

Теория упругости

СИСТЕМА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Д.Н. НИЗОМОВ*, д-р техн. наук, профессор;

А.А. ХОДЖИБОЕВ**, к-т техн. наук;

О.А. ХОДЖИБОЕВ*, инж.,

Н.Г. САЛОМОВ*, к-т физ.-мат. наук.

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Республики Таджикистан, 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267, эл.-почта: tiees@mail.ru

**Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков Раджабовых, 10; эл.-почта: hojiboev@mail.ru

В работе предлагается алгоритм решения задачи полупространства с подкрепленным отверстием произвольного очертания, которое находится под действием тектонических напряжений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плоская деформация – полупространство – крепь – горная выработка – упругое кольцо – бесконечность.

Подкрепление отверстия в виде упругого кольца, называемый крепью, в общем случае имеет механические характеристики G_1 - модуль сдвига, ν_1 - коэффициент Пуассона (рис. 1).

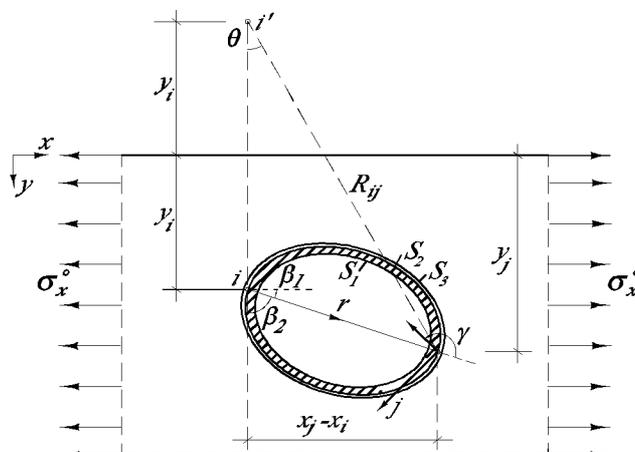


Рис. 1. Полупространство с подкрепленным отверстием

Задача моделируется в виде подобластей Ω_1 и Ω_2 совместно, работающих под действием растягивающих (сжимающих) тектонических напряжений действующих на бесконечность. На поверхности контакта двух подобласти Ω_1 и Ω_2 соблюдается условия совместности деформаций, на основе которого составляется, граничные условия согласно которых возникают одинаковые перемещения и напряжения (рис. 2). Эти же условия совместности деформаций являются обоснованием совместного решения систем уравнений для внутренней поверхности крепи и поверхности выработки. Интегральные уравнения соответствующие плоской задаче, записываются в виде тождества Сомильяна [2]:

$$\begin{aligned}
u(p) &= \int_s (P_x u_{kx}^* + P_y v_{ky}^*) ds_k - \int_s (P_{xk}^* u_k + P_{yk}^* v_y) ds + \int_{\Omega} (F_x u_{kx}^* + F_y v_{ky}^*) d\Omega, \\
v(p) &= \int_s (P_x u_{ky} + P_y v_{ky}) ds_k - \int_s (P_{xy}^* u_k + P_{yy}^* v_k) ds_k + \int_{\Omega} (F_x u_{ky}^* + F_y v_{ky}^*) d\Omega, \quad (1)
\end{aligned}$$

$k \in s, \bar{k}, p \in \Omega,$

где P_x, P_y – поверхностные силы, отмеченные звездочкой параметры, соответствуют фундаментальному решению Мелана:

$$u_{kx}^* = a \left[-(3-4\nu) \ln r_{ij} + \cos^2 \beta_1 + (3-4\nu) 2 \ln R_{ij} - 8(1-\nu) \ln R_{ij} + \right.$$

$$\left. + (3-4\nu) \sin^2 \theta + \frac{2y_i y_j}{R_{ij}^2} - \frac{4y_i y_j}{R_{ij}^2} \sin^2 \theta \right],$$

$$v_{kx}^* = a \left[\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_1 + (3-4\nu) \cos \theta \cdot \sin \theta - \frac{4y_i y_j}{R_{ij}^2} \cos \theta \cdot \sin \theta + \right.$$

$$\left. + 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right],$$

$$u_{ky}^* = a \left[\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + (3-4\nu) \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{4y_i y_j}{R_{ij}^2} \cos \theta \cdot \sin \theta - \right.$$

$$\left. - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right],$$

$$v_{ky}^* = a \left[-(3-4\nu) \ln r_{ij} + \cos^2 \beta_2 + (3-4\nu) \ln R_{ij} - \right.$$

$$\left. - 8(1-\nu) \ln R_{ij} + (3-4\nu) \cos^2 \theta - \frac{2y_i y_j}{R_{ij}^2} + \frac{4y_i y_j}{R_{ij}^2} \cos^2 \theta \right]$$

где $a = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}, \theta = \arctg \frac{(x_j - x_i)}{|y_i + y_j|}, \cos \beta_1 = \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}}, \cos \beta_2 = \frac{y_j - y_i}{r_{ij}}.$

Соответствующие фундаментальные напряжения на наклонной плоскости вычисляются по формулам [1]:

$$\begin{aligned}
P_{xx}^* &= -b \left\{ [(1-2\nu) + 2m_1^2] \frac{\cos \gamma}{r_{ij}} + 3(1-2\nu) \frac{\sin \theta}{R_{ij}} n_1 + \right. \\
&+ 2 \left[\sin^2 \theta - \frac{4y_i y_j}{R_{ij}^2} - \frac{2y_i^2}{R_{ij}^2} - 2(1-2\nu) \frac{y_j}{R_{ij}} \cos \theta \right] \frac{\sin \theta}{R_{ij}} n_1 + \\
&+ 16y_i y_j \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{R_{ij}^3} n_1 + (1-2\nu) \frac{3y_j + y_i}{R_{ij}^2} n_2 + 4y_i y_j \frac{\cos \theta}{R_{ij}^3} n_2 + \frac{2 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta}{R_{ij}} - \\
&\left. - 4(1-2\nu) \frac{y_j \cos^2 \theta}{R_{ij}^2} n_2 - \frac{16y_i y_j \cos \theta \cdot \sin^2 \theta}{R_{ij}^3} n_2 \right\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Остальные фундаментальные напряжения P_{yx}^* , P_{xy}^* и P_{y0}^* имеют аналогичные выражения.

Погружая область $\Omega + S$ в полуплоскость, где часть границы рассматриваемого тела совпадает с поверхностью полубесконечной плоскости, из теоремы взаимности работ с учетом $P_{xx}^* = P_{yx}^* = P_{xy}^* = P_{yy}^* = 0$ получаем

$$U(p) + \int_{s_1} P^* U ds = \int_s P U^* ds, \quad (3)$$

$$\text{где } S = S_0 + S_1, \quad p \in \Omega, \quad P^* = \begin{bmatrix} P_{xx}^* & P_{yx}^* \\ P_{xy}^* & P_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} u_{kx}^* & v_{kx}^* \\ u_{ky}^* & v_{ky}^* \end{bmatrix}, \quad U = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad P = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}.$$

Если часть границы рассматриваемой области не совпадает с поверхностью полуплоскости то уравнение (3) записывается в виде

$$U(p) + \int_s P^* U ds = \int_s P U^* ds, \quad P \in \Omega. \quad (4)$$

Если граница S_1 удаляется на бесконечность, то из (3) с учетом $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{A}_\infty} \left([U^*] \{D\} - [D^*] \{u\} \right) d\tilde{A}_\varepsilon = 0$ получим

$$u(p) + \int_{s_0} u^* P ds, \quad P \in s_0 + \Omega. \quad (5)$$

Характерная особенность уравнения (5) заключается в том, что оно не имеет сингулярностей и интеграл в правой части понимается в обычном смысле, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{P} \int_{s_\varepsilon} U^* \varepsilon d\varphi = 0. \quad (5')$$

Системы алгебраических уравнений для численного решения, при разбивке контуров S_1, S_2, S_3 на n_1, n_2 и n_3 элементов, задачи сводится к такому виду [1]: для упругого кольца (крепи):

$$\sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} a_{ij}^* u_j + \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} b_{ij} v_j - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_2} e_{ij} P_{x_j} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_2} q_{ij} P_{y_j} = -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} e_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} c_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} d_{ij}^* v_j - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_2} f_{ij} P_{x_j} - \sum_{j=n_1+1}^{j=n_1+n_2} h_{ij} P_{y_j} = -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} f_{ij} \cos \alpha_{ij},$$

$$i = 1, \dots, n_1 + n_2$$

для контура отверстия в полупространстве:

$$\sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{a}_{ij}^* u_j + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{b}_{ij} v_j - \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{e}_{ij} P_{x_j} - \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{q}_{ij} P_{y_j} = -\sigma_x^0 \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{e}_{ij} \cos \alpha_{ij},$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{c}_{ij} u_j + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{d}_{ij}^* v_j - \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{f}_{ij} P_{x_j} - \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{h}_{ij} P_{y_j} = \\
& = -\sigma_x^0 \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} \bar{f}_{ij} \cos \alpha_{ij}, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3, \quad a_{ij}^* = a_{ij} + \delta_{ij} / 2, \quad d_{ij}^* = d_{ij} + \delta_{ij} / 2,$$

где i – номер фиксированного элемента, j – номер элемента, в котором производится интегрирование.

В результате решения систем уравнений (6) и (7) определяются неизвестные перемещения на свободной поверхности упругого кольца (крепя) и неизвестные перемещения и напряжения на линии контакта крепя – поверхность выработки.

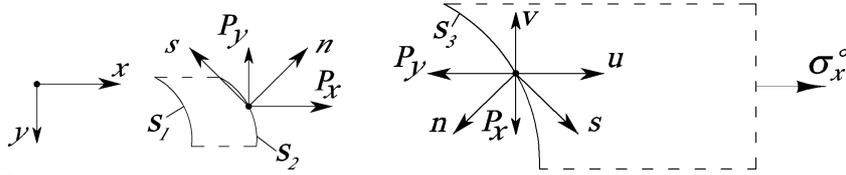


Рис. 2. Условие контакта крепя с контуром выработки в полупространстве

Коэффициенты

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, g_{ij}, f_{ij}, h_{ij}$$

системы уравнений (6) и аналогичные коэффициенты системы уравнений (7) определяются на основе фундаментальных решений Мелана.

При определении коэффициентов системы уравнений (6), которые относятся к крепя надо поставить значения G и v материала крепя. При вычислении коэффициентов системы уравнений (7), которые относятся к контуру отверстия выработки в полупространстве, надо учитывать G и v для материала окружающей геосреды.

Разрешающие уравнения (6) и (7) представим в стандартной матричной форме:

$$[A] \cdot \{X\} = \{B\}, \tag{8}$$

где $[A]$ – матрица коэффициентов, $\{X\}$ – вектор неизвестных, $\{B\} = B^0 \times \bar{P}^0$ – матрица свободных членов, которые имеют следующие структуры:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{n_1+n_2} & B_{n_1+n_2} & -E_{n_2} & -G_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{n_1+n_2} & D_{n_1+n_2} & -F_{n_2} & -H_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n_3} & B_{n_3} & -E_{n_3} & -G_{n_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{n_3} & D_{n_3} & -F_{n_3} & -H_{n_3} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\{X\} = \{u_{n_1+n_2}, v_{n_1+n_2}, P_{xn_2}, P_{yn_2}, u_{n_3}, v_{n_3}, P_{xn_3}, P_{yn_3}\}^T, \tag{10}$$

так как $P_{xn_2} = P_{xn_3}$, $P_{yn_2} = P_{yn_3}$, из-за того, что по условию совместности деформаций на границе контакта крепя с поверхностью выработки, поэтому матрицу (9) и вектор (10) могут быть представлены в таком виде:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{n_1+n_2} & B_{n_1+n_2} & -E_{n_2} & -G_{n_2} & 0 & 0 \\ C_{n_1+n_2} & D_{n_1+n_2} & -F_{n_2} & -H_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n_3} & B_{n_3} & -E_{n_3} & -G_{n_3} \\ 0 & 0 & C_{n_3} & D_{n_3} & -F_{n_3} & -H_{n_3} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\{X\} = \{u_{n_1+n_2}, v_{n_1+n_2}, P_{xn_2}, P_{yn_2}, u_{n_3}, v_{n_3}\}^T, \quad (12)$$

Элементы блоков матриц (9), (11) и векторов (10), (12) имеют структур соответствующих составляющим в формулах (6) и (7).

В матрицах (9) и (11) нули представляют блочные матрицы соответствующих размеров с нулевыми элементами.

При разбивке $n_1 = 8$, $n_2 = 8$ и $n_3 = 8$ матрица $[A]$ (11) имеет порядок 56×56 . Матрица правой части $[B]$ имеет следующий вид:

$$[B] = [B^0] \times \bar{P}^0, \text{ где } [B^0] = [EFE\bar{F}], \quad \bar{P}^0 = \bar{\sigma}_x^0.$$

Элементы матрицы $[B]$ вычисляются по формулам:

$$E = \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} e_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad F = \sum_{j=1}^{j=n_1+n_2} f_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_1 + n_2,$$

$$\bar{E} = \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} e_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad \bar{F} = \sum_{j=n_1+n_2+1}^{j=n_1+n_2+n_3} f_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3.$$

В результате решения системы уравнений (8) определяются искомые перемещения на поверхности упругого кольца, линии контакта упругого кольца с окружающим материалом и напряжения на линии контакта.

После определения перемещений на линии контакта и на контуре упругого кольца вычисляем деформации и по ним соответствующие напряжения. Таким образом, определим напряженно-деформированное состояния взаимодействия упругое кольцо – полупространство по линии контакта и по свободной поверхности.

Таким образом, разработан алгоритм решения статической задачи взаимодействия упругого кольца с полупространством в условиях плоского деформированного состояния на основе метода граничных уравнений.

Л и т е р а т у р а

1. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2000. – 282с.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872с.

SYSTEM OF RESOLVING EQUATIONS OF BOUNDARY INTEGRAL APPROACH FOR THE HALF-SPACE WITH REINFORCED HOLE UNDER THE TENSION TO INFINITY

J.N. Nizomov, A.A. Hojiboev, O.A. Hojiboev, N.G. Salomov

In this article, we solved the problem related to half-space with arbitrary shape's anchored openings. The half-space is under the tectonic stresses.

KEY WORDS: plane deformation – half-space – lining – mine opening – elastic tunnel ring-halfspace – infinity.