## Теория ползучести

# НЕЛИНЕЙНАЯ НАСЛЕДСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р.С. САНЖАРОВСКИЙ, *д.т.н., профессор*
*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева*
*010008, Республика Казахстан, г. Астана, ул. Мирзояна, 2; salsa87@bk.ru*

*Проведен анализ правил построения теории ползучести материалов с существенно нелинейными мгновенными свойствами – бетон, каменная кладка, древесина, алюминий, полимеры. Получены нелинейные уравнения ползучести, в том числе связывающие между собой полные и мгновенные деформации. Для традиционных мер ползучести уравнения записаны также в дифференциальной форме.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелинейная теория ползучести, мгновенные нелинейные деформации, расчеты конструкций.

Основные материала в строительных конструкциях – бетон, каменная кладка, древесина, алюминий, полимеры обладают существенно нелинейными мгновенными диаграммами σ-ε, ползучестью, свойством старения. Теории ползучести, разработанные для таких материалов, не учитывают их мгновенные нелинейные свойства, и основаны на законе Гука. Это обстоятельство вносит в результаты расчета конструкций большую погрешность, приносит большой материальный урон. Например, в сжатых железобетонных конструкциях погрешность достигает 75%, т.к. возникает разрыв между мгновенной нелинейной теорией расчета и линейной длительной теорией расчета одной и той же конструкции. Изящество линейной наследственной теории упругости, хорошо разработанный математический аппарат отвлекли исследователей от проблем нелинейной теории, привели к неудачным практическим результатам.

В статье исследуются правила построения нелинейной теории ползучести, предлагаются новые уравнения, учитывающие одновременно и мгновенную нелинейность и длительную прочность материала и позволяющие эффективно использовать их при создании практических методов расчета конструкций.

Линейные наследственные теории ползучести основаны на использовании принципа суперпозиции, вытекающего из совокупности принципа независимости действия сил классической механики и свойств потенциального силового поля. Принцип независимости действия сил устанавливает правило их объединенного действия по отношению к ускорению (первое правило): ускорение, вызванное силой, определяется только этой силой и не зависит от остальных сил; сумма ускорений, вызываемых силами, приложенными к точке, пропорциональна сумме этих сил. Такой принцип наложения имеет отношение к ускорению точки.

Принцип наложения сил по отношению к перемещению следует из принципа независимости действия сил, после введения ограничений на силы – рассматривается класс упругих сил $F = cx$, в частности $\sigma = E\varepsilon_{\text{у}}$, где $\varepsilon_{\text{у}}$ – мгновенная деформация. Система является потенциальной и стационарной (второе правило). Можно рассматривать и нестационарное потенциальное поле, в этом случае время $t$ нужно рассматривать как фиксированный параметр. Обобщенная сила и обобщенное перемещение находятся через силовую функцию $Q_j = \partial U / \partial g_j$, $g_j = \partial U / \partial Q_j$.

В случае линейной ползучести вводится дополнительная гипотеза, аналогичная закону Гука о существовании линейной связи

$$\sigma = c_{\text{п}}\varepsilon_{\text{п}} = \frac{1}{C(t,\tau)}\varepsilon_{\text{п}},$$

где $\varepsilon_{\text{п}}$ – деформация ползучести; $c_{\text{п}}$ – коэффициент жесткости при ползучести; $C(t,\tau)$ – мера ползучести (третье правило).

Соединение второго и третьего правил позволяет ввести понятие приведенного коэффициента жесткости модели

$$C_{\text{пр}} = \frac{E(t)}{E(t)C(t,\tau)+1}.$$

Величина $E(t)C(t,\tau) = \varphi(t,\tau)$ называется характеристикой ползучести $\varphi(t,\tau) = \varepsilon_{\text{п}} / \varepsilon_{\text{м}}$, где $\varepsilon_{\text{м}}$ – мгновенная деформация; в частности $\varphi(t,\tau) = \varepsilon_{\text{п}} / \varepsilon_{\text{у}}$.

Силовую функцию запишем в виде

$$U[\sigma(t)]=\frac{\sigma^2(t)}{2E(t)}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sigma^2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sigma^2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau\ .$$

На основании совокупности перечисленных правил можно сформулировать принцип суперпозиции Больцмана. Уравнение линейной ползучести имеет вид

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau\ . \qquad (1)$$

В выражении (1) не учитываются мгновенные нелинейные свойства, которые в кратковременных и длительных экспериментах с бетоном проявляются при довольно низких $\sigma\approx 0{,}2R$ уровнях загружения.

Результаты экспериментов привели к дополнению уравнения (1) нелинейным слагаемым

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}d\tau-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}\beta\sigma^2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau\ , \qquad (2)$$

где показатель степени выбирается каждым исследователем по своему усмотрению. Запись (2) соответствует предположению о существовании нелинейной связи $\varepsilon_{\text{п}}=f[\sigma(\tau)]C(t,\tau)=\left[\sigma(\tau)+\beta\sigma^2(\tau)\right]C(t,\tau)$, призванной удовлетворить отмеченные выше правила. Однако, такое предположение не является достаточным для выполнения принципа суперпозиции. Четвертое слагаемое в (2) свидетельствует о введении трех новых гипотез, изменяющих корректные правила линейной теории. Эти же гипотезы оказываются несоответствующими классической механике.

Первой гипотезой (четвертое правило) является предположение о выполнимости принципа независимости действия сил для силы $\beta\sigma^2$. Однако такое предположение не соответствует механике Ньютона: $mw_1=\beta\sigma_1^2+\Phi_1$; $mw_2=\beta\sigma_2^2+\Phi_2$; $m(w_1+w_2)=\beta(\sigma_1+\sigma_2)^2+(\Phi_1+\Phi_2)$; в дифференциальной форме уравнения (2) появляются силы, пропорциональные ускорениям.

Второй гипотезой (пятое правило) является пренебрежение в первых двух членах уравнения (2) той частью мгновенных деформаций, которая соответствует силе $\beta\sigma^2$. Ввиду этого внутри модели образуется разрыв сил: $\sigma\leftrightarrow\beta\sigma^2$; используется две диаграммы мгновенного деформирования.

Третьей гипотезой (шестое правило) является предположение об одновременном существовании нескольких линейных связей с одним коэффициентом жесткости

$$\sigma=\frac{1}{C(t,\tau)}\varepsilon_{\text{п}}\,,\quad \beta\sigma^2=\frac{1}{C(t,\tau)}\varepsilon_{\text{п}}\,,\quad \left(\sigma+\beta\sigma^2\right)=\frac{1}{C(t,\tau)}\varepsilon_{\text{п}}\,,$$

что противоречит понятию меры ползучести $C(t,\tau)$.

У мгновенно нелинейного материала второе правило изменится. Для случая возрастания напряжений учитываем мгновенно нелинейную диаграмму, представленную функцией $\sigma=f_1[\varepsilon_{\text{м}}(t)]$, либо обратной функцией $\varepsilon_{\text{м}}=f_2[\sigma(t)]$. При разгрузке учитывается линейная мгновенная диаграмма, либо задаются соответствующие функции $f_{1\text{р}}[\varepsilon_{\text{м}}(t)]$ и $f_{2\text{р}}[\sigma(t)]$. Параметры диаграммы мгновенного деформирования изменяются с течением времени.

Например, для бетона используем нелинейную диаграмму Еврокодов с ниспадающим участком

$$\sigma = \frac{A_1[E(t)]\varepsilon_{\text{м}} + A_2[E(t), R(t)]\varepsilon_{\text{м}}^2}{1 + A_3[E(t), R(t)]\varepsilon_{\text{м}}}; \ \varepsilon_{\text{м}} = \frac{B_1[E(t)]\sigma + B_2[E(t), R(t)]\sigma^2}{1 + B_3[E(t), R(t)]\sigma}, \tag{3}$$

где модуль упругости $E(t)$ и прочность $R(t)$ (в том числе длительная) являются известными функциями времени.

Интегральное уравнение ползучести на основе принципа наложения с учетом старения и длительной прочности записываем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = f_2[\sigma(t)] - \int_{t_0}^{t} \Bigg[ & \frac{\partial f_2}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial B_2}\left(\frac{\partial B_2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial B_2}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \tau}\right) + \\ & + \frac{\partial f_2}{\partial B_3}\left(\frac{\partial B_3}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial B_3}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)\Bigg] d\tau - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}C(t,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Последний интеграл содержит не функцию от напряжений, а само напряжение.

Рассмотрим прежде частный случай, когда $E$ и $R$ с течением времени не изменяются. Уравнение (4) имеет простой вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{м}}(t) + \int_{t_0}^{t} f_1[\varepsilon_{\text{м}}(\tau)]\frac{\partial}{\partial \tau}C(t,\tau)d\tau, \tag{5}$$

либо

$$\varepsilon(t) = f_2[\sigma(\tau)] + \int_{t_0}^{t} f_1[\varepsilon_{\text{м}}(\tau)]\frac{\partial}{\partial \tau}C(t,\tau)d\tau. \tag{6}$$

Важно подчеркнуть, что в первом и втором слагаемом уравнения (6) содержатся функции от разных аргументов.

При вырожденной функции $C(t,\tau) = C_0\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)$ интегральные уравнения (5) и (6) сводим к дифференциальным с нелинейными коэффициентами

$$\dot{\varepsilon}(t) + \gamma\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_{\text{м}}(t) + f_1[\varepsilon_{\text{м}}(t)]\gamma(1 + C_0) + \gamma\varepsilon_{\text{м}}(t), \tag{7}$$

либо

$$\dot{\varepsilon}(t) + \gamma\varepsilon(t) = \frac{\partial f_2[\sigma(t)]}{\partial \sigma}\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)\gamma(1 + C_0) + \gamma f_2[\sigma(t)]. \tag{8}$$

При учете функции старения $\theta(t)$ вместо константы $C_0$, а также параболы для функции $f_1[\varepsilon_{\text{м}}(t)]$, дифференциальное уравнение ползучести имеет второй порядок

$$\ddot{\varepsilon}_{\text{м}}(t) + \dot{\varepsilon}_{\text{м}}(t)[\gamma(1 + \theta(t)) + 2\alpha\gamma\theta(t)\varepsilon_{\text{м}}(t)] = \ddot{\varepsilon}(t) + \gamma\dot{\varepsilon}(t). \tag{9}$$

Обратим внимание на важный результат. Дифференциальные уравнения ползучести типа (7), (9) позволяют, при решении различных задач в условиях ползучести и длительной прочности, учитывать точное распределение напряжений по поперечному сечению конструкции, соответствующее принятой функции $f_1[\varepsilon_{\text{м}}(t)]$. Гипотеза плоских сечений дает дополнительное дифференциальное условие совместности краевых деформаций сечения (полных и мгновенных)

$$\dot{\varepsilon}_1(t)\varepsilon_{2\text{м}}(t) + \varepsilon_1(t)\dot{\varepsilon}_{2\text{м}}(t) = \dot{\varepsilon}_2(t)\varepsilon_{1\text{м}}(t) + \varepsilon_2(t)\dot{\varepsilon}_{1\text{м}}(t). \tag{10}$$

Оказывается возможным преодолеть существенные трудности, связанные с выявлением характера распределения напряжений по сечению в условиях нелинейной ползучести, и не использовать ошибочную гипотезу о линейном характере этого распределения, особенно при наличии трещин. Деформация $\varepsilon_{\text{м}}$ играет здесь роль вспомогательной переменной, позволяющей в любой момент времени найти соответствующее напряжение.

Оказывается возможным на основе уравнений ползучести (7), (9) отказаться от использования интерполяционных полиномов, применяемых для описания характера распределения напряжений по поперечному сечению конструкции, и в ряде случаев существенно снизить порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений задачи [2].

Рассмотрим способы преобразования последнего интеграла в уравнении (4), позволяющее нелинейное интегральное уравнение свести к линейному.

Введем в рассмотрение эквивалентную зависимость для деформации ползучести

$$\varepsilon_{\text{п}} = \sigma C(t,\tau) = \varepsilon_{\text{м}}\varphi\,, \tag{11}$$

где $\varphi = \varepsilon_{\text{п}}/\varepsilon_{\text{м}}$; для мгновенно линейного материала $\varphi(t,\tau) = E(\tau)C(t,\tau)$, т.е. получаем известную зависимость.

Характеристику ползучести $\varphi$ запишем в виде

$$\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{м}}}C(t,\tau) = \frac{\sigma}{f_2(\sigma)}C(t,\tau) = E_{\text{с}}(\sigma)C(t,\tau),$$

где $E_{\text{с}} = E(\tau)\left[1 - \beta\sigma + \beta^2\sigma^2 - \beta^3\sigma^3 + \ldots\right] = E(\tau)\varphi_1(\sigma)$.

Таким образом, имеем $\varphi = E(\tau)C(t,\tau)\varphi_1(\sigma)$.

Полагая $\varphi_1(\sigma) = 1$, мы рассматриваем мгновенно упругий материал.

Деформация ползучести записывается в следующем виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{п}} &= \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon_{\text{м}}(\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f_2[\sigma(\tau)]C(t,\tau)\frac{\partial E_{\text{с}}(\sigma)}{\partial\tau}d\tau + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} f_2[\sigma(\tau)]E_{\text{с}}(\sigma)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{12}$$

Для частного случая функции $f_2$ из (2) имеем

$$f_2[\sigma(\tau)] = B_1\sigma + B_2\sigma^2 = \frac{1}{E(\tau)}\left[\sigma + B_2E(\tau)\sigma^2\right] = \frac{1}{E(\tau)}f[\sigma(\tau)]. \tag{13}$$

Деформация ползучести из (12) равна для этого случая

$$\varepsilon_{\text{п}} = \int\limits_{t_0}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{1}{E(\tau)}C(t,\tau)\frac{\partial E_{\text{с}}(\sigma)}{\partial\tau}d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{1}{E(\tau)}E_{\text{с}}(\sigma)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau\,. \tag{14}$$

Если в выражении (14) ввести два новых упрощающих допущения

$$\frac{\partial E_{\text{с}}(\sigma)}{\partial\tau} = 0\,;\; E_{\text{с}}(\sigma) = E(\tau), \tag{15}$$

то первый интеграл обращается в ноль, а второй интеграл (14) становится тождественным двум последним интегралам выражения (2). При этом функция $f[\sigma(\tau)] = \frac{1}{B_1}\varepsilon_{\text{м}}[\sigma(\tau)]$ представляет собой мгновенную нелинейную деформацию материала, умноженную на модуль $E(\tau) = 1/B_1$. Эта функция превратила интегральное уравнение (2) в известное уравнение нелинейной ползучести, в котором одновременно материал считается мгновенно упругим.

С помощью упрощающих допущений (15), нелинейное интегральное уравнение (5) можно привести к линейному интегральному уравнению

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_{\text{м}}(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\varepsilon_{\text{м}}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(t,\tau)d\tau\,,$$

а при вырожденной функции $\varphi(t,\tau)=\varphi_0\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right)$, к линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{\varepsilon}+\gamma\varepsilon=\dot{\varepsilon}_{\text{м}}+\gamma(1+\varphi_0)\varepsilon_{\text{м}}\,.$$

При учете старения $\varphi_0=\theta(t)$, получаем

$$\ddot{\varepsilon}+\gamma\,\dot{\varepsilon}=\ddot{\varepsilon}_{\text{м}}+\gamma[1+\theta(t)]\dot{\varepsilon}_{\text{м}}\,.$$

Для упрощения интегрального уравнения (4) можно применить известное допущение о том, что изменение с течением времени параметров нелинейной диаграммы мгновенного деформирования определяется только функцией начального модуля $E(t)$: $\varepsilon_{\text{м}}=f_2[\sigma(t)]=\frac{1}{E(t)}f(\sigma)$.

В этом случае можно записать

$$\varepsilon(t)=\frac{f[\sigma(t)]}{E(t)}+\int\limits_{t_0}^{t}f[\sigma(t)]\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}+\frac{1}{E(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}E(\tau)C(t,\tau)\right)d\tau\,. \qquad (17)$$

Структура выражений, входящих в уравнения (4), (17), показывает, что использование в общей нелинейной теории ползучести формального разложение в ряд Тейлора без учета особенностей диаграммы мгновенного нелинейного деформирования, структуры характеристики ползучести, не может привести к положительным результатам в построении теории.

### Литература

1. *Санжаровский Р.С.* Проблемы теории ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №3. – С. 28-34.

2. *Санжаровский Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. ЛГУ, 1978. – 216 с.

3. *Беглов А.Д., Санжаровский Р.С.* Евространдарты и нелинейная теория железобетона. СПбГАСУ, 2011. – 309 с.

### References

1. *Sanzharovskij R.S.* Problemy teorii polzuchesti // Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. – 2013. – №3, pp. 28-34.

2. *Sanzharovskij R.S.* Ustojchivost' jelementov stroitel'nyh konstrukcij pri polzuchesti. LGU, 1978. – 216 s.

3. *Beglov A.D., Sanzharovskij R.S.* Evrostandarty i nelinejnaja teorija zhelezobe-tona. SPbGASU, 2011. – 309 s.

## NON-LINEAR HEREDITARY CREEP THEORY

R.S. Sanzharovskij

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Republic of Kazakhstan*

The analysis of rules of the creep theory for materials with essentially non-linear momentary behavior (concrete, stone masonry, wood, aluminum, polymer) is researched. Non-linear creep equations are got as well as equations connecting full and instantaneous deformations. The equations for traditional creep measure are got both in integral and differential forms.

KEY WORDS: non-linear creep theory, instantaneous non-linear deformation, analysis of building structures.