероятностей повреждаемости микрообъемов с использованием теории невероятных процессов. Авторы показывают, что этот метод хорошо согласуется с экспериментальными данными. В работе [6] изложен метод построения феноменологических критериев длительной прочности анизотропных материалов. Этот метод основан на синтезе двух подходов в теории критериев прочности: подхода Мизеса-Хилла, Гольденבלата-Копнова, Захарова и подхода А.А Ильюшина. Построенный таким образом критерий длительной прочности учитывает многие особенности механических свойств материала и законы нагружения.

Цель настоящей работы – дать оценку длительной прочности указанного выше типа перекрытия из трехслойного материала, находящегося под постоянной во времени нагрузкой с синусоидальным законом нагружения, с помощью критерия из [6].

#### **Интегрально- операторный критерий длительной прочности**

Тензорное выражение критерия длительной прочности анизотропных материалов из [6] имеет следующий вид:

$$\int_0^t \Omega_{ik} (t - \xi) \sigma_{ik}(\xi) d\xi + \left[ \int_0^t \int_0^t \Omega_{ikmn} (t - \xi_1, t - \xi_2) \sigma_{ik}(\xi_1) \sigma_{mn}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq 1. \quad (1)$$

Здесь  $\xi$  - время из интервала  $0 \leq \xi \leq t$ ,  $\Omega_{ik}$ ,  $\Omega_{ikmn}$ -функции влияния, учитывающие временной характер прочностных свойств материала, вид и параметры этих функций устанавливаются экспериментально; разностный аргумент  $(t - \xi)$  предполагает их инвариантность к началу отсчета времени;  $\sigma_{ik}(\xi)$ ,  $\sigma_{mn}(\xi)$  - функционалы, характеризующие программу нагружения тела.

Одним из возможных представлений ядер  $\Omega_{ik}$ ,  $\Omega_{ikmn}$  могут быть, например, выражения вида:

$$\Omega_{ik} (t - \xi) = P_{ik} \cdot f_1(t - \xi), \Omega_{ikmn} (t - \xi_1, t - \xi_2) = P_{ikmn} \cdot f_2(t - \xi_1, t - \xi_2),$$

где  $P_{ik}$  и  $P_{ikmn}$ - тензоры статической прочности материала [9], функции  $f_1$  и  $f_2$  определяются из опытов на длительную прочность, ниже приводится один из возможных их видов.

#### **Определение компонентов тензоров прочности $P_{ik}$ и $P_{ikmn}$**

Для определения компонентов тензоров статической прочности  $P_{ik}$  и  $P_{ikmn}$  одной из самых адаптированных моделей является модель Гольденבלата-Копнова [9], которая учитывает как чувствительность материала к перемене знака нормальных напряжений ( $\sigma_b^p \neq \sigma_b^o$ ), так и к перемене знака касательных напряжений ( $\tau_b^+ \neq \tau_b^-$ ). Тензоры статической прочности  $P_{ik}$  и  $P_{ikmn}$  определяются через прочностные константы материала по изложенной, например в [9], методике.

В настоящей работе прочностные характеристики материала КАСТ-В по основным направлениям анизотропии, заимствованные из литературного источника [5],

приведены в табл.1, а рассчитанные значения компонентов статической прочности  $\Pi_{ik}$  и  $\Pi_{ikmn}$  - в табл.2.

Таблица 1

Материал	Основные пределы прочности, [МПа]							
	$\sigma_{в1}^p$	$\sigma_{в1}^c$	$\sigma_{в2}^p$	$\sigma_{в2}^c$	$\tau_{в0}$	$\tau_{в45}^+$	$\tau_{в45}^-$	$\tau_{вск}$
КАСТ-В	149	109	132	98		64	62	40

Таблица 2

Компоненты тензоров прочности $\Pi_{ik}, (\text{МПа})^{-1}$ и $\Pi_{ikmn}, (\text{МПа})^{-2}$					
$\Pi_{11}$	$\Pi_{22}$	$\Pi_{1111}$	$\Pi_{2222}$	$\Pi_{1122}$	$\Pi_{1212}$
$-1,232 \cdot 10^{-3}$	$-1,35 \cdot 10^{-3}$	$6,30 \cdot 10^{-3}$	$7,83 \cdot 10^{-5}$	$-5,51 \cdot 10^{-5}$	

В нашей работе будем использовать экспоненциальные ядра вида

$$\Omega_{ik}(t - \zeta) = b \Pi_{ik} \cdot e^{-\alpha(t - \zeta)}, \Omega_{ikmn}(t - \zeta_1, t - \zeta_2) = b^2 \Pi_{ikmn} \cdot e^{-\alpha(2t - \zeta_1 - \zeta_2)} \quad (2)$$

### Определение параметров $\alpha$ и $b$ экспоненциальных функций $f_1$ и $f_2$

Параметры  $\alpha$  и  $b$  экспоненциальных ядер находятся из опытов на длительное нагружение образцов при простых видах напряженного состояния – растяжении, сжатии, сдвиге. В нашей работе были использованы экспериментальные данные, взятые из публикаций [5] и [6].

На рис.2 приведены экспериментальные результаты по испытанию на длительную прочность при одноосном сжатии по основе и утку стеклотекстолита КАСТ-В, взятые из работы [5]. Значок  $\circ$  соответствует опытным данным на сжатие по основе стеклотекстолита, значок  $\blacktriangle$  - опытным данным на сжатие по утку.

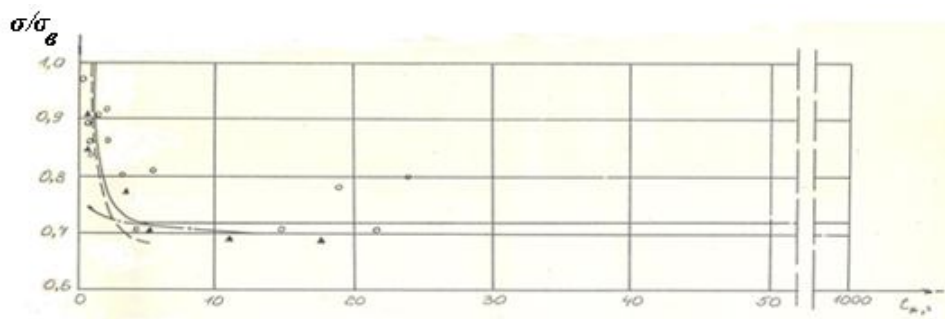


Рис.2

Результаты этих опытов можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$t_* = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\alpha \sigma}{b \sigma_g} \right),$$

где  $t_*$  - время до разрушения материала,  $\sigma$  - значение действующего напряжения,  $\sigma_g$  - предел прочности материала при одноосном сжатии. Значения параметров  $\alpha$  и  $b$  можно получить, решая систему уравнений в интервале времени  $\Delta t$ . Численные значения параметров  $\alpha$  и  $b$  композита КАСТ-В приведены в табл.3

Таблица 3

Материал	$\alpha, [\text{ч}^{-1}]$	$b, [\text{ч}^{-1}]$
КАСТ-В	1,20	1,70

Знание численных значений параметров  $\alpha$  и  $b$ , а также компонентов тензоров прочности  $\Pi_{ik}$  и  $\Pi_{ikmn}$ , позволяет установить функции влияния  $\Omega_{ik}$  и  $\Omega_{ikmn}$ .

### О законе нагружения

Характер нагружения отражается в критерии функциями напряжений, которые могут быть различного вида. Например, закон нагружения можно представить степенной функцией вида  $(\xi) = \dots$ . При длительном нагружении постоянными во времени напряжениями (например, собственный вес конструкции) будем иметь  $t=0$  и

$$= const. (3)$$

Итак, при экспоненциальных ядрах (2) и законе нагружения (3) критерий (1) принимает вид

$$\int_0^t b \Pi_{ik} e^{-\alpha(t-\xi)} \sigma_{ik(0)} d\xi + \left[ \int_0^t \int_0^t b^2 \Pi_{ikmn} e^{-\alpha(2t-\xi_1-\xi_2)} \sigma_{ik(0)} \sigma_{mn(0)} d\xi_1 d\xi_2 \right]^{0,5} \leq 1$$

После интегрирования получаем условие длительной прочности при сложном напряженном состоянии в следующем виде:

$$\frac{b}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \left[ \Pi_{ik} \sigma_{ik(0)} + \sqrt{\Pi_{ikmn} \sigma_{ik(0)} \sigma_{mn(0)}} \right] \leq 1 \text{ или}$$

$$\Pi_{ik} \sigma_{ik(0)} + \sqrt{\Pi_{ikmn} \sigma_{ik(0)} \sigma_{mn(0)}} \leq \frac{\alpha}{b(1 - e^{-\alpha t})}. (4)$$

### Исходные данные и результаты расчета плиты

Для расчета напряженно-деформированного состояния плиты был выбран метод начальных функций, наиболее эффективный при расчете слоистых систем, особенно таких, у которых модули упругости соседних слоев отличаются значительно. Программа расчета разработана авторами [10] и реализовывалась на вычислительном центре РУДН.

Объектом расчета, как уже отмечалось, являлась шарнирноопертая по контуру ортотропная трехслойная плита (рис.1) с размерами в плане  $a \times b$  общей толщиной  $h$ . Первый и третий слой из стеклотекстолита КАСТ-В. Второй (средний) слой – ламинированное дерево (сосна) со следующими упругими константами: модуль упругости  $E = 10 \cdot 10^3$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,5$ . В нашем случае принято соотношение толщин слоев  $h_1 = h_3 = h_2 / 4$ ,  $h/a = 0,1$ ;  $a = b = 1$  м. Упругие константы стеклотекстолита КАСТ-В даны в табл.4.

Таблица 4

Упругие константы	$E_x$ , МПа	$E_y$ , МПа	$E_z$ , МПа	$G_{xy}$ , МПа	$G_{yz}$ , МПа	$G_{zx}$ , МПа	$\mu_{xy}$	$\mu_{yz}$	$\mu_{zx}$
Статическая нагрузка	$2,22 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^4$	$0,4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	0,13	0,45	0,1
Длительная нагрузка	$1,95 \cdot 10^4$	$1,53 \cdot 10^4$	$0,32 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	0,23	0,46	0,12

Было принято, что нагрузка распределена на верхней плоскости плиты по закону

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$q_0$  – значение  $q$  в точке  $(0,5a; 0,5b; 0)$ . В нашем случае принято  $q_0 = 3$  МПа.

Расчет был произведен на длительное воздействие ( $t=1000$ ч) распределенной синусоидальной нагрузки, не изменяющейся во времени. В результате расчета было установлено, что напряженное состояние в самых нагруженных точках ( $x=0,5a; y=0,5b$ ;

$z=0$  и  $x=0,5a$ ;  $y=0,5b$ ;  $z=h=0,1a$ ) трехслойной плиты характеризуется следующими компонентами (в МПа) :

-на верхней поверхности:- на нижней поверхности:

$$\sigma_x = \sigma_{11} = -96,09; \sigma_x = \sigma_{11} = 96,27;$$

$$\sigma_y = \sigma_{22} = -80,88; \sigma_y = \sigma_{22} = 81,09;$$

$$\sigma_z = \sigma_{33} = -3 \text{ (пренебрегаем)}; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0;$$

#### Оценка длительной прочности плиты

Оценку длительной прочности плиты производим по условию длительной прочности (4), которое имеет следующее развернутое выражение для двухосного напряженного состояния:

$$\Pi_{11} \sigma_{11} + \Pi_{22} \sigma_{22} + \sqrt{\Pi_{1111} \sigma_{11}^2 + \Pi_{2222} \sigma_{22}^2 + 2\Pi_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22}} \leq \frac{\alpha}{b(1 - e^{-at})} \quad (5)$$

После подстановки в (5) численных значений всех приведенных выше параметров оно принимает следующий вид:

$$\text{-на верхней поверхности: } 0,118 + 0,109 + 0,487 = 0,714 > 0,707;$$

$$\text{-на нижней поверхности: } -0,118 - 0,109 + 0,488 = 0,261 < 0,707.$$

Условие прочности в опасной точечной поверхности плиты выполняется; в опасной точечной поверхности не выполняется. При кратковременном действии таких же напряжений оба условия соблюдались бы, так как в таком случае в правой части неравенств (5) стояла бы единица.

#### Л и т е р а т у р а

1. *J.M. Berthelot*. Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures. Masson, 1992.

2. *C.Baley*. Fibres naturelles de renfort pour matériaux composites. – 2004. – Ed. Technologies Ingénieur.

3. *D. Gay*. Matériaux composites, 5ème édition, 2005, Lavoisier.

4. *Зубарев Г.Н.* Конструкции из дерева и пластмасс. - М.: Высшая школа, 1990. – 287с.

5. *Белянкин Ф.П., Яценко В.Ф., Марголин Г.Г.* Прочность и деформативность стеклопластиков при двухосном сжатии. – Киев: Наукова думка, 1971. – 156 с.

6. *Копнов В.А.* Длительная прочность анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. - 1982. - № 2. – С. 41– 44.

7. *Копнов В.А., Олодо Эссе.* Об одном варианте построения критериев длительной прочности анизотропных материалов // Проблемы прочности. – 1982. - № 4. – С. 3 – 8.

8. *A. Dzenis*. Long-term strength and damage analysis of laminated composites. – AIAA Journal, 1997, Vol.35, n. 6, pp.1057-1063.

9. *Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А. и др.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков. - М.: Высшая школа, 1970. – 300с.

10. *Галилеев С.М., Матросов А.В.* Метод начальных функций для расчета пространственных анизотропных упругих систем // Статические и динамические задачи расчета сложных строительных конструкций: Сб. трудов ЛИСИ. – 1988. – с. 114– 119.

#### COMPORTEMENT A LONG TERME DU MATERIAU COMPOSITE POLYESTER-BOIS RENFORCE A FIBRES DE VERRE

OlodoEsseEmmanuel, Adjovi Edmond, V.A.Kopnov

Le présent travail est relatif à l'évaluation du comportement à long terme d'un matériau composite tri-couche verre/polyester-bois. L'objectif est l'évaluation de la résistance à long terme de ce matériau par le critère de Goldenblat-Kopnov.

KEY WORDS: Three-layer plate, composite, criterion of long durability.