



Численные методы расчета конструкций

РАСЧЕТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МКЭ В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППРОКСИМАЦИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Н.А. ГУРЕЕВА, канд. техн. наук, ст.преподаватель
Ю.В. КЛОЧКОВ, д-р техн. наук, профессор
А.П. НИКОЛАЕВ, д-р техн. наук, профессор
Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия

На основе функционала Рейсснера с использованием соотношений теории упругости без упрощающих гипотез разработан алгоритм формирования смешанной матрицы связи между усилиями и перемещениями для шестигранного конечного элемента с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений. Для выражения перемещений и напряжений через узловые неизвестные использовался способ аппроксимации векторных и тензорных полей. Показана возможность использования разработанного конечного элемента в расчете тонких оболочек.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: МКЭ, шестигранный КЭ, функционал Рейсснера

Обычно при расчете оболочек на основе МКЭ используется теория поверхностей с гипотезами Кирхгофа или Тимошенко о деформировании нормали к срединной поверхности оболочки. В настоящей работе изложен алгоритм расчета произвольной оболочки на основе МКЭ в смешанной формулировке. Разработан объемный конечный элемент в форме шестигранника с узловыми неиз-

вестными в виде компонент вектора перемещений и компонент тензора напряжений. Для выражения компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и компонент ее тензора напряжений через узловые неизвестные использовался способ интерполяции векторных и тензорных полей трилинейными соотношениями, что позволило в неявном виде учесть смещение конечного элемента как жесткого целого.

На примере показана эффективность предложенного способа аппроксимации искомых величин как векторных и тензорных полей по сравнению с традиционным способом аппроксимации искомых величин как скалярных полей.

1. *Геометрия оболочки.* Положение произвольной точки M отсчетной поверхности определяется радиусом – вектором

$$\vec{R} = x^k (\theta^1, \theta^2) \vec{i}_k, \quad (1.1)$$

где θ^α – криволинейные координаты; x^k – декартовы координаты точки; \vec{i}_k – орты декартовой системы координат. Здесь и ниже греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские индексы – 1, 2, 3.

Векторы, касательные к отсчетной поверхности, определяются дифференцированием (1.1) по криволинейным координатам θ^α

$$\vec{a}_\alpha = x_{,\alpha} \vec{i}_k. \quad (1.2)$$

Орт нормали к отсчетной поверхности оболочки определится векторным произведением

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \quad (1.3)$$

Базис векторов $\{\vec{a}\}^T = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}\}$ в точке M можно представить в матричной форме

$$\{\vec{a}\} = [M] \{\vec{i}\}, \quad (1.4)$$

где $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$ – орты декартовой системы координат; $[M]$ – матрица коэффициентов. Дифференцированием (1.4) определяются производные базисных векторов произвольной точки отсчетной поверхности оболочки

$$\{\vec{a}_{,\alpha}\} = [N_{,\alpha}] \{\vec{i}\}. \quad (1.5)$$

Используя (1.4), производные (1.5) можно представить разложением по векторам базиса рассматриваемой точки

$$\{\vec{a}_{,\alpha}\} = [N_{,\alpha}] [M]^{-1} \{\vec{a}\} = [m^\alpha] \{\vec{a}\}. \quad (1.6)$$

2. *Перемещения и деформации.* Положение точки M^t , отстоящей на расстоянии t от отсчетной поверхности, определяется радиусом-вектором

$$\vec{R}^t = \vec{R} + t\vec{a}. \quad (2.1)$$

Базисные векторы точки M^t определяются дифференцированием (2.1)

$$\vec{g}_\alpha = \vec{a}_\alpha + t\vec{a}_{,\alpha}; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}^t_{,t} = \vec{a}. \quad (2.2)$$

Вектор перемещения произвольной точки M^t выражается в локальном базисе

$$\vec{V} = v^\rho \vec{a}_\rho + v\vec{a} = \{\vec{a}\}^T \{v\}, \quad (2.3)$$

где $\{v\}^T = \{v^1, v^2, v\}$ – вектор-строка компонент вектора перемещений точки M^t .

Производные вектора перемещения по координатам α , t с учетом (1.6) определяются выражениями

$$\vec{V}_{,\alpha} = f_\alpha^\rho \vec{a}_\rho + f_\alpha \vec{a}; \quad \vec{V}_{,t} = v_{,t}^\rho \vec{a}_\rho + v_{,t} \vec{a}, \quad (2.4)$$

где f_α^ρ, f_α – функции компонент вектора перемещения и их производных.

Положение точки M^{t*} в деформированном состоянии оболочки определяется радиусом-вектором

$$\vec{R}^{t*} = \vec{R} + t\vec{a} + \vec{V} = \vec{R}^t + \vec{V}. \quad (2.5)$$

Базисные векторы M^{t*} в деформированном состоянии оболочки определяются дифференцированием (2.5)

$$\vec{g}_\alpha^* = \vec{R}_{,\alpha}^{t*} = \vec{R}_{,\alpha}^t + \vec{V}_{,\alpha} = \vec{g}_\alpha + f_\alpha^\rho \vec{a}_\rho + f_\alpha \vec{a}; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,t}^{t*} = \vec{a} + \vec{V}_{,t}. \quad (2.6)$$

Деформации в произвольной точке определяются как разности компонент метрических тензоров деформированного и исходного состояний [1]

$$\varepsilon_{ij} = (\vec{g}_{ij}^* - \vec{g}_{ij})/2 = (\vec{g}_i \vec{V}_{,j} + \vec{g}_j \vec{V}_{,i} + \vec{V}_{,i} \vec{V}_{,j})/2. \quad (2.7)$$

Используя (2.2) и (2.4), линейную часть соотношений (2.7) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [L]\{v\}, \quad (2.8)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23}\}$ – вектор-строка деформаций в точке M^t ; $[L]$ – матрица дифференциальных операций.

3. Закон Гука и функционал Рейсснера. Соотношения между деформациями и напряжениями в произвольной системе координат между компонентами тензоров деформаций и напряжений имеют вид [1]

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\mu}{E} J_1(\sigma) g_{ij} + \left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) g_{im} g_{jn} \sigma^{mn}, \quad (3.1)$$

или в матричной форме

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}, \quad (3.2)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}$ – вектор-строка напряжений произвольной точки оболочки; $J_1(\sigma) = g_{mn} \sigma^{mn}$ – первый инвариант тензора напряжений; E – модуль упругости материала; μ – коэффициент Пуассона.

Функционал Рейсснера для оболочки, нагруженной поверхностной нагрузкой, имеет вид [2]

$$\Pi_R = \int_V \{\sigma\}^T [L]\{v\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [D]\{\sigma\} dV - \int_S \{v\}^T \{q\} ds, \quad (3.3)$$

где V – объем оболочки; S – поверхность оболочки с заданными внешними силами; $\{q\}^T = \{q^1 q^2 q^3\}$ – вектор поверхностных нагрузок.

4. Смешанная матрица деформирования конечного элемента. Объемный конечный элемент выбран в форме шестигранника произвольного слоя оболочки с узлами i, j, k, l нижней грани и узлами m, n, p, h верхней грани (рис. 1, а). Для выполнения численного интегрирования по объему шестигранника глобальные координаты θ^p и t аппроксимировались трилинейными соотношениями через локальные координаты куба (рис.1, б), изменяющиеся в пределах

$$-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1,$$

$$\lambda = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\lambda_y\}, \quad (4.1)$$

где

$$\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$$

– вектор-строка узловых значений величины λ . Под символом λ понимаются координаты θ^p, t . Производные глобальных коор-

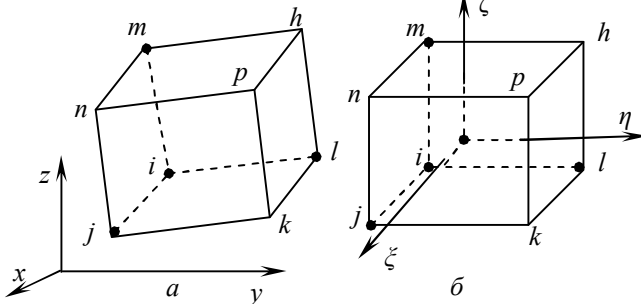


Рис. 1

динат в локальной системе $\theta_{,\xi}^\alpha, \theta_{,\eta}^\alpha, \theta_{,\zeta}^\alpha, t_{,\xi}, t_{,\eta}, t_{,\zeta}$ и локальные координаты в глобальной системе $\xi_{,1}, \xi_{,2}, \xi_{,i}, \eta_{,1}, \eta_{,2}, \eta_{,i}, \zeta_{,1}, \zeta_{,2}, \zeta_{,i}$ определяются дифференцированием (4.1). Векторные поля перемещений и тензорные поля напряжений внутренней точки конечного элемента аппроксимируются через узловые неизвестные трилинейными соотношениями

$$\vec{V} = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_y^T \{\vec{V}_y\}, \quad \tilde{\sigma} = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_y^T \{\tilde{\sigma}_y\}, \quad (4.2)$$

где $\{\vec{V}_y\}^T = \{\vec{V}^i \vec{V}^j \vec{V}^k \vec{V}^m \vec{V}^n \vec{V}^p \vec{V}^h\}$ – строка векторов перемещений узловых точек;

$$\tilde{\sigma} = \sigma^{11} \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \sigma^{22} \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \sigma^{33} \vec{a} \vec{a} + 2\sigma^{12} \vec{a}_1 \vec{a}_2 + 2\sigma^{13} \vec{a}_1 \vec{a} + 2\sigma^{23} \vec{a}_2 \vec{a} = \{\vec{a}\}^T \{\sigma\} -$$

тензор напряжений внутренней точки конечного элемента;

$$\tilde{\sigma}^w = \sigma^{11w} \vec{a}_1^w \vec{a}_1^w + \sigma^{22w} \vec{a}_2^w \vec{a}_2^w + \sigma^{33w} \vec{a}^w \vec{a}^w + 2\sigma^{12w} \vec{a}_1^w \vec{a}_2^w + 2\sigma^{13w} \vec{a}_1^w \vec{a}^w + 2\sigma^{23w} \vec{a}_2^w \vec{a}^w = \{\vec{a}^w\}^T \{\sigma^w\}$$

– тензор напряжений узловой точки конечного элемента ($w = i, j, k, l, m, n, p, h$);

$\{\tilde{\sigma}_y\}^T = \{\tilde{\sigma}^i \tilde{\sigma}^j \tilde{\sigma}^k \tilde{\sigma}^l \tilde{\sigma}^m \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^p \tilde{\sigma}^h\}$ – строка тензоров напряжений в узловых точках.

Базисные векторы узловых точек $\{\vec{a}^w\}^T = \{\vec{a}_1^w, \vec{a}_2^w, \vec{a}^w\}$ с учетом (1.4) выражаются через базисные векторы произвольной внутренней точки $\{\vec{a}\}^T = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}\}$ конечного элемента

$$\{\vec{a}^w\}_{3 \times 1}^T = [M^w] [M]^{-1} \{\vec{a}\}_{3 \times 3} = [N^w]_{3 \times 1} \{\vec{a}\}_{3 \times 1}, \quad (w = i, j, k, l, m, n, p, h). \quad (4.3)$$

С использованием (4.3) диадные произведения базисных векторов узловой точки $\{\vec{a}^w\}$ можно выразить через диадные произведения базисных векторов произвольной точки конечного элемента $\{\vec{a}\}$ в матричной форме

$$\{\vec{a}^w\}_{6 \times 1} = [G^w]_{6 \times 6} \{\vec{a}\}_{6 \times 1}, \quad (w = i, j, k, l, m, n, p, h). \quad (4.4)$$

Столбец узловых векторов перемещений может быть представлен матричным соотношением

$$\{\vec{V}_y\}_{8 \times 1} = [\vec{T}^w]_{8 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1}, \quad (4.5)$$

где элементами матрицы $[\vec{T}^w]$ являются базисные векторы узловых точек, а

$$\{v_y\}_{1 \times 24}^T = \{v^{1i} v^{2i} \dots v^h\}.$$

Векторы перемещения внутренней точки конечного элемента и его производные, учитывая (4.5) и (4.3), можно представить матричными выражениями

$$\vec{V} = \left\{ f \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right)_{1 \times 8} \right\}_{8 \times 1}^T \{\vec{V}_y\}_{8 \times 1} = \{\vec{a}\}_{1 \times 3}^T \left[\begin{matrix} f_1 [N^i]^T & f_2 [N^j]^T & \dots & f_8 [N^h]^T \end{matrix} \right]_{3 \times 3} \{v_y\}_{3 \times 3}; \quad (4.6)$$

$$\vec{V}_{,\alpha} = \left\{ f \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right)_{,\alpha} \right\}_{1 \times 8}^T \{\vec{V}_y\}_{8 \times 1} = \{\vec{a}\}_{1 \times 3}^T \left[\begin{matrix} f_{,\alpha}^1 [N^i]^T & f_{,\alpha}^2 [N^j]^T & \dots & f_{,\alpha}^8 [N^h]^T \end{matrix} \right]_{3 \times 3} \{v_y\}_{3 \times 3},$$

где $\left\{ f \left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right)_{,\alpha} \right\}_{1 \times 8}^T = \{f_{,\xi} \xi_{,\alpha} + f_{,\eta} \eta_{,\alpha} + f_{,\zeta} \zeta_{,\alpha}\}^T.$

Принимая во внимание (2.3) и (2.4), из (4.6) можно получить аппроксимирующие матричные выражения для компонент вектора перемещения и их производных

$$\{v\} = [A] \begin{Bmatrix} v_y \\ v_{,\alpha} \\ v_{,\beta} \end{Bmatrix}; v_{,\alpha} = \{l_\alpha\}^T \{v_y\}; v_{,\beta} = \{l_\beta\}^T \{v_y\}; v_{,\alpha} = \{b_\alpha\}^T \{v_y\}. \quad (4.7)$$

Столбец узловых тензоров напряжений $\{\tilde{\sigma}^w\} = \{\tilde{\sigma}^i \tilde{\sigma}^j \tilde{\sigma}^k \tilde{\sigma}^l \tilde{\sigma}^m \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^p \tilde{\sigma}^h\}$ можно записать в матричном виде

$$\{\tilde{\sigma}^w\} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{H}}^w \\ \bar{\bar{H}}^w \\ \bar{\bar{H}}^w \end{bmatrix} \{\sigma_y^w\}, \quad (4.8)$$

$$\text{где } \{\sigma_y^w\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma^i\}^T & \{\sigma^j\}^T & \{\sigma^k\}^T & \{\sigma^l\}^T & \{\sigma^m\}^T & \{\sigma^n\}^T & \{\sigma^p\}^T & \{\sigma^h\}^T \\ 1 \times 48 & 1 \times 6 & 1 \times 6 & 1 \times 6 & 1 \times 6 & 1 \times 6 & 1 \times 6 & 1 \times 6 \end{matrix} \right\},$$

а элементами матрицы $[\bar{\bar{H}}]$ являются диадные произведения базисных векторов узловых точек. Используя (4.8) и (4.4), аппроксимацию тензора напряжений (4.2) можно представить выражением

$$\tilde{\sigma} = \{\bar{\bar{a}}\}^T \begin{bmatrix} f_1(\xi, \eta, \zeta) [G^i]^T & f_2(\xi, \eta, \zeta) [G^j]^T & \dots & f_8(\xi, \eta, \zeta) [G^h]^T \\ 1 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 6 \end{bmatrix} \{\sigma_y^w\}. \quad (4.9)$$

Принимая во внимание диадное представление тензора $\tilde{\sigma} = \{\bar{\bar{a}}\}^T \{\sigma\}$, компоненты тензора напряжений внутренней точки элемента на основании (4.9) можно записать произведением матриц

$$\{\sigma\} = [S] \{\sigma_y\}. \quad (4.10)$$

При использовании аппроксимирующих выражений (4.7), (4.10) функционал (3.3) принимает вид

$$\Pi_R = \{\sigma_y\}^T \int [S]^T [B] dV \{v_y\} - \frac{1}{2} \{\sigma_y\}^T \int [S]^T [D][S] dV \{\sigma_y\} - \{v_y\}^T \int [A]^T \{q\} ds, \quad (4.11)$$

$$\text{где } [B] = [L][A].$$

Минимизируя функционал (4.12) по узловым неизвестным $\{\sigma_y\}$, $\{v_y\}$ и приравнявая производные нулю, можно получить систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \{\sigma_y\}} \equiv [Q] \{v_y\} - [H] \{\sigma_y\} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \{v_y\}} \equiv [Q]^T \{\sigma_y\} - \{f_s\} = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{где } [Q] = \int [S]^T [B] dV; [H] = \int [S]^T [D][S] dV; \{f_s\} = \int [A]^T \{q\} ds.$$

Систему уравнений (4.12) можно представить в традиционной для МКЭ форме

$$[k] \{z_y^R\} = \{f_y^R\}, \quad (4.13)$$

$$\text{где } [k] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [O] \end{bmatrix} - \text{матрица деформирования конечного элемента;}$$

$\left\{ z_y^R \right\}^T = \left\{ \left\{ \sigma_y \right\}^T \left\{ v_y \right\}^T \right\}$ – вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\left\{ f_y^R \right\} = \left\{ \left\{ o \right\}^T \left\{ f_s \right\}^T \right\}$ – вектор узловых усилий конечного элемента.

Матрица деформирования всей конструкции формируется с использованием традиционной процедуры МКЭ [3].

5. *Оболочка вращения.* При расчете оболочек вращения радиуса $r = r(x)$ в качестве криволинейных координат θ^1, θ^2 принимаются осевая координата x и окружная координата θ . Радиус–вектор произвольной точки отсчетной поверхности определяется выражением

$$\vec{R} = x\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}. \quad (5.1)$$

Дальнейший расчет оболочки вращения выполняется по алгоритму, изложенному в разд. 1-4.

Пример. Определено напряженное состояние усеченного параболоида вращения, внутренняя образующая которого описывается функцией

$$z = \frac{d-a}{l^2}x^2 + a.$$

Были приняты следующие исходные данные (рис. 2): $a = 0,2\text{м}$, $d = 0,02\text{м}$, $l = 0,5\text{м}$, $h = 0,02\text{м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,3$, $q = 10 \text{ МПа}$. В узловых точках элементов на левом краю оболочки установлены пружинные опоры (рис. 2), при изменении жесткости которых узловые точки на левом краю получают перемещения v_n^1 в см. Достаточная сходимость вычислительного процесса получена при дискретизации конструкции на 288 элементов с двумя элементами по толщине оболочки. В табл. 1 приведены численные значения меридиональных напряжений σ^{11} и кольцевых напряжений σ^{22} в точках 1-4. Как видно, в точках 3 и 4 меридиональные напряжения равны нулю, а на правом краю среднее меридиональное напряжение равно 465,93 МПа.

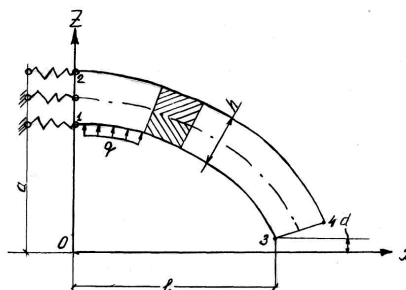


Рис. 2

Среднее напряжение, подсчитанное из условия равновесия равно

$$\sigma_\phi^{11} = q \frac{\pi(A^2 - d^2)}{2\pi(a + h/2)h} = 47,1 \text{ МПа}.$$

Как видно расхождение в результатах не превышает 1,5%.

Таблица 1

№ точки	Напряжения МПа					
	$v_n^1 = 0,0000$		$v_n^1 = 0,0393$		$v_n^1 = 0,1969$	
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{22}
	2	3	4	5	6	7
1	45,370	89,756	49,313	93,249	49,446	93,363
2	47,804	82,258	43,872	83,127	43,763	83,156
3	0,037	25,434	0,038	25,434	0,038	25,434
4	0,004	5,420	0,007	5,421	0,007	5,421
	$v_n^1 = 19,7047$		$v_n^1 = 197,205$		$v_n^1 = 1980,13$	
	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}	σ^{11}	σ^{22}	σ^{11}
	8	9	10	8	9	10
1	49,481	93,392	49,483	49,481	93,392	49,483

2	43,732	83,164	43,730	43,732	83,164	43,730
3	0,038	25,434	0,038	0,038	25,434	0,038
4	0,007	5,421	0,007	0,007	5,421	0,007

Анализ результатов показывает, что численные значения напряжений при значительных смещениях как жесткого целого v_d^1 остаются практически неизменными. Расчеты при использовании скалярной аппроксимации компонент вектора перемещения и компонент тензора напряжений показали, что численные значения напряжений получились такими же, как в колонках 2,3 табл. 1. только при наличии жестких опор на левом краю оболочки. Если оболочка получала даже весьма малое смещение v_d^1 , результаты расчета оказывались просто неприемлемыми. Таким образом, предложенная аппроксимация векторных и тензорных полей искомых величин внутренней точки конечного элемента позволяет учесть смещения конструкции как жесткого целого.

Конечный элемент на основе разработанного способа аппроксимации векторов перемещений и тензоров напряжений может найти применение в программных комплексах для расчета прочности оболочек произвольной толщины в трехмерной постановке.

Л и т е р а т у р а

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
3. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.



ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФЕРМ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В.В. ГАЛИШНИКОВА, канд. техн. наук, доцент
Российский университет дружбы народов, Москва

В работе излагаются алгоритмы вычисления критических состояний пространственной фермы и продолжения решения в сингулярных точках, реализующие методики, разработанные автором. Приводится пример расчета сетчатой оболочки на устойчивость равновесия по разработанной программе.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, пространственная ферма, сетчатая оболочка

Вычисление точек бифуркации гибких, подверженных большим деформациям конструкций, а также продолжений траекторий их нагружения после прохождения этих точек остается одной из сложнейших задач вычислительной механики. Очевидно, что задача устойчивости равновесия таких конструкций может быть достоверно решена лишь при учете предшествующей истории нагружения, то есть в геометрически нелинейной постановке. Однако, несмотря на то, что численные методы геометрически нелинейного анализа хорошо развиты, в окрестностях точек бифуркации возникают вычислительные трудности, препятствующие созданию надежно работающих алгоритмов продолжения решения в этих точках. Формулировка и проверка достоверности методов геометрически нелинейного анализа конструкций существенно затрудняется недостатком точных аналитических решений задач для конструкций, подвергающихся значительным деформациям перед потерей устойчивости. Достоверность и точность методик, предлагаемых в данной работе, оценивалась на тестовых примерах, для которых автором получены аналитические решения [1].

Для выполнения геометрически нелинейного расчета пространственных ферм на деформации по методу конечных элементов автором разработана методика, основанная на модификации метода постоянных дуг (Arc Length Method), в которой используется процедура итерационного уточнения секущей матрицы жесткости конструкции [2]. В качестве характеристической кривой решения используется нормализованная траектория нагружения. Алгоритмы, описываемые в настоящей работе, являются частью обобщенного метода геометрически нелинейного расчета пространственных ферм, включающего расчет на деформации и потерю устойчивости.