

**ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ МНОГОГРАННЫХ
КОРОБЧАТЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
НА БАЗОВОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
Тел. (495) 955-098-21; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

В статье рассматриваются коробчатые поверхности образуемые движением правильного многогранника, вписанного в окружность циклической поверхности. Если циклическая поверхность образуется движением окружности переменного радиуса, то и коробчатая поверхность будет переменного поперечного сечения. Если направляющая кривая циклической поверхности кривая линия то получаем криволинейную коробчатую поверхность.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: циклическая поверхность, направляющая кривая, образующая окружность, правильный многогранник, базовая поверхность

В окружность произвольного радиуса можно вписать равносторонний многоугольник. Для этого в окружность вписывается хорда с угловым раствором 2φ , $\varphi = \pi / K$, где K - целое число, равное числу сторон равностороннего многоугольника. Повторяя хорду K раз путем поворота на угол 2φ получаем замкнутый равносторонний многоугольник. Перемещая многоугольник вместе с образующей окружностью циклической поверхности [1-3] вдоль направляющей кривой, получаем в общем случае криволинейную многогранную коробчатую поверхность переменного поперечного сечения.

В зависимости от характера изменения параметров циклической поверхности можно выделить некоторые подклассы коробчатых поверхностей:

а) коробчатые поверхности постоянного сечения – образующие окружности постоянного радиуса;

б) коробчатые поверхности переноса – образующие окружности постоянного радиуса параллельные некоторой плоскости;

в) прямолинейные коробчатые конструкции – поверхности переноса с направляющей прямой линией;

г) плоскопараллельные коробчатые конструкции – образующие окружности переменного радиуса параллельны некоторой плоскости;

д) коробчатые конструкции конусного типа - плоскопараллельные коробчатые конструкции с линейным законом изменения радиуса образующей окружности и прямой линией центров;

е) нормальные коробчатые конструкции – образующие окружности лежат в нормальной плоскости линии центров;

ж) коробчатые конструкции с образующими равносторонними многоугольниками в плоскостях пучка – образуются на базовой циклической поверхности с окружностями в плоскостях пучка [4].

з) закрученные коробчатые поверхности – равносторонний многоугольник вращается в образующей окружности при ее движении вдоль линии центров.

Векторное уравнение базовой циклической поверхности имеет вид [1]

$$\rho(u, v) = r(u) + R_i(u)e(u, v), \quad (1)$$

где $\rho(u, v)$ - радиус вектор циклической поверхности; $r(u)$ - радиус вектор линии центров образующих окружностей циклической поверхности; $e(u, v) = e_0(u)\cos(v) + g_0(u)\sin(v)$ - вектор-функция окружности единичного радиуса в плоскости образующей окружности; $e_0(u), g_0(u)$ - ортогональные единичные вектора в плоскости образующей окружности; $R_i(u)$ - функция изменения радиуса образующих окружностей. Положение плоскости образующей окружности при движении вдоль линии центров определяется вектором единичной нормали $n(u)$. Вектора $e_0(u), g_0(u), n(u)$ могут быть привязаны к треугольнику Френе линии центров - τ, ν, β направляющей кривой базовой циклической поверхности [1].

Для получения векторного уравнения k -ой грани коробчатой поверхности в уравнении (1) необходимо уравнение образующей окружности (второе слагаемое уравнения (1)) заменить уравнением k -ой хорды равностороннего многоугольника. Вектор нормали k -ой хорды определяется вектором (рис. 1)

$$e_k = e(u, v_k) = e(u, 2k\varphi), \quad \varphi = \frac{\pi}{K} \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (\text{рис. 1, а}). \quad (2)$$

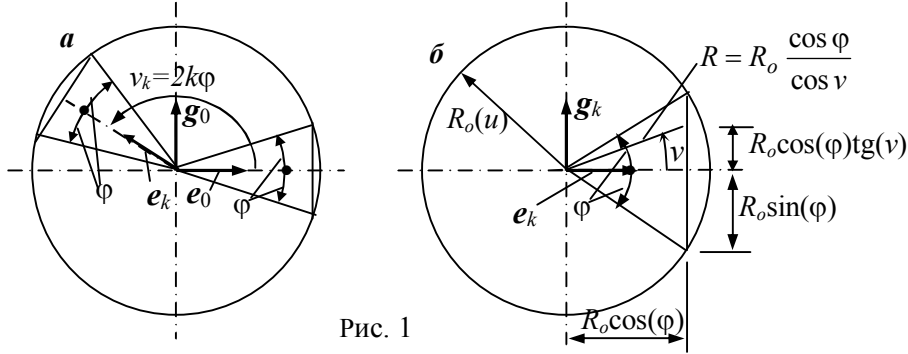


Рис. 1

В соответствии с рис. 1, б векторное уравнение k -ой хорды в полярной системе координат получим в виде

$$r_k(u, v) = R_i(u)\cos(\varphi)[e_k + g_k \operatorname{tg}(v)] = R(u, v)e(u, v, k), \quad -\varphi \leq v \leq \varphi, \quad (3)$$

где $R(u, v) = R_o(u)\frac{\cos \varphi}{\cos v}$; $g_k = g(u, v_k) = g(u, 2k\varphi) = -e_0 \sin(2k\varphi) + g_0 \cos(2k\varphi)$;
 $e(u, v, k) = e_k(u)\cos v + g_k(u)\sin v = e_o(u)\cos(v + 2k\varphi) + g_0(u)\sin(v + 2k\varphi)$;

Тогда, получаем векторное уравнение k -ой грани коробчатой поверхности

$$\rho_k(u, v) = r(u) + r_k(u, v) = r(u) + R(u, v)e(u, v, k). \quad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением поверхности с системой плоских координатных линий, где $r(u)$ - векторное уравнение направляющей кривой; $R(u, v)$ - уравнение плоской координатной линии в полярной системе координат в плоскости с нормалью в плоскости $n(u)$. Геометрия этого класса рассмотрена в работах [5, 6]. Для удобства записи будем использовать обозначения частных производных по аргументам u, v -

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u = f' \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_v = \dot{f}.$$

В формулах коэффициентов квадратичных форм в работе [4] используются параметры

$$T_{11} = s'(\tau e) + R'; \quad T_{12} = s'(\tau g) + R(e'_0 g_0); \quad T_{13} = s'(\tau n) - R(en');$$

$$\begin{aligned}
T_{21} &= \dot{R}; \quad T_{22} = R; \quad T_{23} = 0; \quad T_{31} = s''(\tau e) + s'k_s(e\nu) - R[(e'_0 g_0)^2 + (en')^2] + R''; \\
T_{32} &= s''(\tau g) + s'k_s(\nu g) + 2R'(e'_0 g_0) + R[(e''_0 g_0) + (e_0 n')(g_0 n') - (en')(gn')]; \\
T_{33} &= s''(n\tau) + s'k_s(\nu\nu) - 2R'(en') - R[(en'') + 2(e'_0 g_0)(gn')]; \quad T_{41} = \dot{R}' - R(e'_0 g_0); \\
T_{42} &= R' + \dot{R} \cdot (e'_0 g_0); \quad T_{43} = -[R(gn') + \dot{R}(en')]; \quad T_{51} = \ddot{R} - R; \quad T_{52} = 2\dot{R}; \quad T_{53} = 0, \\
s' &= |\mathbf{r}'| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right|; \quad k_s = s'k; \quad k - \text{кривизна направляющей кривой } \mathbf{r}(u). \quad (5)
\end{aligned}$$

Получим формулы некоторых параметров и их соотношений для уравнения образующей прямой линии многогранника (3):

$$\begin{aligned}
R(u, v) &= R_o(u) \frac{\cos \varphi}{\cos v}; \quad \dot{R} = R_o(u) \frac{\cos \varphi}{\cos v} tg v = R tg v; \quad T_{21}^2 + T_{22}^2 = \dot{R}^2 + R^2 = \frac{R^2}{\cos^2 v}; \\
\dot{R}' &= R' tg v; \quad \ddot{R} = R \left[(tg^2 v) + \frac{1}{\cos^2 v} \right] = R \frac{1 + \sin^2 v}{\cos^2 v}; \quad \ddot{R} - R = 2R tg^2 v; \\
T_{11} \cdot T_{21} + T_{12} T_{22} &= T_{11} \dot{R} + T_{12} R = d_1 \frac{R}{\cos v}; \quad d_1 = T_{11} \sin v + T_{12} \cos v; \\
d_{12} &= T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21} = d_2 \frac{R}{\cos v}; \quad d_2 = T_{11} \cos v - T_{12} \sin v; \\
T_{21} T_{32} - T_{22} T_{31} &= d_3 \frac{R}{\cos v}; \quad d_3 = T_{32} \sin v - T_{31} \cos v; \\
T_{21} T_{42} - T_{22} T_{41} &= \frac{R}{\cos v} (T_{42} \sin v - T_{41} \cos v) = \frac{R^2}{\cos^2 v} (e'_0 g_0); \\
R(gn') + \dot{R}(en') &= d_4 \frac{R}{\cos v}; \quad d_4 = (gn') \cos v + (en') \sin v; \\
T_{21} T_{52} - T_{22} T_{51} &= 2\dot{R}^2 - R(\ddot{R} - R) = 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

Коэффициенты квадратичных форм k -ой грани коробчатой поверхности получаем в виде

$$\begin{aligned}
E_k &= T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2; \quad F_k = T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} = d_1 \frac{R}{\cos v}; \quad G_k = T_{21}^2 + T_{22}^2 = \frac{R^2}{\cos^2 v}; \\
L_k &= \frac{(T_{21} T_{32} - T_{22} T_{31}) T_{13} + d_{12} T_{33}}{\Sigma} = \frac{d_3 T_{13} + d_2 T_{33}}{\sigma}; \quad N_k = \frac{(T_{21} T_{52} - T_{22} T_{51}) T_{13}}{\Sigma} = 0; \\
M_k &= \frac{(T_{21} T_{42} - T_{22} T_{41}) \cdot T_{13} + d_{12} T_{43}}{\Sigma} = \frac{(e'_0 g_0) T_{13} - d_2 d_4}{\sigma} \frac{R}{\cos v}, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\Sigma = \sqrt{EG - F^2} = \frac{R}{\cos v} \sigma - \text{дискриминант поверхности,}$$

$$\sigma = \sqrt{E_k - d^{12}} = \sqrt{T_{13}^2 + (T_{11} \cos v - T_{12} \sin v)^2}. \quad (8)$$

Для получения конкретных формул коэффициентов квадратичных форм необходимо задать: уравнение линии центров базовой циклической поверхности $\mathbf{r}(u)$, закон изменения радиуса образующей окружности $R(u)$, функцию нормали плоскости образующей окружности $\mathbf{n}(u)$, функцию орт системы прямоугольных координат в плоскости образующей окружности $\mathbf{e}_0(u)$.

В частности, для нормальных коробчатых поверхностей вектор нормали плоскости образующих окружностей совпадает с вектором касательной линии центров $\mathbf{n}(u) = \boldsymbol{\tau}$. Тогда, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{O}_{12} &= R'; & T_{12} &= R(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); & T_{13} &= s' - k_s R(\mathbf{e}\mathbf{v}); & T_{21} &= Rtg\mathbf{v}; & T_{22} &= R; \\
T_{23} &= 0; & T_{31} &= s'k_s(\mathbf{e}\mathbf{v}) - R[(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0)^2 + k_s^2(\mathbf{e}\mathbf{v})^2] + R''; \\
T_{32} &= s'k_s(\mathbf{g}\mathbf{v}) + 2R'(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0) + R[(\mathbf{e}''_0 \mathbf{g}_0) + k_s^2[(\mathbf{e}_0 \mathbf{v})(\mathbf{g}_0 \mathbf{v}) - (\mathbf{e}\mathbf{v})(\mathbf{g}\mathbf{v})]]; \\
T_{33} &= s'' - 2k_s R'(\mathbf{e}\mathbf{v}) - R[k'_s(\mathbf{e}\mathbf{v}) + k_s \chi_s(\mathbf{e}\beta) + 2k_s(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0)(\mathbf{g}\mathbf{v})]; \\
T_{41} &= R'tg\mathbf{v} - R(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); & T_{42} &= R' + Rtg\mathbf{v}(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); & T_{43} &= -k_s[R(\mathbf{g}\mathbf{v}) + \dot{R}(\mathbf{e}\mathbf{v})]; \\
T_{51} &= R \frac{1 + \sin^2 \nu}{\cos^2 \nu}; & T_{52} &= 2Rtg\mathbf{v}; & T_{53} &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если для нормальной коробчатой поверхности принять, что угол θ вектора \mathbf{e}_0 к нормали \mathbf{v} линии центров остается постоянным при движении вдоль линии центров, то для пространственной кривой многогранник коробчатой будет при движении вращаться вокруг касательной линии центров совместно с нормалью. Для плоской линии центров многогранник вращаться вокруг касательной не будет.

Если угол $\theta(u)$ вектора \mathbf{e}_0 с нормалью линии центров в процессе движения будет меняться, то будем получать *закрученную* коробчатую поверхность.

Если базовой циклической поверхность является циклическая поверхность с образующими окружностями в плоскостях пучка, то уравнение линии центров записывается с использованием цилиндрической системы координат

$$\mathbf{r}(u) = r(u)\mathbf{h}(u) + z(u)\mathbf{k}, \tag{10}$$

где $r(u)$ – расстояние от оси вращения до линии центров; $z(u)$ смещение по оси вращения; $\mathbf{h}(u) = \mathbf{i}(u)\cos \nu + \mathbf{j}(u)\sin \nu$ – уравнение окружности единичного радиуса в горизонтальной плоскости; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты прямоугольной системы координат. Для получения формул коэффициентов квадратичных форм нормальной коробчатой поверхности можно использовать формулы (5-8). В работе [2], где исследовалась геометрия поверхностей с системой плоских координатных в плоскостях пучка, получены формулы, учитывающие особенности геометрии этих поверхностей. Ниже приведены рисунки криволинейных многогранных коробчатых поверхностей, построенных в системе MathCad с различными базовыми поверхностями и параметрами определяющими характер многогранника.

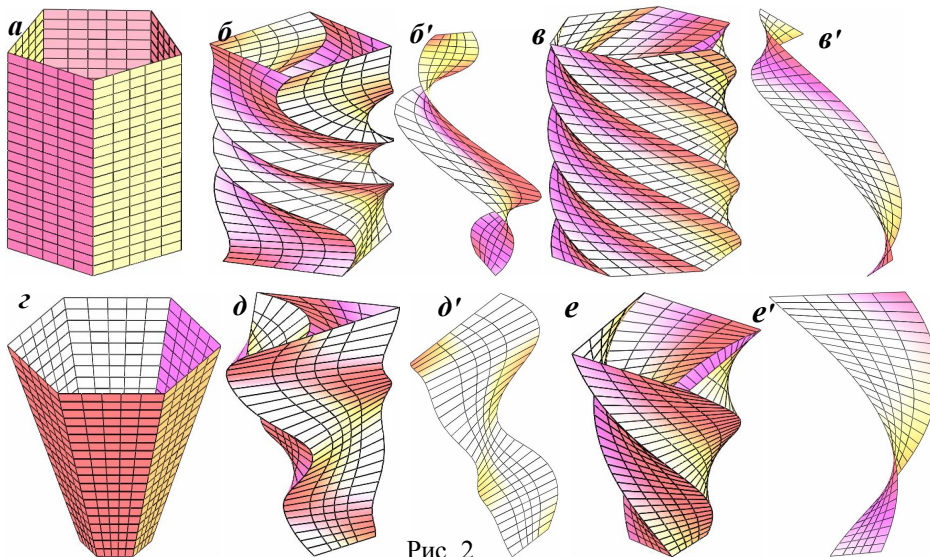


Рис. 2

На рис. 2 представлены цилиндрические и конические коробчатые поверхности, в том числе закрученные, с различным числом граней многогранника..

На рис. 2, б', в', д', е' представлены одна из граней соответствующей закрученной коробчатой поверхности.

На рис. 2, б, д угол закручивания меняется по синусоидальному закону $\theta = \sin tu$: б) $t = 2\pi$; д) $t = \pi$. На рис. 2, в, е линейный закон изменения угла закручивания $\theta = u$.

На рис. 3 базовой поверхностью является эллипсоид вращения – радиус образующей окружности меняется по закону $R_0 = \sqrt{a^2 - u^2} (b/a)$; $-a \leq u \leq a$; a, b полуоси эллипса. Базовая поверхность: в верхнем ряду вытянутый эллипсоид вращения $b/a = 1,5$; в нижнем ряду сплюснутый эллипсоид вращения $b/a = 0,5$. Угол закручивания: б, д) $\theta = \sin tu$, б) $t = 21$; д) $t = 0,75$; в) $\theta = 2u$, е) $\theta = u$.

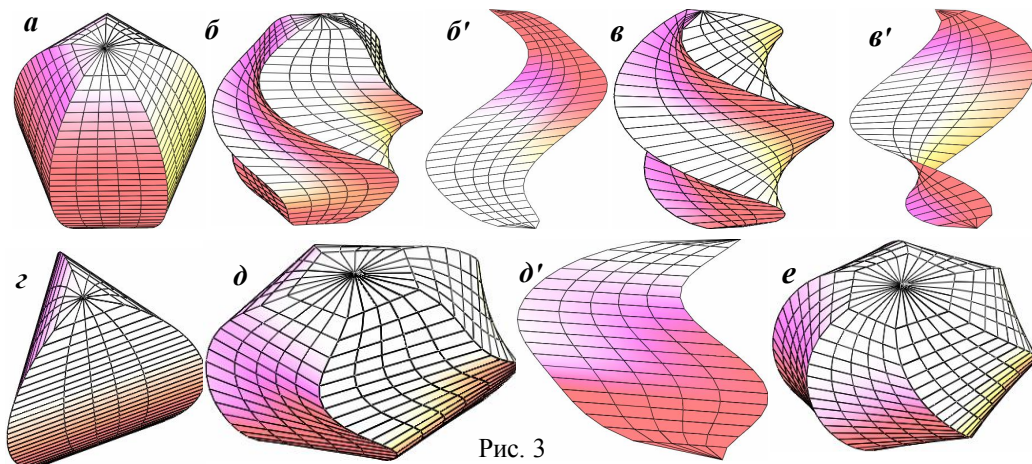


Рис. 3

Линией центров представленных на рис. 2, 3 поверхностей является прямая линия. Рассмотрим коробчатые поверхности с криволинейными линиями центрами базовой нормальной циклической поверхности. Принимаем линию центров образующих окружностей синусоиду $x = u$; $y = a \sin(u)$. На рис. 4 $a = 0,75$, $u = 0 \div 2\pi$ представлены коробчатые многогранные поверхности с различным числом граней, с образующими постоянного и переменного радиуса, в том числе закрученные коробчатые поверхности. На рис. 4, а поверхности постоянного сечения, на рис. 4, б радиус образующей окружности базовой поверхности меняется линейно $R_{ци} = c + du$, $c = 0,5$; $d = 0,5$. На рис. 4, в представлены закрученные ко-

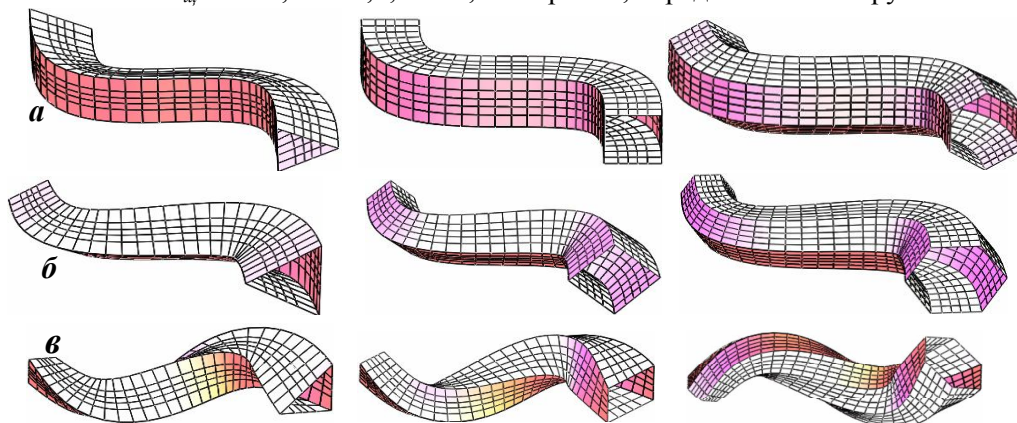


Рис. 4

робчатые поверхности с параметрами поверхностей аналогичными поверхностям рис.4,б.

Для незакрученных коробчатых поверхностей вид поверхности зависит начального угла θ_0 поворота вектора e_0 по отношению к вектору нормали линии центров. На рис. 4,а $\theta_0=0$ – начальные грани вертикальны; на рис. 4,б $\theta_0=\varphi=\pi/K$ – начальные грани наклонны.

На рис. 5 линией центров является гипербола $x = achu$; $y = bshu$; $a=2$; $b=1$; $11,5 \leq u \leq 1,5$. В верхнем ряду 4-хгранная поверхность $R_o = c + d \cos 2\pi u$; $c=0,4$; $d=0,25$; в нижнем ряду 5-игранная поверхность $R_o = c|u|$; $c=1$. Рис. 4,а, з $\theta_0=0$; рис. 4,б, д $\theta_0=\pi/K$. Рис. 4,в $\theta=\theta_0 - \cos \pi u$; $\theta_0=\pi/K$; Рис. 4,е $\theta=|u|$ - закрученные коробчатые поверхности.

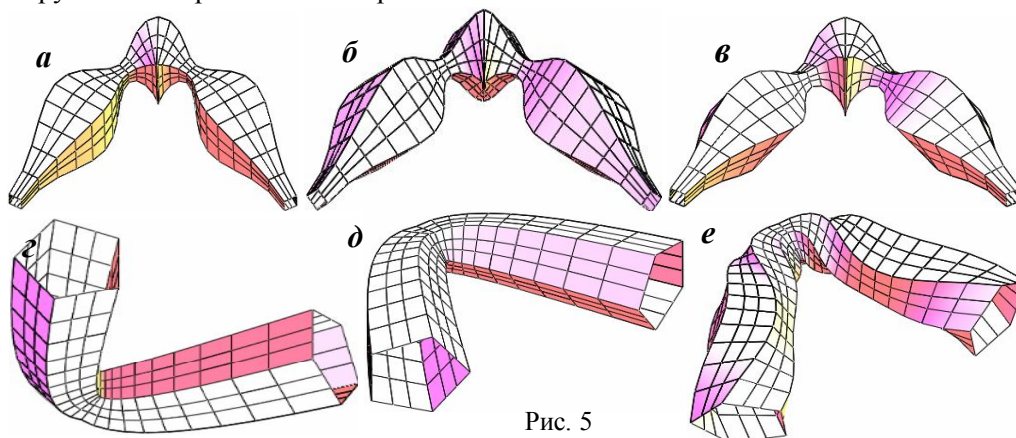


Рис. 5

В приведенных примерах в качестве базовых поверхностей использовались нормальные циклические поверхности. Приведем примеры с базовыми циклическими поверхностями с образующими окружностями в плоскостях пучка. На рис. 5 линией центров базовой циклической поверхности является эллипс. Радиус эллипса в полярной системе координат с полюсом в центре эллипса определяется формулой $r(u) = b((b^2/a^2) \cos^2 u - \sin^2 u)^{-1/2}$, $a = 5$; $b = 3$. В верхнем ряду представлены 3-х, 4-х, 5-и 6-игранные коробчатые поверхности постоянного сечения $u = (\pi/2 \div 2\pi)$., в нижнем ряду аналогичные поверхности переменного сечения $u = (0 \div 2\pi)$. Рис. 6,а - $R_o = c + d \sin tu$, $c = 1$; $d = 0,5$; $t = 2,5$; рис. 6,б - $R_o = c + du$, $c = 1$; $d = 0,25$; рис. 6,в - $R_o = c + d \cos tu$, $c = 1$; $d = 0,5$; $t = 1,5$; рис. 6,г - $R_o = c + du$, $c = 0$; $d = 0,25$.

На рис. 7 представлена закрученная 4-хгранная коробчатая поверхность постоянного сечения в плоскостях пучка с линией центров – эллипсом ($a = 5$; b

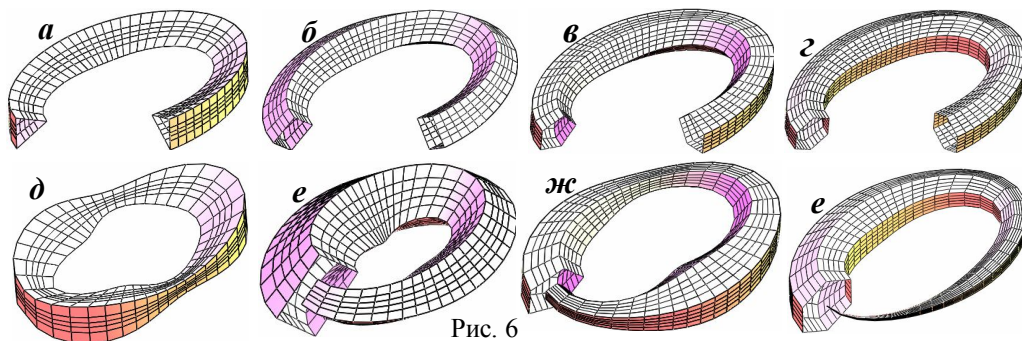


Рис. 6

$=3) u = (0 \div 2\pi)$. Угол закручивания $\theta = cu$: рис. 7, *a* – $c = 0,25$; *б* – $c = 0,5$; *в* – $c = 0,75$; *г* – $c = 1,0$. В нижнем ряду представлена 1-я ($k = 1$) грань коробчатой поверхности.

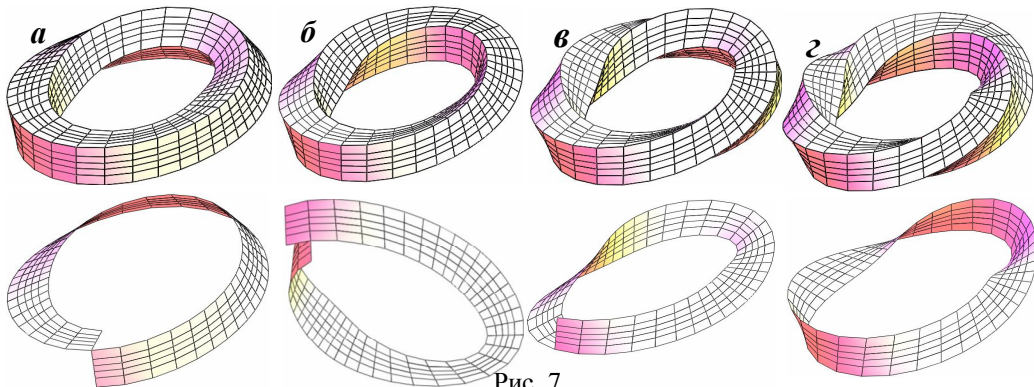


Рис. 7

Хотя все представленные поверхности являются замкнутыми, только при повороте на 360° ($c = 1$) все грани непрерывны, в других случаях одна грань смыкается с другой гранью.

На рис. 8 линией центров базовой циклической поверхности является архимедова спираль $r(u) = au$, $a = 1$. В первом ряду поверхности постоянного сечения $u = (0,5\pi \div 3\pi)$, $R_0 = 1$. Во втором ряду поверхности переменного сечения: Рис 8, *a* $u = (0 \div 3\pi)$; $R_0 = du$, $d = 0,5$; рис 8, *б* $u = (0,8\pi \div 3,5\pi)$, $R_0 = \tilde{n} + du$, $c = 4,0$, $d = -0,35$; рис 8, *в* $u = (0,5\pi \div 3\pi)$, $R_0 = \tilde{n} + d \cos tu$, $c = 2$; $d = 0,5$; $t = 4$. В третьем ряду закрученные коробчатые поверхности с переменным радиусом базовой циклической поверхности, соответствующем параметрам второго ряда. Рис. 8, *a* $\theta = \pi$, $d = 0,5$; рис 8, *б* $u = (0,8\pi \div 3,5\pi)$, $R_0 = c + du$, $c = 4,0$, $d = -0,35$; рис 8, *в* $u = (0,5\pi \div 3\pi)$, $R_0 = c + d \cos tu$, $c = 2$; $d = 0,5$; $t = 4$.

Приведенные рисунки многоугольных коробчатых поверхностей не охватывают весь широкий класс поверхностей. Возможны построения коробчатых

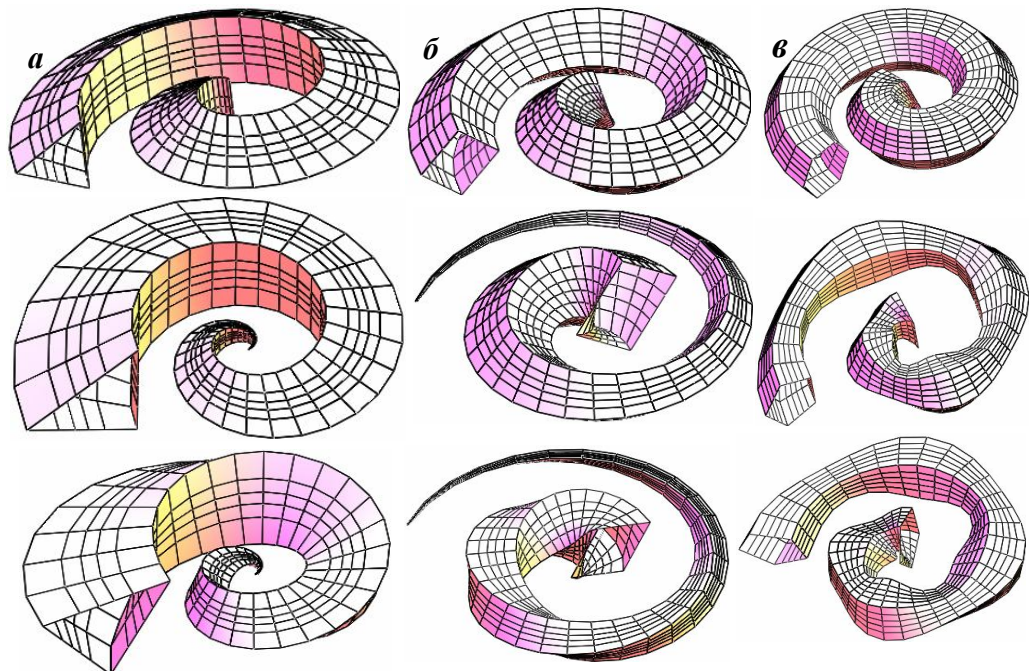


Рис. 8

конструкций с другими видами линий центров и характером изменений радиуса образующих окружностей базовых циклических поверхностей, в том числе с пространственными линиями центров образующих окружностей. Для построения поверхностей в системе Mathcad использовались векторные уравнения [7].

В научной литературе имеются примеры применения каналов коробчатого поперечного сечения, которые могут быть использованы в качестве теплообменных элементов широкого класса современной теплообменной аппаратуры. Например, в статье [8] рассматриваются поверхности с системой плоских образующих кривых в нормальной плоскости направляющей кривой. Приведено векторное уравнение поверхностей. Даются рисунки поверхностей с различными образующими кривыми с направляющей винтовой линией и окружностью построенных в системе «Matlab». В качестве примера приводится уравнение и коробчатой поверхности с образующей в виде равностороннего треугольника и с направляющей в виде винтовой линии.

Л и т е р а т у р а

1. *Иванов В.Н.* Геометрия циклических поверхностей//Сб. научных трудов аспирантов инженерного факультета, вып. VIII. – М.: УДН, 1971. – С. 137-142.

2. *Ivanov V.N.* The problems of the geometry and the architectural design of shells based on cyclic surfaces// Spatial structures in new and renovation projects of buildings and construction; theory, investigation, design, erection: Proceedings international congress ICSS-98, June 22-26, 1998, Moscow, Russia, vol. 2. – М.: CSRCR, 1998. -С. 539-546.

3. *Иванов В.Н.* Циклические поверхности (геометрия, классификация и конструирование оболочек)// Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы»: Труды международной научной конференции, Москва, 4-8 июня 2001 г. – М.: Изд-во РУДН. – С. 127-134.

4. *Иванов В.Н.* Геометрия и конструирование оболочек на основе поверхностей с системой координатных линий в плоскостях пучка// Пространственные конструкции зданий и сооружений. - Вып. 9. /Сб. научн. трудов МОО «Пространственные конструкции». – М.: «Девятка ПРИНТ», 2004. – С. 26-35.

5. *Иванов В.Н.* Некоторые вопросы теории поверхностей с семейством плоских координатных линий// Расчет оболочек строительных конструкций. – М.: УДН, 1977. - С.37-48.

6. *Иванов В.Н.* Некоторые проблемы геометрии поверхностей с системой плоских координатных линий// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 3. – С. 6-15.

7. *Иванов В.Н.* Векторные уравнения при построении поверхностей в системе «MathCad»// Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. «Инженерные исследования». – 2005. – № 2 (12). – С. 90-92.

8. *Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д., Мустакимова С.А.* Геометрическое моделирование сложных поверхностей пружинно-витых каналов теплообменных устройств// Известия КГАСУ. Сер. Теплоснабжение, вентиляция, кондиционирование воздуха, газоснабжение и освещение (Казань). –2011. – № 4(18). – С. 185-182

GEOMETRY AND FORMING OF THE POLYHEDRAL BOX TYPE SURFACES ON BASE CYCLIC SURFACE

V.N. Ivanov

The article concerns the questions of the formation of the thin-walled constructions with cross sections in the form of polyhedral. The bases of such constructions are cyclic surfaces with some line of the centers and the law of change of the radius of the generating circle. There are received the vector equation of the box-type surfaces with different number of the sides of the polyhedral. The coefficients of the main forms of the surfaces are received also.

KEY WORDS: cycle surfaces, base surface, directrix line, genetrix circle, polyhedral cross section.