

## ***Расчет конструкций из композитных материалов***

### **АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК**

А.А. СЕМЕНОВ, аспирант

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д.4;

[sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com)

*В работе описывается ряд алгоритмов, основанных на методе продолжения решения по параметру применительно к тонкостенным ортотропным оболочкам. В основе исследования заложена математическая модель, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, а также сдвиговую и крутильную жесткость подкрепления. Показаны результаты для нескольких вариантов панелей конических оболочек из углепластика. Проведено сравнение с аналогичными изотропными конструкциями из стали.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** композитные оболочки, ортотропия, подкрепленные оболочки, алгоритмы, математическая модель, метод продолжения решения по параметру, метод Рунге, прочность, устойчивость, оболочки вращения.

#### **Введение**

В современном строительстве, а также в других областях промышленности, большое применение получают конструкции из композитных материалов [1, 2]. Быстрое развитие технологий в данной области позволило наделять уже существующие геометрические формы новыми свойствами: высокой прочностью, огнестойкостью, низкой коррозионностью, легкостью и др. Отдельного внимания здесь заслуживают конструкции в виде тонкостенных оболочек [3, 4]. Исследования поведения таких конструкций проводятся не только в России, но и за рубежом [5–7]. Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек.

При использовании таких композитных материалов, как, например, железобетон или стеклопластик, армирующие элементы часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, и в таком случае конструкцию можно считать ортотропной [8]. Таким образом, для расчета оболочек, выполненных из композиционных материалов, часто используется теория ортотропных оболочек.

Для повышения жесткости тонкостенные конструкции часто подкрепляются ребрами [9–12], что играет особо важную роль при строительстве большепролетных покрытий и перекрытий.

Исследование панелей конических оболочек представляет отдельный интерес, т.к. поведение таких конструкций изучено существенно меньше, чем цилиндрических или пологих. Это связано, прежде всего, с тем, что геометрические соотношения для конических оболочек имеют более сложный вид (из-за появления дополнительной зависимости от координаты  $x$  в параметрах Ляме). Одним из применяемых ранее подходов к решению данной проблемы было сведение конической оболочки к цилиндрической. Радиус цилиндрической оболочки принимался как среднее между большим и малым радиусами конической оболочки. Данная методика хорошо себя показала при расчете оболочек с малым углом конусности, но при его увеличении специфичность строения кони-

ческой оболочки начинает сильнее сказываться на ее устойчивости, и такой подход становится неприемлемым. Так же, как показали проведенные исследования, распределение прогибов и напряжений вдоль образующей конической панели носит несимметричный характер [13]. Таким образом, рассмотрение задачи как осесимметричной не дает возможности достаточно полно исследовать такую конструкцию. Поэтому в данной работе особое внимание уделено исследованию поведения именно конических панелей.

#### Постановка задачи

Математическая модель деформирования тонкой подкрепленной оболочки строится на основе функционала полной энергии деформации (или уравнений равновесия), а также включает в себя геометрические соотношения (связывают деформации и перемещения), физические соотношения (связывают напряжения и деформации) и граничные условия (выбираются в зависимости от способа закрепления контура конструкции).

Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек на основе функционала полной энергии деформации подробно рассмотрена в работе [14]. Модель учитывает геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, а также дискретное введение ребер с учетом сдвиговой и крутильной жесткости. Функционал в таком случае принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{G_1}{2} \int_{a_1 y_1(x)}^{a_2 y_2(x)} \int_{a_1 y_1(x)}^{a_2 y_2(x)} \{ a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_x \varepsilon_y + a_4 \gamma_{xy}^2 + a_5 (\psi_x - \theta_1)^2 + \\ & + a_6 (\psi_y - \theta_2)^2 + a_7 \varepsilon_x \chi_1 + a_8 \varepsilon_x \chi_2 + a_8 \varepsilon_y \chi_1 + a_9 \varepsilon_y \chi_2 + \\ & + a_{10} \gamma_{xy} \chi_{12} + a_{11} \chi_1^2 + a_{12} \chi_2^2 + a_{13} \chi_1 \chi_2 + a_{14} \chi_{12}^2 - a_{15} q W \} AB dx dy, \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_1 - a_{15}$  представляют собой некоторые комбинации механических характеристик материала и жесткостных параметров ребер. Область, занимаемая оболочкой, задается в пределах интегрирования  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ . Использование функций  $y_1(x), y_2(x)$  позволяет учитывать нестандартную форму контура оболочки [15]. Функционал (1) является достаточно сложной зависимостью и включает в себя неизвестные функции перемещений  $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$  и углов поворота нормали  $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$ . Расчет оболочечных конструкций в соответствии с рассматриваемой моделью требует разработки эффективных вычислительных алгоритмов, основанных на численных методах, а также их реализации с использованием современных средств программирования [16, 17].

#### Цель исследования

Целью данной работы является построение оптимальных алгоритмов исследования напряженно-деформированного состояния подкрепленных ортотропных оболочек вращения с учетом ряда дополнительных факторов.

#### Описание исследования

В данной работе подробно рассматриваются два варианта алгоритма, основанного на методе продолжения решения по параметру: алгоритм, использующий смену параметра продолжения решения [18] и алгоритм, основанный на методе продолжения решения по наилучшему параметру [19–20]. Также следует упомянуть еще два алгоритма, которые могут быть здесь использованы:

- Алгоритм, основанный на методе Рунге и итерационных процессах [21].

В соответствии с методом Рунге формируется система нелинейных алгебраических уравнений, и нелинейные члены переносятся в правую часть. Полученная

система решается методом итераций (на первом шаге задача считается линейной). Итерационный процесс заканчивается, когда значения прогибов на предыдущей и последующей итерациях практически совпадают. Нагрузка, при которой процесс итераций расходится, принимается за критическую нагрузку. По такому алгоритму находится только первая из возможных критических нагрузок – при этой нагрузке процесс итерации расходится, и закритическое поведение конструкции исследовать невозможно [16].

• Алгоритм, основанный на аппроксимации искомым функциям NURBS-поверхностями (неоднородный рациональный B-сплайн) и нахождении неизвестных параметров при помощи градиентного метода нахождения минимума L-BFGS, который подробно рассматривается в работе [22]. Этот алгоритм позволяет находить как местные, так и общие формы потери устойчивости оболочек, но не позволяет находить нижние критические нагрузки и точки бифуркации.

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки решается вариационная задача нахождения минимума функционала (1). Для этого к функционалу применяется метод Ритца, и неизвестные функции представляются в виде

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{I=1}^N U(I)Z1(I); V(x, y) = \sum_{I=1}^N V(I)Z2(I); \\ W(x, y) &= \sum_{I=1}^N W(I)Z3(I); \psi_x(x, y) = \sum_{I=1}^N PS(I)Z4(I); \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{I=1}^N PN(I)Z5(I), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U(I)$ ,  $V(I)$ ,  $W(I)$ ,  $PS(I)$ ,  $PN(I)$  – неизвестные числовые параметры;  $Z1(I) – Z5(I)$  – известные аппроксимирующие функции аргументов  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки [15, 23].

Подставим выражения (2) в (1), найдем производные от функционала по неизвестным числовым параметрам и приравняем их к нулю. В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^N [U(I)C1(I, l) + V(I)C2(I, l) + W(I)C3(I, l) + PS(I)C4(I, l) + PN(I)C5(I, l)] + A_1(l) &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C6(I, l) + V(I)C7(I, l) + W(I)C8(I, l) + PS(I)C9(I, l) + PN(I)C10(I, l)] + A_2(l) &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C11(I, l) + V(I)C12(I, l) + W(I)C13(I, l) + PS(I)C14(I, l) + PN(I)C15(I, l)] + A_3(l) - CR(l)q &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C16(I, l) + V(I)C17(I, l) + W(I)C18(I, l) + PS(I)C19(I, l) + PN(I)C20(I, l)] + A_4(l) &= 0. \quad (3) \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C21(I, l) + V(I)C22(I, l) + W(I)C23(I, l) + PS(I)C24(I, l) + PN(I)C25(I, l)] + A_5(l) &= 0. \end{aligned}$$

где коэффициенты этой системы представляют собой двойные интегралы от комбинаций входных параметров и аппроксимирующих функций. Например,

$$C1(I, l) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \\ & + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + \\ & + 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} + \\ & + 2a_5 k_x Z1(I) k_x Z1(I) \end{aligned} \right\} AB dx dy. \quad (4)$$

Все нелинейные составляющие содержатся в коэффициентах  $A_1(l) - A_5(l)$ , например

$$A_1(l) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(I) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] - \\ & - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) \right) + \\ & + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - a_3 \theta_1 k_x Z1(I) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] - \\ & - a_3 \theta_1 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) \right) + \\ & + \left( 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(I) \right) \left[ \theta_1 \theta_2 \right] - \\ & - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) \right) - \\ & - a_7 \theta_1 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right) - \\ & - a_8 \theta_1 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right) - \\ & - \frac{1}{2} a_{10} \theta_2 k_x Z1(I) \left( \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right) \end{aligned} \right\} AB dx dy$$

1. Метод продолжения решения по параметру со сменой параметра продолжения

Тонкостенные оболочки могут иметь несколько форм потери устойчивости, когда прохлопывается только часть оболочки. Причем такое прохлопывание может происходить несколько раз перед тем, как оболочка прохлопнется полностью. Для исследования местных и общих форм потери устойчивости необходимо иметь возможность исследовать поведение конструкции и в закритической области.

Если для решения нелинейной системы алгебраических уравнений (3) применяется метод продолжения решения по параметру, то нелинейные члены уравнений  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$  необходимо записать в развернутом виде, подставив в них выражения (2), и провести соответствующие преобразования. Например,  $A_1(l)$  представим в виде

$$A_4(I) = \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ \begin{aligned} & C26(I, K, L)W(I)W(K) + C27(I, K, L)W(I)U(K) + C28(I, K, L)U(I)W(K) + \\ & + C29(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C30(I, K, L, L)W(I)W(K)W(L) + C31(I, K, L, L)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C32(I, K, L, L)W(I)W(K)U(L) + \\ & + C33(I, K, L, L)W(I)U(K)U(L) + C34(I, K, L, L)U(I)W(K)W(L) + \\ & + C35(I, K, L, L)U(I)U(K)W(L) + \\ & + C36(I, K, L, L)U(I)W(K)U(L) + C37(I, K, L, L)U(I)U(K)U(L) \end{aligned} \right) + \\ & + C38(I, K, L)U(I)W(K) + C39(I, K, L)W(I)W(K) + C40(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + C41(I, K, L)W(I)U(K) + C42(I, K, L)W(I)W(K) + C43(I, K, L)U(I)W(K) + \\ & + C44(I, K, L)W(I)U(K) + C45(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C46(I, K, L, L)W(I)W(K)W(L) + C47(I, K, L, L)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C48(I, K, L, L)U(I)W(K)W(L) + \\ & + C49(I, K, L, L)U(I)U(K)W(L) + C50(I, K, L, L)W(I)W(K)U(L) + \\ & + C51(I, K, L, L)U(I)W(K)U(L) + \\ & + C52(I, K, L, L)W(I)U(K)U(L) + C53(I, K, L, L)U(I)U(K)U(L) \end{aligned} \right) + \\ & + C54(I, K, L)U(I)W(K) + C55(I, K, L)U(I)U(K) + C56(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + C57(I, K, L)U(I)U(K) + C58(I, K, L)W(I)W(K) + C59(I, K, L)W(I)U(K) + \\ & + C60(I, K, L)W(I)W(K) + C61(I, K, L)W(I)U(K) + C62(I, K, L)U(I)W(K) + \\ & + C63(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C64(I, K, L, L)W(I)W(K)W(L) + C65(I, K, L, L)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C66(I, K, L, L)U(I)W(K)W(L) + C67(I, K, L, L)U(I)U(K)W(L) + \\ & + C68(I, K, L, L)W(I)W(K)U(L) + C69(I, K, L, L)W(I)U(K)U(L) + \\ & + C70(I, K, L, L)U(I)W(K)U(L) + C71(I, K, L, L)U(I)U(K)U(L) \end{aligned} \right) + \\ & + C72(I, K, L)U(I)W(K) + C73(I, K, L)U(I)W(K) + C74(I, K, L)U(I)W(K) + \\ & + C75(I, K, L)U(I)U(K) + C76(I, K, L)U(I)U(K) + C77(I, K, L)U(I)U(K) + \\ & + C78(I, K, L)PS(I)W(K) + C79(I, K, L)PS(I)U(K) + C80(I, K, L)PN(I)W(K) + \\ & + C81(I, K, L)PN(I)U(K) + C82(I, K, L)PS(I)W(K) + C83(I, K, L)PS(I)U(K) + \\ & + C84(I, K, L)PN(I)W(K) + C85(I, K, L)PN(I)U(K) + C86(I, K, L)PS(I)W(K) + \\ & + C87(I, K, L)PS(I)U(K) + C88(I, K, L)PN(I)W(K) + C90(I, K, L)PN(I)U(K) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Чтобы применить метод продолжения решения по параметру, кратко полученную систему запишем в векторной форме

$$F(X, P) = 0, \tag{5}$$

где вектор  $X$  – вектор неизвестных числовых параметров,  $P$  – нагрузка.

Известно, что в ненагруженном состоянии оболочки значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, т.е.

$$F(X^0, P^0) \equiv 0, \quad X^0 = 0, \quad P^0 = 0. \tag{6}$$

Продифференцировав систему (5) по параметру нагрузки  $P$  получим систему линейных (относительно  $dX/dP$ ) уравнений

$$J \frac{dX}{dP} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0. \tag{7}$$

Здесь  $J$  – якобиан вектор-функции  $F$ ,  $\det(J)$  – определитель матрицы Якоби  $J$ . Точки, в которых выполняется условие  $\det(J) \neq 0$ , называются регулярными, а точки, в которых  $\det(J) = 0$ , – особыми. В особых точках возможность про-

должения решения обычно сохраняется, но само продолжение может стать неоднозначным, т.е. появляется возможность разветвления кривой множества решений системы. Если в особой точке наблюдается разветвление кривой, то эта особая точка называется точкой бифуркации [24]. Определение точек ветвления решений имеет большое значение при анализе устойчивости тонких оболочек [25]: если оболочка не идеальна (имеется неправильность формы, несимметричные граничные условия, малые возмущения в виде несимметричных нагрузок и т. п.), потеря устойчивости может происходить вблизи точки бифуркации. Поэтому зачастую именно на них следует ориентироваться при оценке несущей способности некоторых видов конструкций.

Если применить для решения полученной задачи Коши (5), (6) процедуру метода Эйлера, то получается расчетная схема

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, P_{i+1} = P_i + \Delta P_i.$$

Таким образом, вместо системы нелинейных алгебраических уравнений решается последовательность систем линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой на каждом шаге заново определяются с учетом предыстории продолжения решения по длине дуги кривой множества решений.

Если  $\Delta P_i$  задавать, а  $\Delta X_i$  находить из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_i, P_i)\Delta X_i + \frac{\partial F}{\partial P}(X_i, P_i)\Delta P_i = 0,$$

то получится метод последовательных нагружений, впервые предложенный В.В. Петровым [26]. Здесь в качестве параметра продолжения решения берется нагрузка  $P$ . Благодаря использованию этого метода было решено много практических инженерных задач.

Основная сложность исследования устойчивости оболочек при использовании метода последовательных нагружений состоит в обходе особых точек. Один из способов такого обхода состоит в смене параметра продолжения. Оценивается определитель системы уравнений: если на определенном шаге алгоритма произошла смена знака, тогда приращения по всем переменным меняют знак на противоположный. Главным недостатком этого метода является невозможность его применения для обхода точек бифуркации и построения бифуркационных ветвей.

## 2. Метод продолжения решения по наилучшему параметру

Существует также модификация рассматриваемого алгоритма, основанная на выборе наилучшего параметра продолжения [19, 20]. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги  $\lambda$  кривой множества решений. В отличие от предыдущего варианта метода, здесь параметр нагрузки  $P$  является равноправным с остальными неизвестными, и его удобно добавить к остальным параметрам:

$$\tilde{X} = (X, P)^T = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I), P)^T, I = 1..N.$$

Параметр  $\lambda$  не входит явно в систему уравнений (5) и связан с переменными задачи из вектора  $\tilde{X}$  следующим образом

$$(d\lambda)^2 = \sum_{I=1}^N \left[ (dU(I))^2 + (dV(I))^2 + (dW(I))^2 + (dPS(I))^2 + (dPN(I))^2 + (dP)^2 \right] (8)$$

Продифференцировав (5) по параметру  $\lambda$ , считая что переменные задачи от него зависят, получим систему дифференциальных уравнений  $\bar{J}(d\tilde{X}/d\lambda) = 0$ , с начальным условием  $\tilde{X}(\lambda_0) = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ . Здесь  $\bar{J} = \partial F(\tilde{X})/\partial \tilde{X}$  – расширенная матрица Якоби, имеющая  $5N$  строк и  $(5N + 1)$  столбцов.

Процесс продолжения решения по наилучшему параметру системы нелинейных уравнений (5) на каждом шаге сводится к решению задачи Коши

$$\begin{bmatrix} \bar{J} \\ \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}(\lambda_0) = 0. \quad (9)$$

Система (9) относительно  $d\tilde{X}/d\lambda$  является нелинейной. Чтобы ее решить, необходимо провести линеаризацию и перейти к итерационному процессу:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}(\lambda_k) \\ \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T(\lambda_{k-1}) \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Чем больше разница между векторами  $d\tilde{X}/d\lambda$  на текущем и предыдущем шагах, тем хуже обусловленность матрицы системы и, следовательно, тем менее устойчив вычислительный процесс. В связи с этим целесообразно применять адаптивный выбор сетки.

Метод продолжения решения по наилучшему параметру при использовании адаптивного выбора сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации.

**Апробация методики.**

Представленные алгоритмы были реализованы в среде аналитических вычислений Maple 17 и использованы для исследования прочности и устойчивости тонкостенных ортотропных оболочек. Исследовались пологие, цилиндрические и конические однослойные оболочки из композитных материалов, находящиеся под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки. У всех рассматриваемых оболочек направления осей ортотропии совпадали с направлениями осей локальной системы координат.

В данной работе приводятся результаты, полученные в ходе исследования двух вариантов конических панелей и двух вариантов пологих оболочек (квадратных в плане). Общий вид конической оболочки, а также принятая локальная криволинейная система координат показаны на рис. 1.

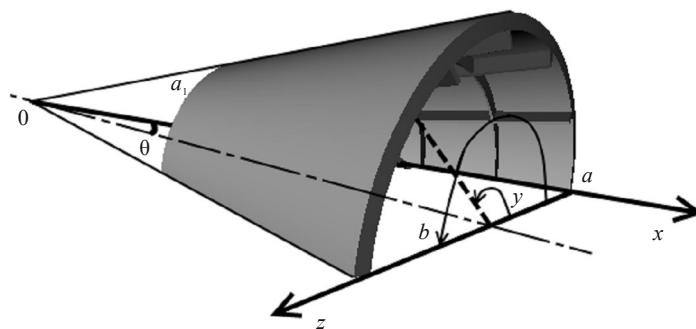


Рис. 1. Общий вид и локальная система координат конической оболочки

Для аппроксимации искомых функций были выбраны различные комбинации синусов и косинусов, удовлетворяющих заданным краевым условиям (Таблица 1). Эти функции применимы только для незамкнутых оболочек, т.к. для замкнутых должно выполняться условие  $2\pi$ -периодичности по направлению оси  $y$  [21].

Таблица 1. Варианты аппроксимирующих функций для панелей конических оболочек

Способ закрепления	Функция	По направлению $x$	По направлению $y$
Жесткая заделка	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$	$\sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right)$	$\sin\left(l\pi \frac{y-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}\right)$
Шарнирно-неподвижно	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$	$\sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right)$	$\sin\left(l\pi \frac{y-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}\right)$
	$\Psi_x(x, y)$	$\cos\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right)$	$\sin\left(l\pi \frac{y-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}\right)$
	$\Psi_y(x, y)$	$\sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right)$	$\cos\left(l\pi \frac{y-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}\right)$

В качестве функций  $y_1(x), y_2(x)$  могут приниматься различные кривые, например, дуга эллипса [15]:

$$f(x) = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a-a_1}\right)^2 \left(x - \frac{a_1+a}{2}\right)^2}. \quad (10)$$

Для рассматриваемых далее панелей оболочек принимается  $y_1(x) = 0, y_2(x) = b$ .

Параметры материалов конструкций показаны в Таблице 2, а геометрические параметры – в Таблице 3. Помимо оболочек из ортотропных материалов (углепластика [27]), для сравнения рассматривались изотропные оболочки, выполненные из стали. Расчеты проводились при удержании двадцати пяти членов разложения функций в ряды по методу Ритца ( $N = 25$ ).

Таблица 2. Параметры материалов конструкций

Материал	$E_1$ , МПа	$E_2$ , МПа	$G_{12}$ , МПа	$G_{13}$ , МПа	$G_{23}$ , МПа	$\mu_{12}$	$\mu_{21}$
Углепластик	$1.4 \cdot 10^5$	$0.097 \cdot 10^5$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.33 \cdot 10^4$	0.29	0.02
Сталь	$2.1 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^5$	$8.07 \cdot 10^4$	$8.07 \cdot 10^4$	$8.07 \cdot 10^4$	0.3	0.3

Таблица 3. Геометрические параметры рассматриваемых конструкций

Параметр	Пологие оболочки		Конические панели	
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$a_1$ – начало оболочки вдоль оси $x$ , м	0	0	50	50
$a$ – конец оболочки вдоль оси $x$ , м	5.4	5.4	90	90
$R_1, R_2$ – радиусы главных кривизн оболочки, м	20.25	20.25	–	–
$\theta$ – угол конусности, рад	–	–	0.78	0.78
$b$ – угол разворота, рад	–	–	$\pi$	$\pi$
$h$ – толщина оболочки, м	0.09	0.09	0.01	0.01
Закрепление контура	шарн.-неп.	шарн.-неп.	шарн.-неп.	шарн.-неп.
Материал	сталь	углепластик	сталь	углепластик



На рис. 2 приводится график «нагрузка  $P$  – прогиб  $W$ » для конической панели варианта 3. Здесь и далее на графиках черным цветом показана кривая максимального прогиба ( $W_{max}$ ), который вычисляется по всей области оболочки; красным цветом ( $W_c$ ) – кривая прогиба в центре области конструкции  $\left(x = \frac{a_1 + a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$ ; синим цветом ( $W_4$ ) – в четверти  $\left(x = \frac{3a_1 + a}{4}, y = \frac{b}{4}\right)$ ; серым цветом показываются участки кривой после достижения интенсивностью напряжений предела текучести, который на всех кривых отмечен точками (для изотропных оболочек).

Как видно из рис. 2, оболочка теряет устойчивость при нагрузке 0.0153 МПа (малое изменение параметра нагрузки приводит к большим изменениям значений прогибов), но «хлопка» не происходит. Достижение интенсивностью напряжений предела текучести (критерий Мизеса) происходит при нагрузке 0.0723 МПа. На рис. 3 приводится график «нагрузка  $P$  – прогиб  $W$ » для конической ортотропной панели варианта 4. Помимо описанных выше кривых, на графике красным цветом представлены особые точки, в которых  $\det(J) = 0$ . В данном случае эти точки соответствуют верхней (0.013 МПа, точка  $A$ ) и нижней (0.0025 МПа, точка  $C$ ) критическим нагрузкам. Как видно из графика, при достижении указанных нагрузок происходит «хлопок» и переход на новое равновесное состояние в точки  $B$  и  $D$  соответственно. Так как «хлопок» наиболее ярко выражен в центре конструкции, переходы на новое равновесное состояние показаны на кривой  $W_c$ , а у обозначений точек добавлены индексы:  $A_c, B_c, C_c, D_c$ . Также на кривых показан момент, когда значения растягивающих напряжений вдоль оси  $x$  достигают предельных значений ( $F_x^+$ ). На Рисунках 4а, 4б показано поле прогибов оболочки (вид сбоку), отложенное от плоскости, в докритический и закритический момент для нагрузки 0.013 МПа.

Так как поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple, не достаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции, желательно откладывать значения прогибов от поверхности оболочки [28]. На рис. 4в, 4г показаны те же поля прогибов, что и на 4а, 4б, но отложенные от поверхности оболочки. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба  $k = 10$ . Рис. 4в, 4г были получены с помощью программного модуля визуализации Graphic Library, разработанного в соответствии с заданием по гранту «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» тема № 2.1.2/10824 на 2011 год.

Для ортотропных оболочек оценка прочности производится сравнением значений всех компонент напряжений с пределами прочности на растяжение и сжатие. Пределы прочности рассматриваемого углепластика, а также значения соответствующих им нагрузок для оболочек вариантов 2 и 4, приводятся в табл. 4. Известно, что после достижения хотя бы одной компонентой предельного значения, поведение оболочки существенно изменится. Полученные далее значения на практике не реализуются, но могут представлять научный интерес, поэтому расчет конструкций был продолжен. На рис. 5 показаны поля напряжений по компонентам  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  на верхней поверхности оболочки при достижении первого предельного значения напряжений (растяжение вдоль оси  $x$ ).

Чтобы провести сравнение результатов для оболочек вариантов 3 (сталь) и 4 (углепластик), было произведено наложение графиков «нагрузка – прогиб» (Рисунок 6). Значения критических нагрузок и соответствующих им макси-

мальных значений прогибов для рассматриваемых вариантов конструкций показаны в табл. 5.

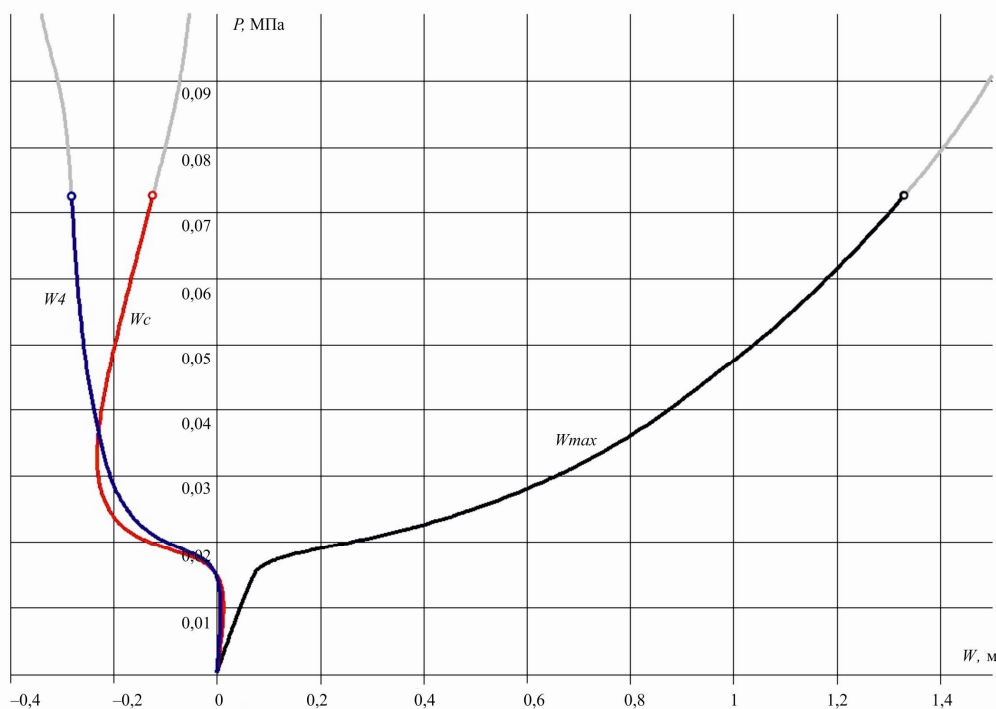


Рис. 2. График «нагрузка  $P$  – прогиб  $W$ » для конической панели варианта 3

Таблица 4. Пределы прочности однонаправленного углепластика и соответствующие им предельные нагрузки для рассматриваемых ортотропных оболочек

	$F_x^+$	$F_y^+$	$F_x^-$	$F_y^-$	$F_{xy}$
Предел прочности, МПа	700	27	600	184	55
Вариант 2 Достигается при нагрузке, МПа	2.2548	0.4776	0.7715	–	1.9516
Вариант 4 Достигается при нагрузке, МПа	0.0351	0.1003	–	0.0423	0.0947

Таблица 5. Значения критических нагрузок для рассматриваемых вариантов оболочек

Параметр	Пологие оболочки		Конические панели	
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Критическая нагрузка, МПа	3.1215	0.7770	0.0153	0.0130
Максимальный прогиб, м	0.0773	0.0791	0.0746	0.9837

### Заключение

Как показали исследования, представленные алгоритмы являются достаточно эффективными и могут использоваться для расчета тонкостенных ортотропных оболочек.

Применение алгоритма, основанного на методе продолжения решения по наилучшему параметру, позволяет наиболее полно исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки и ее устойчивость.

Использование модуля визуализации GraphicLibrary делает анализ поведения конструкции существенно более наглядным.

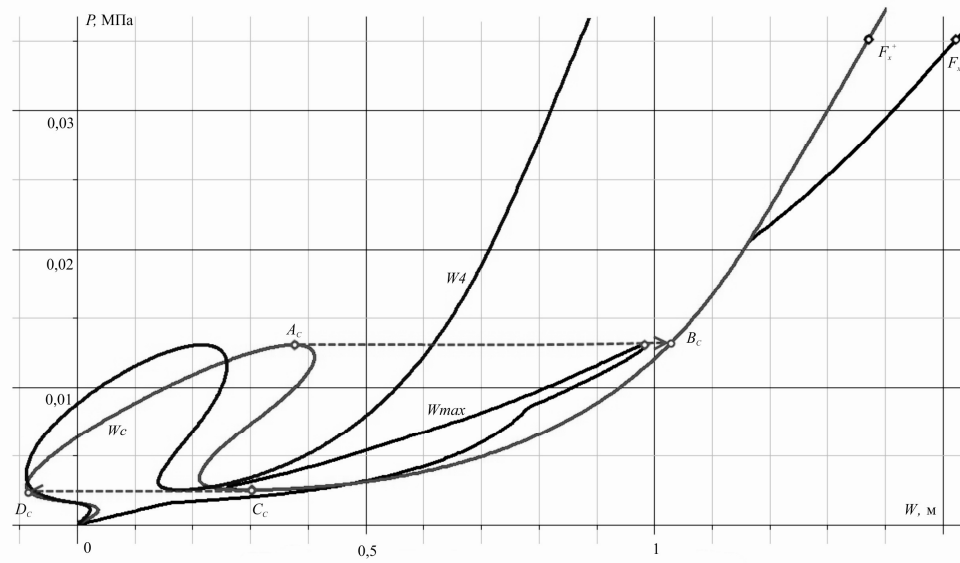
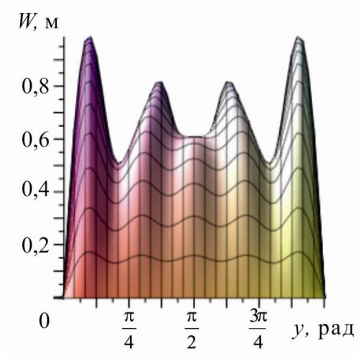
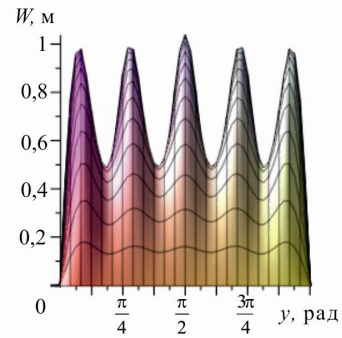


Рис. 3. График «нагрузка  $P$  – прогиб  $W$ » для конической панели варианта 4

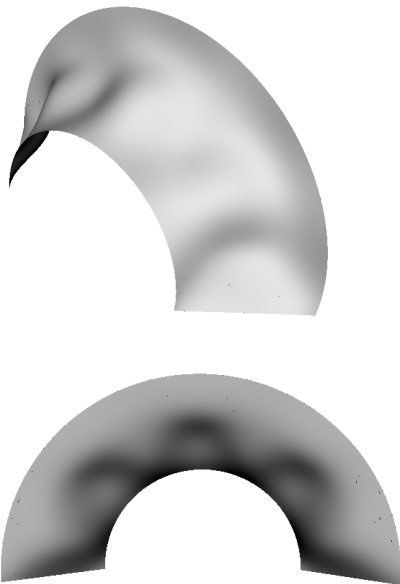
а)



б)



в)



г)

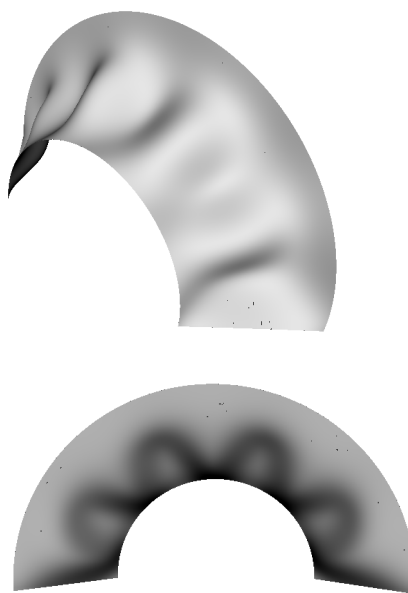


Рис. 4. Поле прогибов оболочки варианта 4 в докритический и закритический момент

при нагрузке 0.013 МПа

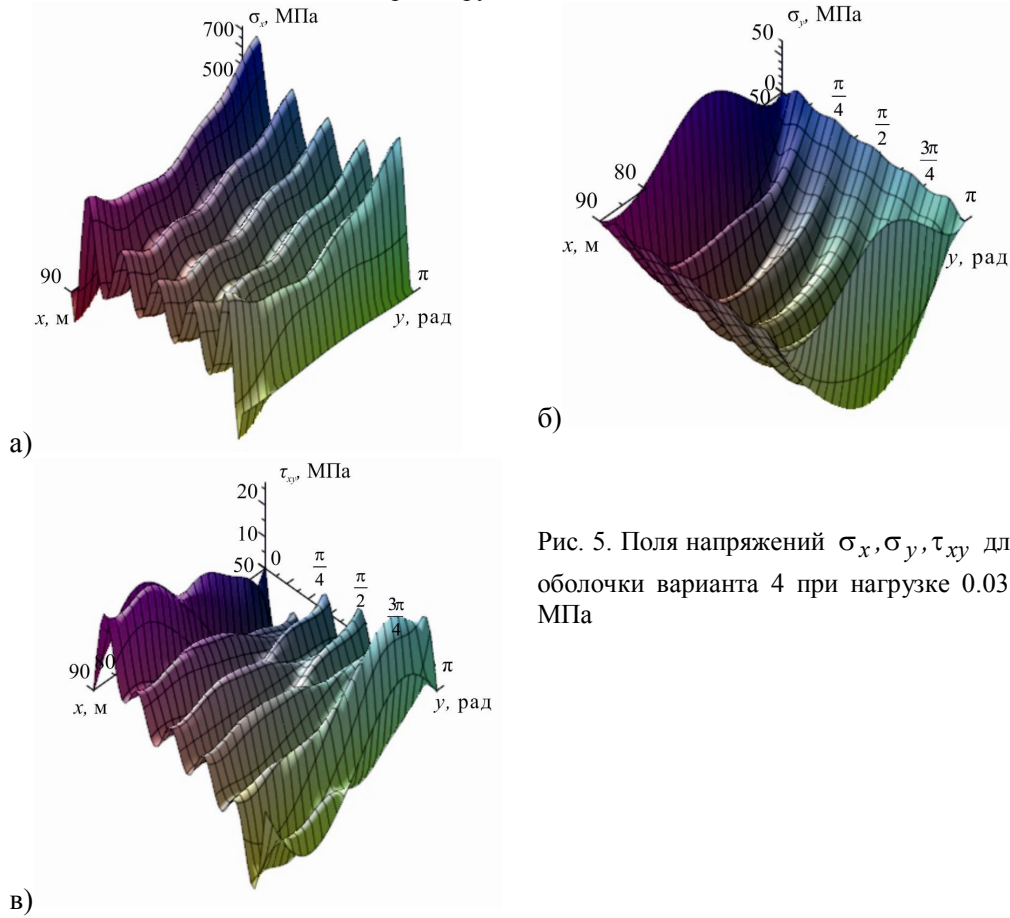


Рис. 5. Поля напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для оболочки варианта 4 при нагрузке 0.035 МПа

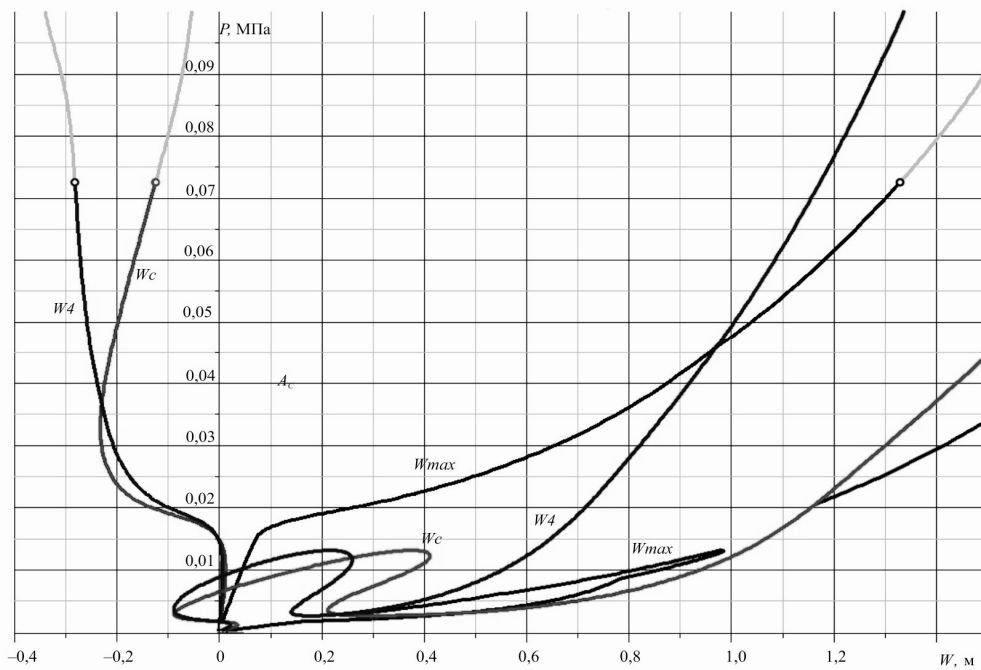


Рис. 6. Наложение графиков «нагрузка  $P$  – прогиб  $W$ » для конических панелей вариантов 3 и 4

Л и т е р а т у р а

1. Зеленский Э.С., Куперман А.М., Горбаткина Ю.А., Иванова-Мумжиева В.Г., Берлин А.А. Армированные пластики – современные конструкционные материалы. – Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева), 2001, т. XLV, № 2 С.56–74
2. Дубинчик Е.В., Пастушков В.Г., Янковский Л.В. Особенности применения композитных материалов в строительстве / Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе, № 3, 2013. С. 175–181.
3. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, № 1, 2013. С. 51–56.
4. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 248 с.
5. Pimenta P.M., Wriggers P. New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems // CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 519. Springer, 2010. 228 p.
6. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // Composite Structures, № 98, 2013. P.169–191.
7. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis, First Edition// John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
8. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига, «Зинатне», 1974. – 310 с.
9. Валеев Р.М., Куваев А.С., Курлапов Д.В., Родионов А.В. Усиление железобетонных конструкций с применением полимерных композитов. / Инженерно-строительный журнал, № 3, 2009. – С.22–24.
10. Дьячкова А.А., Кузнецов В.Д. Расчет усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами / Инженерно-строительный журнал, № 3, 2009. – С.25–28.
11. Москаленко Л.П. Эффективность подкрепления пологих оболочек ребрами переменной высоты // Вестник гражданских инженеров №3(28), 2011, С. 46–50.
12. Карпов В.В. Оболочки, подкрепленные ребрами, проходящими под углом к координатным линиям // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 2(37). –С. 215-219.
13. Преображенский И.Н., Грицак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
14. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения// Инженерно-строительный журнал, № 5, 2013.
15. Семенов А.А. Методика учета формы контура тонкостенной оболочки, заданного функционально // Актуальные проблемы современного строительства и пути их эффективного решения: материалы Международной научно-практической конференции. 10-12 октября 2012 г. / под общей редакцией А. Н. Егорова, А. Г. Черных; СПбГАСУ. – В 2 ч. Ч. I. – СПб., 2012. – С. 233–237.
16. Карпов В.В. «Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения», В 2ч. Ч.2 Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
17. Атисков А.Ю., Баранова Д.А., Карпов В.В., Москаленко Л.П., Семенов А.А. Компьютерные технологии расчета оболочек. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – 184 с.
18. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
19. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
20. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров № 4 (29), 2011, С. 161–164.
21. Карпов В.В. «Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения», В 2ч. Ч.1 Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.

22. Баранова Д.А. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS // Промышленное и гражданское строительство, № 3, 2012. С.58–59.
23. Семенов А. А. Компьютерное моделирование докритического и закритического поведения тонкостенных оболочек при разных способах закрепления контура // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 4 (33). – С. 247–251.
24. Москаленко Л.П., Семенов А.А. Алгоритм нахождения точек бифуркации для тонкостенных оболочек // Высокие технологии и фундаментальные исследования. Т.4: сборник трудов Десятой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». 09-11.12.2010, Санкт-Петербург, Россия / под ред. А.П. Кудинова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. С. 215–216.
25. Трушин С.И., Михайлов А.В. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек // Вестник НИЦ Строительство, № 2, 2010. С.150–158.
26. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. –119 с.
27. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Серия «Машиностроение», № 8, 2012. С. 70–77.
28. Асеев А.В., Макаров А.А., Семенов А.А. Визуализация напряженно- деформированного состояния тонкостенных ребристых оболочек // Вестник гражданских инженеров, № 3 (38), 2013. С. 226–232.

#### References

1. Zelenskiy Je.S., Kuperman A.M., Gorbatkina Ju.A., Ivanova-Mumzhieva V.G., Berlin, A.A. (2001). Armirovannye plastiki – sovremennye konstrukcionnye materialy, *Ros. him. zh.* (Zh. Ros. him. ob-va im. D.I. Mendeleeva), t. XLV, № 2, pp.56–74
2. Dubinchik E.V., Pastushkov V.G., Jankovskij L.V. (2013). Osobennosti primeneniya kompozitnyh materialov v stroitel'stve, *Modernizacija i nauchnye issledovanija v transportnom komplekse*, № 3, pp. 175–181.
3. Krivoschapko S.N. (2013). On opportunity of shell structures in modern architecture and building, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 1, pp. 51–56.
4. Suhinin S.N. (2010). *Prikladnye zadachi ustojchivosti mnogoslojnyh kompozitnyh obolochek*, M.: FIZMATLIT, 248 s.
5. Pimenta P.M., Wriggers P. (2010). New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems, *CISM International Centre for Mechanical Sciences*, Vol. 519. Springer, 228 p.
6. Qu Y., Long, X., Wu, S., Meng, G. (2013). A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia, *Composite Structures*, № 98, pp.169–191.
7. Carrera E., Brischetto S., Nali P. (2011). *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, First Edition, John Wiley & Sons, Ltd.
8. Rikards R.B., Teters G.A. (1974). *Ustojchivost' obolochek iz kompozitnyh materialov*, Riga, «Zinatne», 310 p
9. Valeev R.M., Kuvaev A.S., Kurlapov D.V., Rodionov A.V. (2009). Usilenie zhelezobetonnyh konstrukcij s primeneniem polimernyh kompozitov, *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*, № 3, pp. 22–24.
10. D'jachkova A.A., Kuznecov V.D. (2009). Raschet usilenija zhelezobetonnyh plit uglerodnymi kompozicionnymi materialami, *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*, № 3, pp.25–28.
11. Moskalenko L.P. (2011). Jefferktivnost' podkrepleniya pologih obolochek rebrami peremenoj vysoty, *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, №3 (28), pp. 46–50.
12. Karpov V.V. (2013). Obolochki, podkreplennye rebrami, prohodjashimi pod uglom k koordinatnym linijam, *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, № 2(37), pp 215-219.
13. Preobrazhenskij I.N., Grishhak V.Z. (1986). *Ustojchivost' i kolebanija konicheskikh obolochek*, M.: Mashinostroenie, 240 p.
14. Karpov V.V., Semenov A.A. (2013). Matematicheskaja model' deformirovanija podkreplennyh ortotropnyh obolochek vrashhenija, *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*, № 5.
15. Semenov A.A. (2012). Metodika ucheta formy kontura tonkostennoj obolochki, zadannogo funkcional'no, *Aktual'nye problemy sovremennogo stroitel'stva i puti ih jefferktivnogo reshenija: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii*, Oct. 10-12, 2012, SPbGASU, Vol. 2, Ch. I, pp. 233–237.
16. Karpov V.V. (2011). Prochnost' i ustojchivost' podkoeplennyh obolochek vrashhenija, Vol. 2, Ch.2, *Vychislitel'nyj jeksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdejstvii*, M.: FIZMATLIT, 248 p.

17. Atiskov A.Ju., Baranova D.A., Karpov V.V., Moskalenko L.P., Semenov A.A. (2012). *Komp'yuternye tehnologii rascheta obolochek*, SPb.: SPbGASU, 184 p.
18. Grigoljuk Je.I., Shalashilin V.I. (1988). *Problemy nelinejnogo deformirovanija: Metod prodolzhenija reshenija po parametru v nelinejnyh zadachah mehaniki tverdogo deformiruемого tela*, M.: Nauka, 232 p.
19. Kuznecov E.B. (2010). *Metod prodolzhenija reshenija i nailuchshaja parametrizacija*, M.: Izd-vo MAI-PRINT, 160 p.
20. Moskalenko L.P. (2011). Metodika issledovanija ustojchivosti pologih rebristyh obolochek na osnove metoda prodolzhenija reshenija po nailuchshemu parametru, *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, № 4 (29), pp. 161–164.
21. Karpov V.V. (2010). Prochnost' i ustojchivost' podkreplennyh obolochek vrashhenija, Vol. 2, Ch.1, *Modeli i algoritmy issledovanija prochnosti i ustojchivosti podkreplennyh obolochek vrashhenija*, M.: FIZMATLIT, 288 p.
22. Baranova D.A. (2012). Algoritm issledovanija ustojchivosti podkreplennyh obolochek vrashhenija na osnove metoda L-BFGS, *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, № 3, pp.58–59.
23. Semenov A. A. (2012). Komp'yuternoe modelirovanie dokriticheskogo i zakriticheskogo povedenija tonkostennyh obolochek pri raznyh sposobah zakreplenija kontura, *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, № 4 (33), pp. 247–251.
24. Moskalenko L.P., Semenov, A.A. (2010). Algoritm nahozhdenija toчек bifurkacii dlja tonkostennyh obolochek, Vysokie tehnologii i fundamental'nye issledovanija. T.4: Sb. trudov Desjatoj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Issledovanie, razrabotka i primenenie vysokih tehnologij v promyshlennosti». 09-11.12.2010, SPb, Russia, SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, pp. 215–216.
25. Trushin S.I., Mihajlov A.V. (2010). Ustojchivost' i bifurkacii gibkih pologih setchatyh obolochek, *Vestnik NIC Stroitel'stvo*, №2, pp.150–158.
26. Petrov V.V. (1975). *Metod posledovatel'nyh nagruzhenij v nelinejnoj teorii plastinok i obolochek*, Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 119 p.
27. Smerdov A.A., Bujanov, I.A., Chudnov, I.V. (2012). Analiz optimal'nyh sochetanij trebovanij k razrabatyvaemym ugleplastikam dlja krupnogabaritnyh raketno-kosmicheskikh konstrukcij, *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Serija "Mashinostroenie"*, № 8, pp. 70–77.
28. Aseev A.V., Makarov A.A., Semenov A.A. (2013). Vizualizacija naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija tonkostennyh rebristyh obolochek, *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, № 3 (38), pp. 226–232.

#### ALGORITHMS FOR THE RESEARCH OF STRENGTH AND STABILITY OF REINFORCED ORTHOTROPIC SHELLS

A.A. Semenov

*Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, SPb*

The paper describes several algorithms based on the method of parameter continuation for thin-walled orthotropic shells. The basis of the study incorporated a mathematical model that takes into account the geometric nonlinearity, lateral shifts, as well as shear and torsional stiffness of the reinforcement. Showing results for several variants of panels conical shells of carbon fiber. A comparison with similar isotropic structures of steel is presented.

KEYWORDS: composite shells, orthotropy, reinforced shells, algorithms, mathematical model, the method parameter continuation, the Ritz method, the strength, stability, shells of revolution.

