Проблемы теории упругости

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

А.А. ТИМОФЕЕВ, *аспирант*
Смоленский государственный университет

Рассматривается задача о нахождении прогиба защемленной пластины, нагруженной сосредоточенной силой. В качестве примера рассмотрена треугольная пластина, для которой при помощи системы «Mathematica» строится функция Грина. Приводится программа, реализующая предложенный в статье алгоритм и график приближенного значения функции Грина для рассматриваемого примера.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: треугольная пластина, функция Грина, прогиб

Рассмотрим решение одной из важных задач механики, а именно задачи о нахождении прогиба защемленной пластины, нагруженной сосредоточенной силой. Решение этой задачи известно для ряда областей, таких, например, как прямоугольник [4]. В данной статье предлагается решение рассматриваемой задачи для пластины треугольной формы (см. рис. 1). В основу решения положим алгоритм, предложенный в монографии [2]. В качестве примера рассмотрим защемленную тонкую пластину треугольной формы, представленную на рис. 1. Вначале приведем известные теоретические сведения [3].

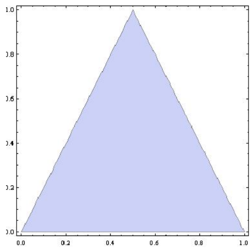

Рис. 1

Пусть A – оператор, положительно определенный в гильбертовом пространстве H и требуется решить уравнение
$Au = f, f \in H$. (1)

В монографии [3] предлагается следующий алгоритм решения этой задачи: рассмотреть гильбертово пространство H_A со скалярным произведением

$$[u,v]_A = (Au, v) \tag{2}$$

и в этом пространстве построить ортонормированную систему $\{\omega_n\}$. Тогда решением рассматриваемой задачи является ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\omega_n, \tag{3}$$

который сходится в метрике пространства H.

Если δ – дельта–функция Дирака и $f = \delta(x_0,y_0)$, то функция (3) будет иметь вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x_0, y_0)\omega_n(x,y) \tag{4}$$

и называется функцией Грина рассматриваемой задачи.

Вернемся к поставленной выше задаче относительно треугольной пластины. Уравнение поверхности прогиба этой пластины, как известно, (см. [3]) имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D},$$

где $q(x,y)$ – интенсивность нормальной нагрузки, D – жесткость пластины на изгиб, E и ν – модуль Юнга и постоянная Пуассона материала пластины, h – толщина пластины. Так как по условию край пластины жестко закреплен, то на границе S рассматриваемой треугольной области выполняются условия

$$w|_S = 0, \ \partial w/\partial n|_S = 0. \tag{5}$$

В пространстве H_A для бигармонического оператора скалярное произведение функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяется следующим образом [3]:

$$[u,v]_A = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dxdy, \tag{6}$$

где Δ – треугольная область пластины, ограниченная прямыми

$$y = 0, \ y = 2x, \quad y = 2 - 2x. \tag{7}$$

Построение системы функций $\{\omega_n\}$ относительно скалярного произведения $[u,v]_A$ стало возможным после появления системы Mathematica, в которой реализована система вычислений на основе целочисленной арифметики. Классические методы реализации алгоритма Грамма-Шмидта для построения ортонормированной системы функций здесь не проходят [5].

Положим $q(x,y)=(q_0/D)\delta(x-x_0,y-y_0)$. Граница треугольной области задается тремя прямыми (7). Рассмотрим следующую систему функций:

$$(1-x-y/2)^2(x-y/2)^2x^{k-1}y^{l+1},\quad k=1,2,\ldots 4,\quad l=1,2,\ldots 4.$$

Легко проверить, что каждая из функций этой системы удовлетворяет краевым условиям (5). Кроме этого, данная система функций является полной, поскольку она построена в соответствии с условиями, изложенными в [1]. Далее, руководствуясь алгоритмом Грамма-Шмидта, строим ортонормированный базис из функций $\{w_n\}$ относительно скалярного произведения (6). Как известно, система Mathematica позволяет провести точное построение этого базиса.

Затем по формуле $w=(q_0/D)\sum\omega_n(x_0,y_0)\omega_n(x,y)$ находим приближенное решение поставленной задачи. Необходимо отметить, что описанным выше способом можно находить решение и для других областей, имеющих более сложную границу, например, когда границу области можно разбить на части, каждая из которых задается уравнением $f(x,y)=0$, где $f(x,y)$ – некоторый многочлен, и произведение их положительно в рассматриваемой области. Ниже приведена программа, написанная в системе Mathematica, реализующая решение поставленной задачи:

```
M={{0,0,1},{1,0,1},{1/2,1,1},{x,y,1}}
Delta1=Det[{M[[1]],M[[2]],M[[4]]}];
Delta2=Det[{M[[2]],M[[3]],M[[4]]}];
Delta3=Det[{M[[3]],M[[1]],M[[4]]}];
R=Delta1≥0&& Delta2≥0&& Delta3≥0;
XY=Table[(Delta2)^2*(Delta3)^2*x^(k-1)*y^(l+1),{k,1,4},{l,1,4}];
F=Flatten[XY];
G=Table[0,{i,1,16}];ω=Table[0,{i,1,16}];G[[1]]=F[[1]];
ω[[1]]=G[[1]]/Sqrt[Integrate[((D[G[[1]],{x,2}]+D[G[[1]],{y,2}])^2) Boole[R],{x,0,1},{y,0,1}]];
Do[G[[k]]=F[[k]]-Sum[Integrate[(D[ω[[n]],{x,2}]+D[ω
[[n]],{y,2}])*(D[F[[k]],{x,2}]+D[F[[k]],{y,2}]) Boole[R],{x,0,1},{y,0,1}]* ω [n]],{n,1,k-1}];
ω[[k]]=G[[k]]/Sqrt[Integrate
[((D[G[[k]],{x,2}]+D[G[[k]],{y,2}])^2) Boole[R],{x,0,1},{y,0,1}]],{k,2,16}]
ω1=ω/.{x→0.3,y→0.2}; S=Sum[ω1[[k]]*ω[[k]],{k,1,16}]; D1=(2*10^11*0.01^3)/(12*(1-0.3^2));
q0=2*10^5;S=(S*q0)/D1;
Plot3D[S*Boole[R],{x,0,1},{y,0,1},PlotRange→All]
```

На рис. 2 представлен график приближенного значения функции Грина рассматриваемой пластины при x = 0,3; y = 0,1 или прогиба пластинки, если в точке (x,y) действует сосредоточенная сила $q=2\cdot10^5$ Н.

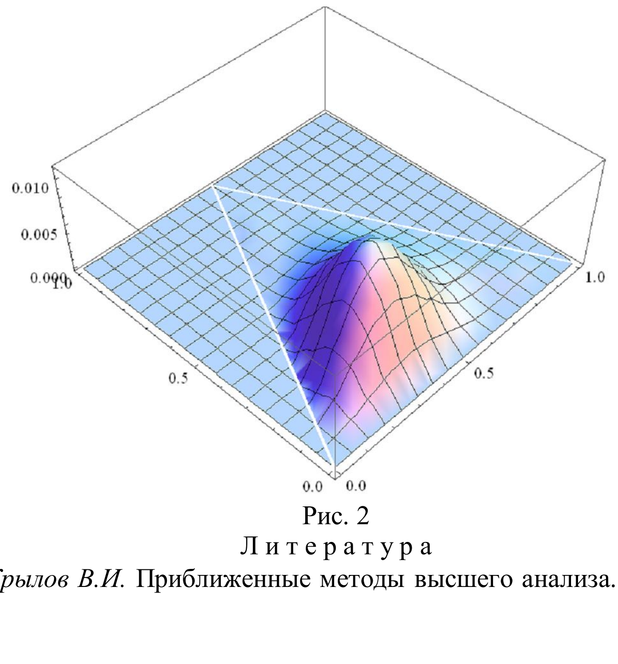

Рис. 2

Литература

1. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962 г. – 708 с.

2. *Кристалинский Р.Е.* Приближенные аналитические методы решения задач механики деформируемого твердого тела. – Минобрнауки РФ, Федеральное агентство по образованию. – Смоленск: Смол. гос. ун-т, 2007. – 167 с.

3. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

4. *Ректорис К.* Вариационные методы в строительной механике. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1948. – 400 с.

5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. – М.: «Наука», 1966. – 636 с.

GREEN'S FUNCTION FOR RIGIDLY FIXED PLATE

A.A. Timofeyev

A problem of finding of displacements of a rigidly fixed plate loaded by concentrated force is examined. As an example, there was taken a triangle plate for which the function of Green was built with the help of the system «Mathematica». The computer program realizing the algorithm is presented and graphic representation of close value of Green's function for real problem is given.