

Расчет тонких оболочек

АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ В МАТЕРИАЛЕ РЕБРИСТЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В.М. ЖГУТОВ, канд. техн. наук

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж», Санкт-Петербург

С использованием определенных упрощений проанализированы несколько подходов к формированию расчетных уравнений для упруговязких задач (задач ползучести) ребристых пологих оболочек на прямоугольном плане. С помощью вычислительного эксперимента проанализированы обозначенные подходы к исследованию ползучести пологих ребристых оболочек, выполненных из оргстекла.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ребристые пологие оболочки, ползучесть, оргстекло

Как известно, при рассмотрении упругопластических и упруговязких задач для строительных конструкций уравнения равновесия, записанные в усилиях и моментах, имеют такой же вид, что и в случае упругих задач. Решения указанных задач могут быть получены только при некоторых упрощениях [1, 2].

Проанализируем несколько подходов к формированию расчетных уравнений для упруговязких задач (задач ползучести) ребристых пологих оболочек прямоугольного плана, вводя те или иные упрощения.

Рассматриваем пологую оболочку прямоугольного плана толщиной h , находящуюся под действием поперечной нагрузки q при некотором закреплении её контура. Срединную поверхность оболочки принимаем за отсчетную поверхность $z = 0$. Оси x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности, а ось z – ортогонально поверхности $z = 0$ в сторону её вогнутости. Со стороны вогнутости оболочка подкреплена перекрестной системой ребер, расставленных вдоль осей координат. Ребра задаем дискретно с помощью функции $H(x,y)$, характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [3,4].

Будем рассматривать геометрическую нелинейность, возможность развития деформаций ползучести при длительной нагрузке, дискретное расположение ребер, их сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги.

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y},$$

где U , V и W – перемещения точек отсчетной поверхности оболочки вдоль осей x , y и z соответственно; $k_x = R_1$, $k_y = R_2$ – главные кривизны (R_1 , R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно.

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = cf(z) \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = cf(z) \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

где ψ_x , ψ_y – углы поворота отрезка нормали к отсчетной поверхности оболочки в плоскостях $x \wedge z$ и $y \wedge z$ соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая закон распределения напряжений τ_{xz} , τ_{yz} вдоль оси z (z изменяется в пределах от $-h/2$ до $h/2 + H$); c – константа. Будем полагать, что $f(z)$ имеет вид [3, 4]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left(z + \frac{h}{2} \right) \left(z - \frac{h}{2} - H \right).$$

Эта функция при $z = -h/2$ и $z = h/2 + H$ обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f(z) dz = 1; \quad \frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z) dz = \frac{1}{c}, \quad \text{где } c = 5/6.$$

В слое, отстоящем на расстояние z от отсчетной поверхности, деформации примут вид

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где $\chi_1 = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$, $\chi_2 = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$ и $2\chi_{12} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$ – функции изменения кривизн и кручения.

Физические соотношения для упругих оболочек имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z, \quad (1)$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона данного материала.

Кроме того, при учете поперечных сдвигов

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}. \quad (2)$$

Ползучесть материала учитываем на основе линейной теории наследственной ползучести. Физические соотношения в этом случае могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^c, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^c, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^c,$$

где упругие составляющие напряжений (отмечены индексом «e»), определяются с помощью формул (1) и (2), а составляющие напряжений, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «c»), имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^c &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_x^z(\tau) + \mu\varepsilon_y^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau; \quad \sigma_y^c = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_y^z(\tau) + \mu\varepsilon_x^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau; \\ \tau_{xy}^c &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xy}^z(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad \tau_{xz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \\ \tau_{yz}^c &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{yz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $R_1(t, \tau)$ и $R_2(t, \tau)$ – функции влияния при растяжении (сжатии) и, соответственно, сдвиге. Например, для полимерных материалов (оргстекла) функции влияния могут быть взяты в виде

$$R_l(t - \tau) = A_l e^{-\beta_l(t-\tau)} \cdot (t - \tau)^{\alpha_l - 1} \quad (l = 1, 2),$$

где A_l , α_l , β_l – константы, определяемые экспериментально; t – время, τ – переменная интегрирования (имеющая смысл времени).

В общем случае функционал полной энергии деформации оболочки, находящейся под действием поперечной нагрузки q , имеет вид

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2+H} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] dx dy dz - \int_0^a \int_0^b q W dx dy,$$

где a и b – линейные размеры оболочки вдоль осей x и y соответственно.

Запишем функционал \mathfrak{A} в виде [5 – 7]

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_e - \mathfrak{A}_c, \quad (4)$$

где функционал

$$\mathfrak{A}_e = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} [\sigma_x^e \varepsilon_x^z + \sigma_y^e \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^e \gamma_{xz} + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}] dx dy dz - \int_0^a \int_0^b q W dx dy \quad (5)$$

соответствует упругой постановке задачи, а функционал

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_c = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} [\sigma_x^c(t) \underline{\varepsilon}_x^z(t) + \sigma_y^c(t) \underline{\varepsilon}_y^z(t) + \tau_{xy}^c(t) \underline{\gamma}_{xy}^z(t) + \\ + \tau_{xz}^c(t) \underline{\gamma}_{xz}(t) + \tau_{yz}^c(t) \underline{\gamma}_{yz}(t)] dx dy dz \end{aligned} \quad (6)$$

описывает ползучесть.

Из условия минимума энергии (5) следуют уравнения устойчивого равновесия оболочки для упругой задачи, записанные в усилиях и моментах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \\ k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для того чтобы получить уравнения равновесия оболочки в виде (7) и для задач ползучести, придадим функционалу \mathfrak{A}_c следующий упрощенный вид [внесены подчеркнутые в (6) члены под знак интеграла по переменной τ в выражения для напряжений (3)]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_c = \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} \left[\sigma_x^c(\tau) \underline{\varepsilon}_x^z(\tau) + \sigma_y^c(\tau) \underline{\varepsilon}_y^z(\tau) + \right. \\ \left. + (\tau_{xy}^c(\tau) \underline{\gamma}_{xy}^z(\tau) + \tau_{xz}^c(\tau) \underline{\gamma}_{xz}(\tau) + \tau_{yz}^c(\tau) \underline{\gamma}_{yz}(\tau)) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (8)$$

После вычисления в функционале (5) интеграла по z будем иметь

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_e = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h+\bar{F}) \left[\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_4 \gamma_{xy}^2 + \mu_4 c \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \mu_4 c \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2\bar{S} \left(\varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left(\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2 \right) - \frac{2(1-\mu^2)}{E} q W \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (9)$$

где \bar{F} , \bar{S} , \bar{J} – жесткостные характеристики ребер [площадь поперечного (или продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно]:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

Функционал (4) может быть представлен в двух разных вариантах в зависимости от того, в каком виде записывается его часть \mathfrak{E}_c : в классическом варианте по формуле (6) или же с помощью упрощенного соотношения (8).

Для функционала \mathfrak{E}_c , записанного в классическом варианте по формуле (6), в развернутом виде имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_c(t) = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_x(t) \int_{t_0}^t [(h+\bar{F})(\varepsilon_x(\tau) + \mu\varepsilon_y(\tau)) + \bar{S}(\chi_1(\tau) + \mu\chi_2(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \right. \\ & + \chi_1(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S}(\varepsilon_x(\tau) + \mu\varepsilon_y(\tau)) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(\tau) + \mu\chi_2(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \\ & + \varepsilon_y(t) \int_{t_0}^t [(h+\bar{F})(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \bar{S}(\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \\ & + \chi_2(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S}(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \\ & + \mu_1 \gamma_{xy}(t) \int_{t_0}^t [(h+\bar{F})\gamma_{xy}(\tau) + 2\bar{S}\chi_{12}(\tau)] R_2(t, \tau) d\tau + \\ & + 2\mu\chi_{12}(t) \int_{t_0}^t \left[\bar{S}\gamma_{xy}(\tau) + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(\tau) \right] R_2(t, \tau) d\tau + \\ & + \mu_1 c(h+\bar{F}) \left(\psi_x(t) + \frac{\partial W(t)}{\partial x} \right) \int_{t_0}^t \left(\psi_x(\tau) + \frac{\partial W(\tau)}{\partial x} \right) R_2(t, \tau) d\tau + \\ & \left. + \mu_1 c(h+\bar{F}) \left(\psi_y(t) + \frac{\partial W(t)}{\partial y} \right) \int_{t_0}^t \left(\psi_y(\tau) + \frac{\partial W(\tau)}{\partial y} \right) R_2(t, \tau) d\tau \right\} dx dy. \quad (10) \end{aligned}$$

Для функционала \mathfrak{E}_c , записанного с помощью упрощенного соотношения (8), в развернутом виде получаем:

$$\mathfrak{E}_c(t) = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \int_{t_0}^t \left\{ [(h+\bar{F})(\varepsilon_x^2(\tau) + 2\mu\varepsilon_x(\tau)\varepsilon_y(\tau) + \varepsilon_y^2(\tau)) + 2\bar{S}(\varepsilon_x(\tau)\chi_1(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \varepsilon_x(\tau) \chi_2(\tau) + \varepsilon_y(\tau) \chi_2(\tau) + \mu \varepsilon_y(\tau) \chi_1(\tau) + \\
& + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left(\chi_1^2(\tau) + 2\mu \chi_1(\tau) \chi_2(\tau) + \chi_2^2(\tau) \right) \Big] R_1(t, \tau) + \\
& + \left[\left(h + \bar{F} \right) \left(\mu_1 \gamma_{xy}^2(\tau) + \mu_1 c \left(\psi_x(\tau) + \frac{\partial W(\tau)}{\partial x} \right)^2 + \mu_1 c \left(\psi_y(\tau) + \frac{\partial W(\tau)}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. + 2\bar{S} 2\mu_1 \gamma_{xy}(\tau) \chi_{12}(\tau) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) 4\mu_1 \chi_{12}^2(\tau) \right] R_2(t, \tau) \Big\} dx dy d\tau. \quad (11)
\end{aligned}$$

Интеграл по переменной τ на интервале $[t_0, t_k]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t_i]$ длиной $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ сутки каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников.

В результате получим

- для функционала \mathcal{E}_c , записанного в классическом варианте (10):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(t_k) = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \varepsilon_x(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F})(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_y(t_{i-1})) + \right. \\
& \left. + \bar{S}(\chi_1(t_{i-1}) + \mu \chi_2(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_y(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(t_{i-1}) + \mu \chi_2(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \varepsilon_y(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F})(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_x(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_2(t_{i-1}) + \mu \chi_1(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_2(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_x(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(t_{i-1}) + \mu \chi_1(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 \gamma_{xy}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F}) \gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\bar{S} \chi_{12}(t_{i-1}) \right] R2_{k,i-1} + \\
& + 2\mu_1 \chi_{12}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S} \gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2 \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(t_{i-1}) \right] R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c (h + \bar{F}) \left(\psi_x(t_k) + \frac{\partial W(t_k)}{\partial x} \right) \sum_{i=1}^k \left(\psi_x(t_{i-1}) + \frac{\partial W(t_{i-1})}{\partial x} \right) R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c (h + \bar{F}) \left(\psi_y(t_k) + \frac{\partial W(t_k)}{\partial y} \right) \sum_{i=1}^k \left(\psi_y(t_{i-1}) + \frac{\partial W(t_{i-1})}{\partial y} \right) R2_{k,i-1} \Big\} dx dy; \quad (12)
\end{aligned}$$

- для функционала \mathcal{E}_c , взятого в упрощенном варианте (11):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(t_k) = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^k \left\{ \left[(h + \bar{F}) \left(\varepsilon_x^2(t_{i-1}) + 2\mu \varepsilon_x(t_{i-1}) \varepsilon_y(t_{i-1}) + \varepsilon_y^2(t_{i-1}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\bar{S} \left(\varepsilon_x(t_{i-1}) \chi_1(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_x(t_{i-1}) \chi_2(t_{i-1}) + \varepsilon_y(t_{i-1}) \chi_2(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_y(t_{i-1}) \chi_1(t_{i-1}) \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left(\chi_1^2(t_{i-1}) + 2\mu\chi_1(t_{i-1})\chi_2(t_{i-1}) + \chi_2^2(t_{i-1}) \right) \Big] R1_{k,i-1} + \\
& + \left[(h + \bar{F}) \left(\mu_1 \gamma_{xy}^2(t_{i-1}) + \mu_1 c \left(\psi_x(t_{i-1}) + \frac{\partial W(t_{i-1})}{\partial x} \right) \right)^2 + \mu_1 c \left(\psi_y(t_{i-1}) + \frac{\partial W(t_{i-1})}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2\bar{S}2\mu_1\gamma_{xy}(t_{i-1})\chi_{12}(t_{i-1}) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) 4\mu_1\chi_{12}^2(t_{i-1}) \right] R2_{k,i-1} \Big] dx dy. \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь

$$R1_{k,i-1} = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t; \quad R2_{k,i-1} = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t. \quad (14)$$

При $t = t_0$ решением исходной задачи является решение упругой задачи.

Поскольку при решении задач ползучести для момента времени $t = t_k$, при котором оболочка теряет устойчивость, конкретное значение K неизвестно, естественно брать $k = 1, 2, \dots$ и пересчитывать все значения, соответствующие функционалу \mathcal{E}_c в полученном расчетном уравнении [см. ниже соотношение (16)]. Чтобы избежать указанного пересчета, введем упрощение, связанное с $R1_{k,i-1}, R2_{k,i-1}$, а именно, будем приближенно считать их постоянными на каждом частичном отрезке $[t_{i-1}, t_i]$:

$$R1_{k,i-1} \approx R_1(t_i, t_{i-1})\Delta t, \quad R2_{k,i-1} \approx R_2(t_i, t_{i-1})\Delta t. \quad (15)$$

Можно показать, что при этом берутся наибольшие значения $R1_{k,i-1}$ и $R2_{k,i-1}$, что идет в запас прочности.

Ниже будет показано, что подобное упрощение требует анализа достоверности результатов расчета.

Перейдем в функционале (4) [часть \mathcal{E}_e которого имеет вид (9), а часть \mathcal{E}_c взята в виде (12) или (13)] к безразмерным параметрам (удобным для анализа и представления результатов), описанным в [3,4], в частности, безразмерным координатам $\xi = x/a, \eta = y/b$; безразмерным кривизнам $k_\xi = a^2 K_x / h, k_\eta = b^2 K_y / h$; безразмерным перемещениям $\bar{U} = aU / h^2, \bar{V} = bV / h^2, \bar{W} = W / h$ и углам $\bar{\psi}_x = a\psi_x / h, \bar{\psi}_y = b\psi_y / h$; безразмерной нагрузке $\bar{P} = a^4 q / Eh^4$.

Получим функционал (4) в безразмерном виде

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_e - \bar{\mathcal{E}}_c.$$

Для отыскания минимума функционала $\bar{\mathcal{E}}$ применяем метод Ритца при разложении искомых функций $\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta), \bar{W}(\xi, \eta), \bar{\psi}_x(\xi, \eta), \bar{\psi}_y(\xi, \eta)$ в виде

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I); \quad \bar{V} = \sum_{I=1}^N V(I)X2(I)Y2(I); \quad \bar{W} = \sum_{I=1}^N W(I)X1(I)Y1(I); \\
\bar{\psi}_x &= \sum_{I=1}^N PS(I)X4(I)Y4(I); \quad \bar{\psi}_y = \sum_{I=1}^N PN(I)X5(I)Y5(I),
\end{aligned}$$

где $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$ – неизвестные параметры переменной t , подлежащие определению; $X1(I)Y1(I), \dots, X5(I)Y5(I)$ – известные аппроксимирующие функции переменных ξ и η , удовлетворяющие заданным краевым условиям. В результате получаем нелинейную систему алгебраических уравнений, которую кратко можно записать в виде [5 – 7]

$$F_{\text{л}}(X) - cp(l)\bar{P} = -F_{\text{н}}(X) + F_{\text{с}}(X), \quad (16)$$

где $X = [U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)]^T$; $F_{\text{л}}(X)$ и $F_{\text{н}}(X)$ – линейная и нелинейная (геометрически) части системы (16), соответствующие функционалу $\mathcal{E}_{\text{в}}$; $F_{\text{с}}(X)$ – часть системы (16), отвечающая функционалу $\mathcal{E}_{\text{с}}$ (описывающему ползучесть).

С помощью вычислительного эксперимента были проанализированы обозначенные подходы к исследованию ползучести пологих ребристых оболочек, выполненных из оргстекла. Оказалось, что при вычислении $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$ по более точным формулам (14) определение критического времени t_K , при котором происходит потеря устойчивости оболочки вследствие ползучести, зависит несущественно от того, в каком варианте – (12) или (13) – записывается функционал $\mathcal{E}_{\text{с}}$. Однако, если вычисления $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$ производить по упрощенным формулам (15), то расхождения в получаемых значениях t_K становятся значительными. Были проанализированы несколько вариантов оболочек, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Параметры проанализированных оболочек

Вариант оболочки	Параметры оболочки			Возможные реальные размеры, м		
	$a = b$	$R_1 = R_2$	$k_{\xi} = k_{\eta}$	$a = b$	$R_1 = R_2$	h
I	$60h$	$225h$	16	18	67,5	0,3
II	$100h$	$251h$	40	18	45,3	0,18
III	$200h$	$503h$	79,5	18	45,3	0,09
IV	$600h$	$1510h$	238	18	45,3	0,03

Для каждого варианта рассматривались как гладкие оболочки (не имеющие ребер), так и ребристые оболочки, подкрепленные регулярным набором из 6-ти либо 18-ти ребер. Считалось, что ребра расставлены вдоль координатных линий x и y соответственно по 3 ребра либо по 9 ребер в каждом из указанных направлений.

Высота ребер принималась $3h$; ширина ребер полагалась равной $2h$, $3,3h$, $6,6h$ и $20h$ соответственно для вариантов оболочек I, II, III и IV.

Кроме того, при проведении расчетов предполагалось, что:

- поперечная нагрузка q равномерно распределена и $q = const$;
- контур оболочки закреплен шарнирно-неподвижно;
- число членов разложения в методе Ритца $N = 9$.

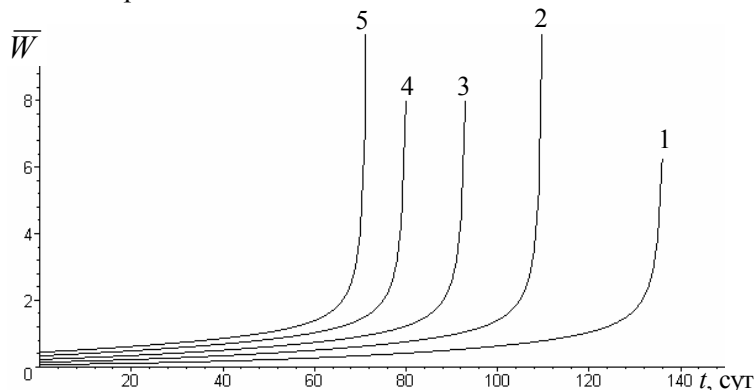


Рис. 1

На рис.1 для гладкой оболочки варианта 1 представлены зависимости « $\bar{W} - t$ », полученные с использованием $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$, вычисляемыми упрощенно по формулам (15). Кривые 1–5 построены для значений безразмерной нагрузки $\bar{P} = 40, \bar{P} = 80, \bar{P} = 120, \bar{P} = 160$ и $\bar{P} = 190$ соответственно. На рис. 2 для указанной оболочки приведены зависимости « $\bar{W} - t$ » с той разницей, что $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$ вычислялись по более точным формулам (14). Кривые 1–5 здесь отвечают значениям безразмерной нагрузки соответственно

$$\bar{P} = 150, \bar{P} = 160, \bar{P} = 170, \bar{P} = 180 \text{ и } \bar{P} = 185.$$

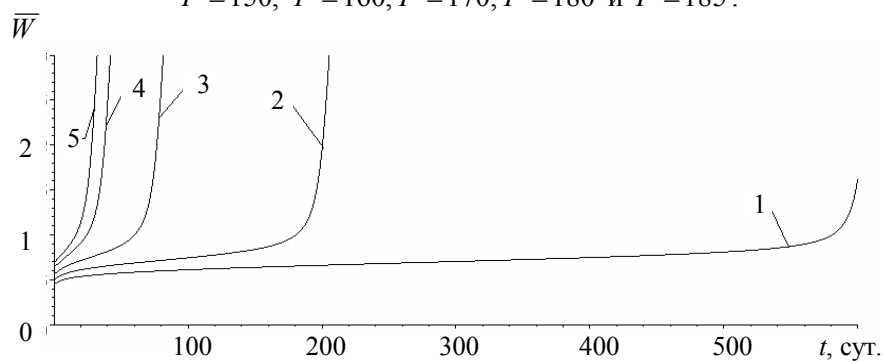


Рис. 2

На рис. 3 и 4 для гладких оболочек представлены зависимости « $q/q_{кр}^M - t_{кр}$ » снижения критической нагрузки вследствие ползучести (здесь $q_{кр}^M$ – мгновенная критическая нагрузка, найденная при решении упругой задачи).

Кривые на рис. 3 получены с использованием $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$, вычисленным упрощенно по формулам (15); кривые на рис. 4 отвечают $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$, взятым в виде (14). Номера кривых соответствуют вариантам рассматриваемых оболочек.

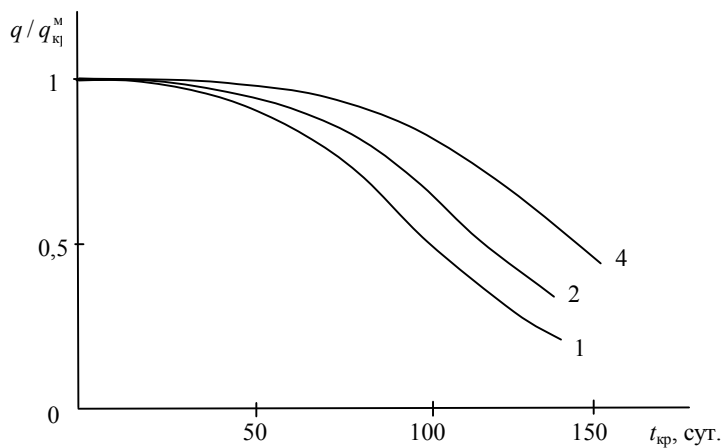


Рис. 3

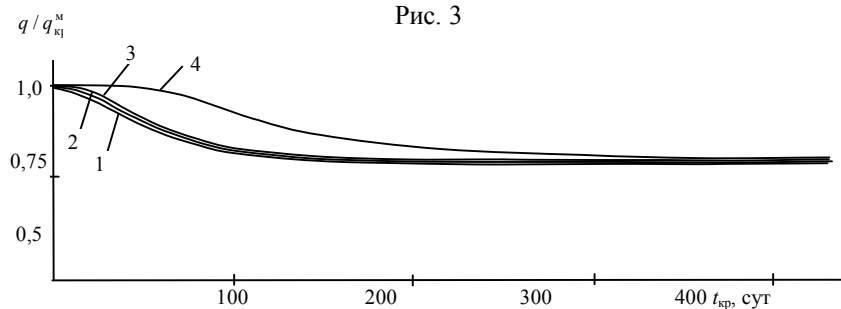


Рис. 4

Мы видим, что с увеличением толщины оболочки кривые снижения критической нагрузки ниспадают быстрее (более круто).

Очевидно, что аналогичный вывод справедлив и в случае увеличения числа ребер, подкрепляющих оболочку.

Отметим, что решения, полученные с помощью соотношений (14), хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов, описанных в работе [8].

Таким образом, на примере оболочек, выполненных из оргстекла, показано, что при решении задач ползучести функционал $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e - \mathcal{E}_c$ полной энергии деформации ребристых пологих оболочек может быть представлен в двух вариантах:

1) в классическом варианте, при котором функционал \mathcal{E}_c (описывающий ползучесть) имеет вид (10) и

2) в упрощенном варианте, при котором \mathcal{E}_c берется в виде (11). Однако значения величин $R1_{k, i-1}$, $R2_{k, i-1}$ лучше вычислять по более точным формулам (14) при любом варианте.

Автор благодарит д-ра техн. наук, профессора В.В. Карпова за обсуждение данной работы.

Л и т е р а т у р а

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
3. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.–СПб: Изд-во АСВ, 2002. – 420 с.
4. Жгуттов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17: Санкт–Петербург, 2004. – 177 с.
5. Жгуттов В.М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. – 267 с. – С.110-131.
6. Жгуттов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4.– С.20-23.
7. Жгуттов В.М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала// «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Тр. конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С. 341-346.
8. Климанов В.И., Тимашиев С.А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.

ANALYSIS OF VARIOUS APPROACHES IN RESEARCHES OF CREEP OF MATERIAL OF SHALLOW RIBBED SHELLS

Zhgoutov V.M.

Different approaches in forming the governing equations for the creeping problems of shallow ribbed shells based on various presentations of total energy functional and the ways of estimating results of influence function are analyzed. The examples of getting solutions for the shells made of acrylic plastic are given.