

**РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ В КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧКАХ СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДАВЛЕНИЯ  
МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК**

Ф.В. РЕКАЧ, *канд. техн. наук, доцент*  
*Российский университет дружбы народов, Москва*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** круговая цилиндрическая оболочка, колебания

Неустановившееся движение несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) описывается уравнениями движения и неразрывности следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( g\rho z + p + \alpha\rho \frac{v^2}{2} \right) + \alpha'\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho\lambda}{2D} v|v| = 0, \quad [H / m^3] \quad (1)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad [H / (m^2 \cdot \text{сек})], \quad (2)$$

где  $p$  – абсолютное гидродинамическое давление;  $v$  – средняя по живому сечению скорость;  $g$  – ускорение свободного падения;  $z$  – геометрическая высота;  $\rho$  – плотность жидкости;  $t$  – время;  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения по длине;  $D$  – диаметр трубопровода;  $c$  – скорость распространения волны давления;  $\alpha$  и  $\alpha'$  – коэффициенты Кориолиса и Бусинеска, принято, что  $\alpha = \alpha' = 1$ .

Если в качестве основных характеристик потока принять расход  $Q = Fv$  и абсолютный гидродинамический напор (выраженный в метрах водяного столба)  $H = p/(\rho g)$ , то вместо уравнений (1) и (2) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( gFz + gFH + \frac{Q^2}{2F} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\lambda}{2DF} Q|Q| = 0, \quad [M^3 / сек^2] \quad (3)$$

$$\frac{Q}{F} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{gF} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad [M / сек], \quad (4)$$

Умножая уравнение (3) на  $c/(gF)$  и, прибавляя (вычитая) к полученному выражению (4), получим для прямой характеристики

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{F} + c; \quad (5) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c}{gF} \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{dz}{dx} + c \frac{\lambda}{2DgF^2} Q|Q| = 0, \quad (6)$$

для обратной характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{F} - c; \quad (7) \quad -\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c}{gF} \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{dz}{dx} + c \frac{\lambda}{2DgF^2} Q|Q| = 0. \quad (8)$$

Пусть значения  $H$  и  $Q$  в сечениях  $A$  и  $B$  трубопровода (рис.1) соответственно в моменты времени  $t_A$  и  $t_B$  известны. Требуется найти значения  $H_C$  и  $Q_C$  в сечении  $C$  ( $x_A < x_B < x_C$ ) в момент времени  $t_C$ , причем  $x_C$  и  $t_C$  неизвестны и определяются расчетом. Используя конечно-разностные уравнения первого порядка [1] в соответствии с (5)-(8), получим зависимости для определения  $t_C$ ,  $x_C$ ,  $H_C$ ,  $Q_C$  (для (11) суммируем (6) и (8); для (12) вычитаем (8) из (6)):

$$t_C = \frac{x_A - x_B - (Q_A/F + c_A)t_A + (Q_B/F - c_B)t_B}{(Q_B/F - c_B) - (Q_A/F + c_A)}, \quad (9)$$

$$x_C = x_A + (Q_A/F + c_A)(t_C - t_A), \quad (10)$$

$$Q_C = \frac{H_A - H_B + Q_A c_A / (gF_A) + Q_B c_B / (gF_B) - c_A (z_C - z_A) / (x_C - x_A) \cdot (t_C - t_A) + c_B (z_B - z_C) / (x_B - x_C) (t_B - t_C) - c_A \frac{\lambda Q_A |Q_A|}{2D_A g F_A^2} (t_C - t_A) + c_B \frac{\lambda Q_B |Q_B|}{2D_B g F_B^2} (t_B - t_C)}{c_A / (gF_A) + c_B / (gF_B)} + \frac{c_B (z_B - z_C) / (x_B - x_C) (t_B - t_C) - c_A \frac{\lambda Q_A |Q_A|}{2D_A g F_A^2} (t_C - t_A) + c_B \frac{\lambda Q_B |Q_B|}{2D_B g F_B^2} (t_B - t_C)}{c_A / (gF_A) + c_B / (gF_B)} \quad (11)$$

$$H_C = H_B + \frac{c}{gF_B} (Q_C - Q_B) + c_B \frac{(z_C - z_B)}{(x_C - x_B)} (t_C - t_B) + c_B \frac{\lambda Q_B |Q_B|}{2D_B g F_B^2} (t_C - t_B). \quad (12)$$

Расчет неустановившегося напорного движения жидкости ведется непосредственно по сетке характеристик по уравнениям (9)-(12) при заданных начальных и граничных условиях – рис. 1 и рис. 2. Величина шага по времени  $\Delta t$  и величина шага по  $x$  –  $\Delta x$  являются в общем случае переменным и определяются в процессе счета, т.е. сетка характеристик является нерегулярной.

Расчет граничных точек на левой границе ( $x_0 = 0$ ) ведется по формулам (7)

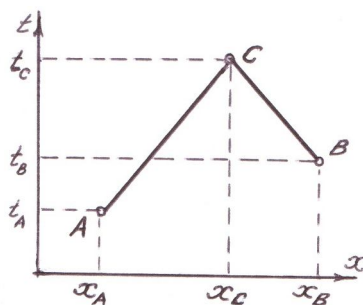


Рис. 1

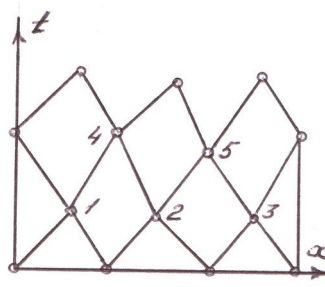


Рис. 2

и (8) для обратной характеристики и граничным условиям на левой границе. Расчет граничных точек на правой границе ( $x_N = L$ ) ведется по формулам (5) и (6) для прямой характеристики и граничным условиям, заданным на правой границе. В данной работе рассматривается регулярная прямоугольная сетка характеристик: шаг по времени  $\Delta t$  и координате  $\Delta x$  являются постоянными (рис. 3). Из уравнений (6) и (8) для характеристик  $RP$  и  $SP$  запишем расчетные зависимости для определения  $Q_p$  и  $H_p$ :

$$Q_p = \frac{H_R - H_S}{2c} gF + \frac{Q_R + Q_S}{2} - \frac{z_S - z_R}{x_S - x_R} gF \Delta t - \left( \frac{\lambda_R Q_R |Q_R|}{2DF} + \frac{\lambda_S Q_S |Q_S|}{2DF} \right) \frac{\Delta t}{2}, \quad (13)$$

$$H_p = H_R - \frac{Q_p + Q_R}{gF} c - \frac{z_p - z_R}{x_p - x_R} c \Delta t - \frac{\lambda_R Q_R |Q_R|}{2gDF^2} c \Delta t \quad (\text{по прямой характеристике}); \quad (14)$$

или

$$H_p = H_S - \frac{Q_p + Q_S}{gF} c - \frac{z_p - z_S}{x_p - x_S} c \Delta t - \frac{\lambda_S Q_S |Q_S|}{2gDF^2} c \Delta t \quad (\text{по обратной характеристике}). \quad (15)$$

В качестве начальных условий задаются параметры установившегося течения потока в гидравлической системе: 1) расходы  $Q_{yi}$  и напоры  $H_{yi}$  на каждом участке системы; 2) параметры системы – плотность жидкости  $\rho$ , диаметры  $D_i$  труб, отметки осей заложения труб  $z_i$  в расчетных сечениях, усредненные коэффициенты сопротивления  $\lambda_i$  и т.д.

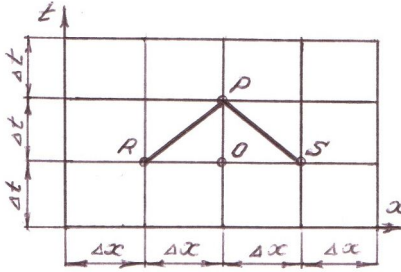


Рис.3

Начальное распределение давлений и расходов рассчитываются по уравнениям установившегося движения жидкости.

Из теории квазилинейных уравнений гиперболического типа следует, что для решения смешанной задачи необходимо задавать по два граничных условия на каждой границе. В то же время значения одной из неизвестных функций переносятся на границы соответствующими характеристиками. Поэтому на каждой границе следует задать по одному граничному условию. Уравнения (3) и (4) в характеристической форме имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (Q/F + c) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{c}{gF} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + (Q/F + c) \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + c \frac{dz}{dx} + \frac{c \lambda Q |Q|}{2DgF^2} = 0; \quad (16)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} - (Q/F - c) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{c}{gF} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + (Q/F - c) \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + c \frac{dz}{dx} + \frac{c \lambda Q |Q|}{2DgF^2} = 0. \quad (17)$$

При определении знака расхода  $Q$  применяется следующее правило: расход жидкости, втекающий в узел (направленный к узлу), имеет знак плюс, а расход жидкости, вытекающий из узла – знак минус. В соответствии с (16) и (17) и учетом правила знаков, получим формулу для определения абсолютного напора  $H_{k,j+1}$  в момент времени  $j+1$  на правой и левой границах в  $k$ -ом граничном сечении трубопровода:

$$H_{k,j+1} = R_k - r_k Q_{k,j+1} \cdot m, \quad (18)$$

$$R_k = H_{k,j} + Q_{k,j} \frac{c}{gF} m + \left( c + \frac{Q}{F} m \right) (H_{f,j} - H_{k,j}) \frac{\Delta t}{\Delta x} + c \frac{z_f - z_k}{\Delta x} \Delta t + \frac{c}{gF} (c \cdot m + Q/F) (Q_{f,j} - Q_{k,j}) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{c \lambda}{2gDF^2} Q_{k,j} |Q_{k,j}| \Delta t, \quad (19)$$

где буква  $f$  (например,  $H_{fj}$ ) означает сечение в узле рядом с граничным;  $r_k = c/(gF)$ ;  $m = 1$  для правой (прямой) характеристики и  $m = -1$  для левой (обратной).

Рассмотрим узел напорной системы, в котором соединяются  $N$  ветвей. Расход в  $k_n$ -ом граничном сечении  $n$ -ой ветви трубопровода в момент времени  $j+1$  определяется по формуле:

$$Q_{k_n, j+1} = \frac{R_{k_n, j+1} - H_{k_n, j+1}}{r_{k_n}} m. \quad (20)$$

В каждом узле пересечения труб выполняется условие неразрывности

$$\sum_{n=1}^{n=N} Q_{k_n, j+1} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{n=N} \left[ \frac{R_{k_n, j+1} - H_{k_n, j+1}}{r_{k_n}} m \right] - Q_{om} + Q_{np} = 0, \quad (21)$$

где  $Q_{om}$  и  $Q_{np}$  вытекающий и притекающий расходы из (в) узла через специальные устройства (используются только правые характеристики).

Пренебрегая местными потерями напора в узле, имеем:

$$H_{k_1, j+1} = H_{k_2, j+1} = \dots = H_{k_N, j+1}. \quad (22)$$

В соответствии с (21) и (22), получим:

$$H_{k_n, j+1} = \sum_{n=1}^{n=N} R_{k_n} / r_{k_n} / \sum_{n=1}^{n=N} 1 / r_{k_n}. \quad (23)$$

Пусть в узле напорной системы установлена задвижка. Потери напора в задвижке, установленной в  $i$ -ом сечении конструктивного участка трубопровода, определяются по формуле Вейсбаха:

$$h_3 = \xi_3 \frac{v^2}{2g} = \xi_3 \frac{Q^2}{2gF^2}, \quad (24)$$

где  $\xi_3$  – коэффициент потерь напора в задвижке, который зависит от степени ее открытия  $h/D$ ;  $v$  – скорость в трубе перед (за) задвижкой (рис. 4, рис. 5).

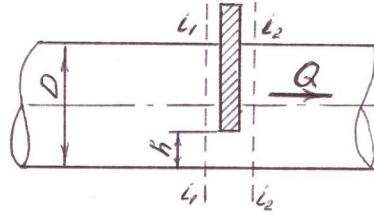


Рис. 4

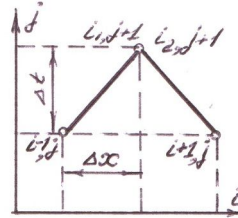


Рис. 5

Соотношения на прямой характеристике  $(i-1, j) - (i_1, j+1)$  имеют вид:

$$\frac{gF}{c} (H_{i_1, j+1} - H_{i-1, j}) + (Q_{i_1, j+1} - Q_{i-1, j}) + \frac{\lambda_{i-1, j} Q_{i-1, j} |Q_{i-1, j}| \Delta t + Fg(z_{i_1} - z_{i-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x}}{2FD} = 0, \quad (25)$$

$$-\frac{gF}{c} (H_{i_2, j+1} - H_{i+1, j}) + (Q_{i_2, j+1} - Q_{i+1, j}) + \frac{\lambda_{i+1, j} Q_{i+1, j} |Q_{i+1, j}| \Delta t + Fg(z_{i_2} - z_{i+1}) \frac{\Delta t}{\Delta x}}{2FD} = 0. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) справедливы для конструктивного участка с постоянным по его длине диаметром  $D$ . Очевидно, что

$$Q_{i_1} = Q_{i_2} = Q_i \quad (27)$$

для любого момента времени  $t$  до полного закрытия задвижки.

Уравнения (25)-(27) необходимо совместно решать с уравнением (24), представляемом в виде:

$$h_{3,j+1} = H_{i_1,j+1} - H_{i_2,j+1} = \xi_{3,j+1} \frac{Q_{i,j+1} |Q_{i,j+1}|}{2gF^2}, \quad (28)$$

где  $h_{3,j+1} = f(h_{j+1}/D)$  и зависит от конструкции задвижки.

Значения  $h_3 = f(h/D)$  приводятся в гидравлических справочниках. Из уравнений (27) и (28) находим:

$$H_{i_1,j+1} = H_{i-1,j} - \frac{c}{gF} (Q_{i_1,j+1} - Q_{i-1,j}) - \frac{c}{gF} \frac{\lambda_{i-1,j} Q_{i-1,j} |Q_{i-1,j}|}{2FD} \Delta t - c \frac{(z_i - z_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \Delta t, \quad (29)$$

$$H_{i_2,j+1} = H_{i+1,j} + \frac{c}{gF} (Q_{i_1,j+1} - Q_{i+1,j}) + \frac{c}{gF} \frac{\lambda_{i+1,j} Q_{i+1,j} |Q_{i+1,j}|}{2FD} \Delta t + c \frac{(z_i - z_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \Delta t. \quad (30)$$

Решая совместно (28), (29) и (30), получим:

$$\xi_{3,j+1} \frac{Q_{i,j+1} |Q_{i,j+1}|}{2gF^2} = (H_{i-1,j} - H_{i+1,j}) - \frac{2c}{gF} Q_{i,j+1} + \frac{c}{gF} (Q_{i-1,j} - Q_{i+1,j}) - \frac{c}{gF} \left( \frac{\lambda_{i-1,j} Q_{i-1,j} |Q_{i-1,j}|}{2FD} + \frac{\lambda_{i+1,j} Q_{i+1,j} |Q_{i+1,j}|}{2FD} \right) \Delta t - 2c \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta t \quad (31)$$

или

$$AQ_{i,j+1}^2 + BQ_{i,j+1} + C = 0,$$

$$\text{где } A = \frac{h_{3,j+1}}{2gF^2} \text{sign}(Q_{i,j+1}), \quad B = \frac{2c}{gF}, \quad C = (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) - \frac{c}{gF} (Q_{i-1,j} - Q_{i+1,j}) + \frac{c}{gF} \left( \frac{\lambda_{i-1,j} Q_{i-1,j} |Q_{i-1,j}|}{2FD} + \frac{\lambda_{i+1,j} Q_{i+1,j} |Q_{i+1,j}|}{2FD} \right) \Delta t + 2c \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta t. \quad (32)$$

Решая квадратное уравнение (32), определим

$$Q_{i,j+1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (33)$$

По формулам (31) и (32) вычисляем напоры  $H_{i_1,j+1}$  и  $H_{i_2,j+1}$ .

В узле напорной системы установлен воздушно-гидравлический колпак (ВГК). Рассмотрим воздушно-гидравлический колпак, установленный в  $i$ -ом сечении конструктивного участка трубопровода ( $1 \leq i < N$ ) (рис. 6).

В первом приближении находим расход  $Q_C$ , поступающий в ВГК на временном шаге  $j$ :

$$Q_C = Q_{i_1,j} - Q_{i_2,j}.$$

При политропическом законе расширения – сжатия воздуха

$$H_{C,j+1} w_{j+1}^\gamma = H_{C,j} w_j^\gamma, \quad (34)$$

где  $H_C$  – напор в сечении  $c-c$ ,  $w$  – объем воздуха в ВГК. Очевидно, что  $w_{j+1} = w_j - Q_C \Delta t$ , тогда

$$H_{C,j+1} = H_{C,j} \left( w_j / w_{j+1} \right)^\gamma.$$

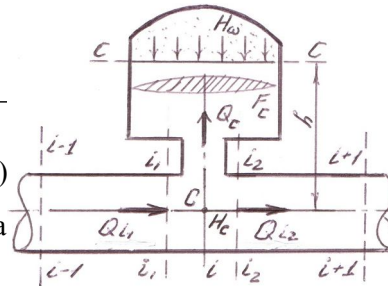


Рис.6

Зная напор в точке  $O$ , расходы в сечениях  $(i_1 - i_1)$  и  $(i_2 - i_2)$  на временном слое  $j+1$   $Q_{i_1,j+1}$  и  $Q_{i_2,j+1}$  для прямой и обратной характеристик определяются по формуле (20).

Во втором и последующих приближениях расход

$$Q'_C = (Q_C + Q_{i,j+1} - Q_{i_2,j+1})/2.$$

Для уточнения напора учитываются также напор  $h$  и потери напора в узле соединения ВГК с трубопроводом, определяемым по формуле

$$h_o = \xi_o \frac{Q_C |Q_C|}{2gF_C^2},$$

где  $\xi_o$  – коэффициент потерь напора в узле соединения.

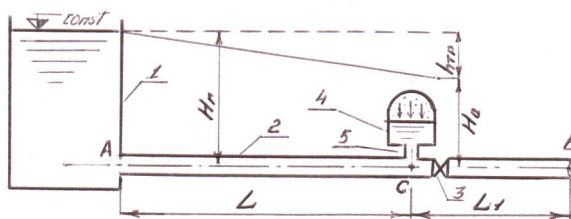


Рис.7

Рассмотрим схему трубопровода, показанную на рис. 7.

Цифрами обозначены: 1 – резервуар с постоянным давлением  $H_T$ ; 2 – трубопровод; 3 – задвижка; 4 – воздушно-гидравлический колпак (ВГК – стабилизатор давления); 5 – узел соединения ВГК с трубопроводом.

**Пример.** Исходные данные:  $L = 3500$  м,  $L_1 = 2670$  м, диаметр трубопровода  $D = 200$  м,  $H_T = 74$  м;  $h_{mp} = 42$  м скорость движения жидкости при установившемся движении  $v_y = 1,4$  м/сек (расход  $Q_y = 0,044$  м<sup>3</sup>/сек), коэффициент гидравлического трения  $\lambda = 0,0239$  скорость распространения волны давления  $c = 1000$  м/сек, коэффициент потерь напора в узле соединения колпака с трубопроводом  $\xi_o = 0$ .

На рис. 8 показаны графики изменения давления в точке C в зависимости от времени: кривая 1 – колебания давления без колпака; кривая 2 – колебания давления с колпаком объема  $w_0 = 0,4$  м<sup>3</sup>; кривая 3 – колебания давления с колпаком объема  $w_0 = 0,8$  м<sup>3</sup>. Задвижка закрывается в момент времени  $t = 50$  сек.

Расчеты хорошо согласуются с результатами, полученными в [2].

**Вывод:** При увеличении объема колпака значительно увеличивается период колебаний давления.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лямаев Б.Ф., Небольсин Г.П., Нелюбов В.А. Стационарные и переходные процессы в сложных гидросистемах// Л.: Машиностроение, 1978.–191 с.

2. Масс Е.И., Альшеев В.М. и др. Рекомендации по расчету неустановившегося движения многофазной жидкости в напорных системах// М.: ВНИИТС, 1984. – 103 с.

3. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах// М.: Энергоиздат, 1981. – 247 с.

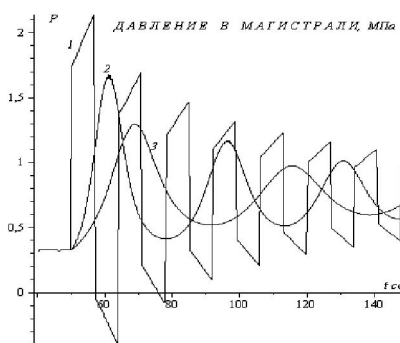


Рис.8

### ANALYSIS OF OSCILLATIONS IN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS BY CHARACTERISTICS METHOD WITH PRESSURE STABILIZER

Rekach F.V.

Analysis of effective facility for reduction of harmful water hammer wave processes in circular cylindrical shells based on elastic-damping action is described.