

**ВЛАГОУПРУГОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО  
ПОЛОГО ШАРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ  
ВЛАЖНОСТНОМ РЕЖИМЕ**

В.И. АНДРЕЕВ <sup>\*)</sup>, *д-р техн. наук, профессор,*  
А.С. АВЕРШЬЕВ <sup>\*\*)</sup>, *аспирант*  
*Московский государственный строительный университет,*  
*129337 Москва, Ярославское шоссе, д.26*  
<sup>\*)</sup>asv@mgsu.ru; <sup>\*\*)</sup>fullbass-@mail.ru

*Приведено решение центральносимметричной нестационарной задачи влагопереноса в сферической области с отверстием, моделирующей часть грунтового массива, при распространении влаги от внутренней поверхности к периферии. На втором этапе решается квазистационарная задача влагоупругости для неоднородного тела, что обусловлено неравномерным изменением деформационных характеристик грунта при насыщении его влагой. Термин влагоупругость используется по аналогии с термином термоупругость, поскольку наличие в материале влаги вызывает вынужденные деформации аналогичные температурным и в задачах тепло- и влагопереноса используется одинаковый математический аппарат.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: грунт, глина, набухание, вынужденные деформации, влагоупругость, неоднородность, нестационарная задача, толстостенный полый шар

### Введение

Глинистые грунты считаются набухающими, если при увеличении их влажности они увеличиваются в объеме, и значения показателя

$$P = (e_L - e_0) / (1 + e_0) \geq 0,03,$$

где  $e_0$  – коэффициент пористости грунта природного сложения и влажности;  $e_L$  – коэффициент пористости при влажности на границе текучести [1].

Увеличение влажности и набухание могут быть вызваны протечками из водопровода и канализации или инфильтрацией поверхностных вод (атмосферных осадков).

Некоторые глинистые грунты набухают при замачивании химическими растворами, например, растворами кислот и щелочей, а при замачивании водой не набухают. Протечки канализационных вод с насыщенными растворами органических веществ являются причиной сильного набухания.

На набухание косвенное влияние оказывают доля фазы глинистых частиц в грунте и концентрация растворенных в несвязанной воде солей [2].

Повышение температуры глинистого грунта, связанное с протечками горячих вод или с высокотемпературными технологическими процессами, значительно усиливает набухание или приводит к набуханию таких грунтов, которые не набухают при естественных температурах. При этом в грунтах влага перемещается в направлении источника повышенной температуры, аналогично миграции влаги в пучинистых грунтах при промерзании к фронту промерзания.

Дополнительное (к естественному) увлажнение в результате строительства зданий и сооружений различного назначения в их основаниях возникает всегда, и в том случае, когда отсутствует замачивание в результате протечек. Дополнительное увлажнение в этом случае обусловлено т.н. «эффектом экранирования» основания под сооружением в результате нарушения процессов естественной аэрации основания. В таких случаях неизбежно повышение влажности до некоторой установившейся, конечной влажности, которая находится в равновесии с весом сооружения. [1]

Актуальность решения задач влагоупругости обусловлена образованием высоких напряжений в набухающих грунтах, что при определенных условиях может служить причинами провалов грунта и обрушения зданий. Нередко такие последствия вызываются разрывами трубопроводов, подтоплениями и другими аварийными воздействиями.

Известны некоторые решения классических задач влагоупругости для однородных тел [3 и др.]. Однако, как показывают экспериментальные исследования, например [4, 5], под воздействием влаги изменяются деформационные характеристики грунтов (в первую очередь модуль деформации). При неравномерном распределении влаги это делает массив неоднородным, и приводит к необходимости решать задачи механики неоднородных тел.

В работах [6 – 9] рассматривалось распространение влаги от источника в предположении, что ее фронт представляет собой цилиндрическую поверхность. В данной статье рассмотрена задача о Н.Д.С. массива при распространении влаги по сферической поверхности. В работах [6, 7] получены решения модельных задач влагоупругости в стационарной постановке с учетом зависимости модуля деформации от влажности. Показано, что напряженное состояние неоднородного массива существенно отличается от того, что имеет место в расчете при постоянном модуле деформации.

В работах [8, 9] получены решения в нестационарной постановке, где показано приближение со временем нестационарного решения к стационарному.

### Нестационарная задача влагопереноса в толстостенном полой шаре

Определим распределение влажности во времени и вдоль радиуса, используя второй закон Фика (1) с начальными и граничными условиями первого рода (2):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla(c_w \cdot \nabla w), \quad (1)$$

$$w(r,0) = w_b, w(a,t) = w_a, w(b,t) = w_b. \quad (2)$$

Здесь  $w$  – влажность;  $c_w$  – коэффициент влагопроводности;  $a, b$  – соответственно радиусы внутренней и наружной поверхности полой сферы,  $w_a, w_b$  – влажность соответствующих поверхностей. Принимая, что  $c_w$  не зависит от влажности, и используя условие центральной симметрии, получим:

$$\nabla(c_w \cdot \nabla w) = c_w \cdot \Delta w = c_w \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Переходя к безразмерным переменным  $\tau = t \cdot c_w / a^2$ ,  $\rho = r/a$  из (1) - (3) получим

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad (4)$$

$$w(\rho,0) = w_b, w(\rho_a, \tau) = w_a, w(\rho_b, \tau) = w_b. \quad (5)$$

Здесь  $\rho_a = 1$ ,  $\rho_b = b/a$ . Легко показать, что (4) эквивалентно уравнению:

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2(\rho \cdot w)}{\partial \rho^2}. \quad (6)$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$\rho \cdot w(\rho, \tau) = \vartheta(\rho, \tau) + \theta(\rho), \quad (7)$$

где функции  $\theta(\rho, \tau)$  и  $\theta(\rho)$  удовлетворяют следующим уравнениям, начальному и граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} = 0; \quad \theta(\rho_a) = \rho_a \cdot w_a, \quad \theta(\rho_b) = \rho_b \cdot w_b. \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2}; \quad \vartheta(\rho,0) = \rho \cdot w_b - \theta(\rho), \quad (9)$$

$$\vartheta(\rho_a, \tau) = \rho_a \cdot w_a - \theta(\rho_a) = 0, \quad \vartheta(\rho_b, \tau) = \rho_b \cdot w_b - \theta(\rho_b) = 0.$$

$$\theta(\rho) = \rho[\rho_a \cdot \rho_b \cdot (w_a - w_b) - (\rho_a \cdot w_a - \rho_b \cdot w_b)] / (\rho_b - \rho_a). \quad (10)$$

Решение уравнения (8) с граничными условиями имеет вид:

Используя метод разделения переменных [11], будем искать решение уравнения (9) в виде:

$$\vartheta(\rho, \tau) = [A \cos(k \cdot \rho) + B \sin(k \cdot \rho)] \cdot \exp(-k^2 \cdot \tau). \quad (11)$$

Из граничных условий, приведенных в (9) следует, что

$$\begin{cases} A \cos(k \cdot \rho_a) + B \sin(k \cdot \rho_a) = 0 \\ A \cos(k \cdot \rho_b) + B \sin(k \cdot \rho_b) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель будет равен 0:

$$\cos(k\rho_a)\sin(k\rho_b) - \cos(k\rho_b)\sin(k\rho_a) = 0, \text{ или } \sin[k(\rho_b - \rho_a)] = 0.$$

Отсюда найдем собственные значения фундаментальной системы уравнений

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{\rho_b - \rho_a}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (13)$$

Таким образом, функция  $\vartheta_n(\rho, \tau)$  будет представлена в виде ряда

$$\vartheta(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(k_n \cdot \rho) + B_n \cdot \sin(k_n \cdot \rho)] \cdot \exp(-k_n^2 \cdot \tau). \quad (14)$$

Такая сумма решений называется фундаментальной системой решений, а  $k_n$  – собственные числа фундаментальной системы.

Из первого равенства (12) выразим константу  $B$ :

$$B = -A \cdot \frac{\cos(k\rho_a)}{\sin(k\rho_a)}. \quad (15)$$

С учетом (15) из (14) получим:

$$\vartheta(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[k_n(\rho_a - \rho)] \cdot \exp(-k_n^2 \tau), \quad (16)$$

где

$$C_n = \frac{A_n}{\sin(k_n \rho_a)}.$$

Константы  $C_n$  находятся из начального условия, входящего в (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[k_n(\rho_a - \rho)] = \vartheta(\rho, 0). \quad (17)$$

Входящие в (17) тригонометрические функции представляют собой ортогональную систему, т.е.

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sin[k_m(\rho_a - \rho)] \cdot \sin[k_n(\rho_a - \rho)] d\rho = \begin{cases} = 0 & \text{при } m \neq n, \\ \neq 0 & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (18)$$

Умножим обе части (18) на  $\sin[k_m(\rho_a - \rho)]$  и проинтегрируем от  $\rho_a$  до  $\rho_b$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\rho_a}^{\rho_b} C_n \sin[k_n(\rho_a - \rho)] \cdot \sin[k_m(\rho_a - \rho)] dx = \int_{\rho_a}^{\rho_b} \vartheta(\rho, 0) \sin[k_m(\rho_a - \rho)] dx. \quad (19)$$

Полагая в (19)  $m=n$ , и принимая во внимание (18), приходим к равенству

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} C_n \cdot \sin^2[k_n \cdot (\rho_a - \rho)] dx = \int_{\rho_a}^{\rho_b} \vartheta(\rho, 0) \cdot \sin[k_n \cdot (\rho_a - \rho)] dx.$$

Так как  $C_n$  является константой, ее можно вынести за знак интеграла и определить как:

$$C_n = \frac{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \vartheta(\rho, 0) \sin[k_n(\rho_a - \rho)] dx}{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sin^2[k_n(\rho_a - \rho)] dx}. \quad (20)$$

С учетом начального условия (9), куда входит полученное решение (10), и выражения для нахождения собственных чисел (13) интегралы в (20) могут быть вычислены как:

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \vartheta(\rho, 0) \sin[k_n(\rho_a - \rho)] dx = \frac{\rho_a(w_a - w_b)}{k_n};$$

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sin^2[k_n(\rho_a - \rho)] dx = \frac{\rho_b - \rho_a}{2};$$

Тогда с учетом (13)

$$C_n = \frac{2\rho_a(w_a - w_b)}{\pi n}. \quad (21)$$

Таким образом, для функции  $\vartheta(\rho, \tau)$  получим выражение:

$$\vartheta(\rho, \tau) = \frac{2\rho_a(w_a - w_b)}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[k_n(\rho_a - \rho)]}{n} \exp(-k_n^2 \tau). \quad (22)$$

Следуя формуле (7) и решениям (10) и (22), получим окончательно: получим выражение для функции (16):

$$w(\rho, \tau) = \frac{\rho_a \rho_b (w_a - w_b)}{\rho_b - \rho_a} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{\rho_a w_a - \rho_b w_b}{\rho_b - \rho_a} +$$

$$+ \frac{2\rho_a(w_a - w_b)}{\pi \cdot \rho} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[k_n(\rho_a - \rho)]}{n} \cdot \exp(-k_n^2 \tau). \quad (23)$$

Графически решение представлено на рис. 1 с использованием ста первых членов ряда, входящего в (23) ( $n = n_{\max} = 100$ ).

### Расчет напряженного состояния

Поскольку скорость распространения поля влажности существенно меньше скорости распространения упругих волн в рассматриваемой среде, а порождающим фактором НДС является только поле влажности, то можно считать, что частицы среды в каждый момент времени перемещаются мгновенно. Это означает, что для вывода разрешающего уравнения можно использовать уравнения статики, а время ( $t$  или  $\tau$ ) будет входить в него как параметр. Разрешающее уравнение центральносимметричной задачи теории упругости неоднородных тел в сферических координатах при наличии вынужденных деформаций  $\varepsilon_B$  для случая, когда коэффициент Пуассона  $\nu = \text{const}$ , имеет вид [10]:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left( \frac{4}{r} - \frac{E'}{E} \right) \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{E'}{E} \cdot \frac{2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{1 - \nu} \cdot \frac{\sigma_r}{r} = - \frac{2}{r} \cdot \frac{E}{1 - \nu} \cdot \varepsilon_B', \quad (24)$$

Для примера в качестве грунта рассмотрим глину. Для нее характерны следующие значения параметров [3, 12]:  $w_s = 0,363$ ;  $w_0 = 0,2$ ;  $\gamma_s = 26,95 \text{ кН/м}^3$ ;  $\beta = 0,6$ . Примем  $\rho_a = 1$ ,  $\rho_b = 10$ ,  $w_a = w_s$ ,  $w_b = w_0$ . Принимая  $H = 10 \text{ м}$ , получим, что внешнее давление  $\gamma H = 0,2695 \text{ МПа}$ . Как и в задачах, рассмотренных в [6 – 9], коэффициент Пуассона возьмем равным  $\nu = 0,4$ , а модуль упругости, вносящий неоднородность в задачу, равным  $E = 19,88 \cdot (w/w_s)^{-2,4}$ .

Входящие в (15) отношения  $E'/E$  и  $(d(\Delta w)/d\rho)$  равны:

$$\frac{E'}{E} = -2,4 \frac{w'}{w}, \quad \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial \rho} = \beta \cdot w'.$$

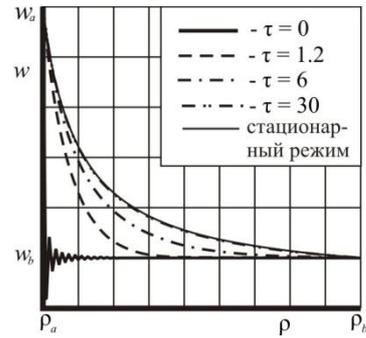


Рис. 1. Распределение влажности вдоль радиуса в различные моменты времени ( $n = 100$ ).

В этих соотношениях:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = -\frac{\rho_a \rho_b (w_a - w_b)}{\rho_b - \rho_a} \cdot \frac{1}{\rho^2} - \frac{2\rho_a (w_a - w_b)}{\rho_b - \rho_a} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[k_n(\rho_a - \rho)]}{k_n \cdot \rho^2} + \frac{\cos[k_n(\rho_a - \rho)]}{\rho} \right\} \cdot \exp(-k_n^2 \tau).$$

Кольцевые напряжения находятся из известного в теории упругости соотношения для центральносимметричных задач:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_r + \frac{r}{2} \sigma_r'.$$

Поставленная задача была решена численно, а графическое отображение решения представлено на рис. 2.

Также на рис. 2 представлено решение однородной задачи, когда модуль упругости постоянен и равен некоторому среднему значению:

$$E_{cp} = \int_{\rho_a}^{\rho_b} E(w(\rho)) d\rho / (\rho_b - \rho_a) = 64,68 \text{ МПа}.$$

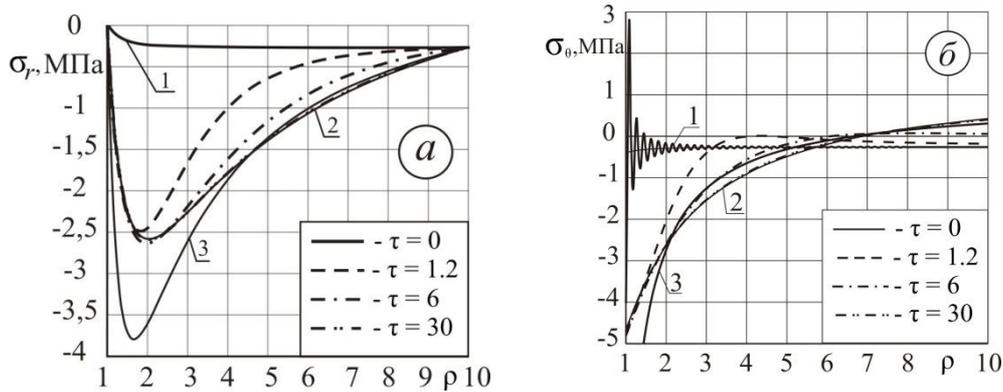


Рис.2. Распределение напряжений  $\sigma_r$  (а) и  $\sigma_{\theta}$  (б) вдоль радиуса в различные моменты времени ( $n = 100$ )

1 -  $w = \text{const}$ ; 2 – стационарный режим (неоднородный материал);  
3 - стационарный режим (однородный материал).

Для проверки правильности результатов проведена статическая проверка, заключающаяся в равновесии половины сферического массива под действием напряжений  $\sigma_{\theta}$  и внешних нагрузок. Данная проверка заключается в выполнении равенства:

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sigma_{\theta}(\rho) \cdot \rho d\rho = -\sigma_r(\rho_a) \cdot \frac{\rho_a^2}{2} + \sigma_r(\rho_b) \cdot \frac{\rho_b^2}{2}.$$

При отсутствии внутреннего давления правая часть данного выражения равна

$$-\sigma_r(\rho_a) \cdot \frac{\rho_a^2}{2} + \sigma_r(\rho_b) \cdot \frac{\rho_b^2}{2} = 0 + (-0,2695) \cdot \frac{10^2}{2} = -13,475 \text{ МПа}$$

Результаты такой проверки в различные моменты времени и для разного количества шагов разбиения интервала интегрирования левой части равенства приведены в таблице 1. Интегралы вычислены методом трапеций.

Таблица 1. Результаты статической проверки

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sigma_{\theta}(\rho) \cdot \rho d\rho$$

$n \rightarrow$	100	500	5000
$\tau = 0$	-13,411	-13,478	-13,475
$\tau = 1,2$	-13,460	-13,475	-13,475
$\tau = 6$	-13,459	-13,475	-13,475
$\tau = 30$	-13,459	-13,475	-13,475

### Выводы

На рис. 1 видно, что в начальные моменты времени при малом значении радиуса распределение влажности имеет довольно резкий скачкообразный характер, что обусловлено использованием для получения решения ограниченного числа членов ряда фундаментальной системы ( $n_{\max} = 100$ ). Это говорит о том, что для получения приближенного решения с приемлемой точностью необходимо использовать большое количество членов ряда. Также из рис. 1 следует, что при  $\tau = 30$  распределение влажности практически устанавливается. Эти эффекты заметны и при рассмотрении напряженного состояния (рис. 2). При увеличении количества шагов разбиения интервала интегрирования результаты статических проверок численного решения в различные моменты времени приближаются к точному значению (табл. 1).

Решение нестационарных задач позволяет проследить во времени процесс изменения напряженно-деформированного состояния грунтового массива. В свою очередь учет неоднородности грунта, обусловленный зависимостью модуля упругости от влажности, позволяет уточнить распределение напряжений в массиве. То же самое относится и к другим материалам, в которых под воздействием влаги возникают вынужденные деформации (бетон, дерево и т.д.). Сравнение однородного и неоднородного решений (рис. 2) говорит о важности учета неоднородности.

### Л и т е р а т у р а

1. Голли О.Р. Использование закономерностей набухания глинистых грунтов в строительстве // Реконструкция городов и геотехническое строительство. – 2004. – №8. – С. 131-141.
2. Сорочан Е.А. Строительство сооружений на набухающих грунтах. – М. Стройиздат, 1989. – 310 с.
3. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 58 с.
4. Давыдов В.А. Особенности изысканий и проектирования автомобильных дорог в районах вечной мерзлоты. – Омск :Омский ПИ, 1979.– С. 44-56.
5. ОДН 218.046–01. Проектирование нежестких дорожных одежд. 2000. - 93 с.
6. Андреев В.И., Аверсьев А.С. Об учете механической неоднородности при решении задач влагопереноса в грунтах// XXI Russian - Slovak – Polish seminar «Theoretical foundation of civil engineering», 2012. –С. 87-92.
7. Andreev V.I., Avershyev A.S. Stationary Problem of Moisture-elasticity for Inhomogeneous thick-walled Shells// Advanced Materials Research. – Vol. 671-674, 2013, pp. 571-575.
8. Андреев В.И., Аверсьев А.С. Влагоупругость толстостенного неоднородного цилиндра при нестационарном влажностном режиме// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013.–№2. –С. 20-25.
9. Andreev V.I., Avershyev A.S. Non stationary problem moisture elasticity for non homogeneous hollow thick-walled cylinder//Transactions of International Conference on Fluid Structure Interaction. 10 - 12 April, 2013, WITpress. –PP. 123-132.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М. Изд-во «Высшая школа», 1967. – 599.

11. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – 286 с.

12. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. – М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.

#### References

1. Golly O.R. (2004). Ispolzovaniye zakonornostey nabuhaniya glinistyh gruntov v stroitelstve// *Rekonstruktsiya gorodov i geotekhnicheskoye stroitelstvo*, №8, p.p. 131-141.

2. Sorochan E.A. *Stroitelstvo sooruzheniy na nabuhayushchih gruntah*, M.: Stroyizdat, 1989, 310p.

3. Ter-Martirosyan Z.G. (2005). *Mekhanika gruntov*, M.: Izd. ASV, 58 p.

4. Davydov V.A. (1979). *Osobennosti izyskaniy i proektorovaniya avtomobilnyh dorog v rayonah-vechnoy merzloty*, Omsk: Omskiy PI, 44-56.

5. ODN 218.046-01. *Proektorovaniye nezhestkih dorozhnyh odezhd*.2000, 93 p.

6. Andreev, V.I., Avershyev, A.S. (2012). Ob uchete mekhanicheskoy neodnorodnosti pri reshenii zadach vlagoperenosa v gruntah., XXI Russian - Slovak - Polish seminar «Theoretical foundation of civil engineering», pp. 87-92.

7. Andreev V.I., Avershyev A.S. (2013). Stationary Problem of Moisture-elasticity for Inhomogeneous thick-walled Shells, *Advanced Materials Research*, Vol. 671-674, pp. 571-575.

8. Andreev V.I., Avershyev A.S.(2013). Vlagouprugost' tolstostennogo neodnorodnogo tsylindra pri nestatsionarnom vlazhnostnom rezhime, *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy I sooruzheniy*, №2, pp. 20-25.

9. Andreev V.I., Avershyev A.S. (2013). Nonstationary problem moisture elasticity for nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder, *Transactions of International Conference on Fluid Structure Interaction*, 10 - 12 April, 2013, WITpress, pp. 123-132.

10. Lykov A.V. (1967). *Teoriya teploprovodnosti*, M.: Vysshaya shkola, 599 p.

11. Andreev V.I. (2002). *Nekotorye zadachi i metody mekhaniki neodnorodnyh tel*, M.: Izd. ASV, 288p.

12. Leontyev N.E. (2009). *Osnovy teorii filtratsii*, Moscow, MGU, 88 p.

#### MOISTURE ELASTICITY OF INHOMOGENEOUS THICK-WALLED HOLLOW BALL UNDER NONSTATIONARY HUMIDITY CONDITIONS

Andreev V.I., Avershyev A.S.

There is presented a solution of the problem of centrally symmetric unsteady moisture transfer in a hollow spherical array, modeling part of ground mass, with the propagation of the moisture from the inner surface to periphery. At the second stage is solved quasistationary problem of moisture elasticity for heterogeneous body because of uneven changing the deformation characteristics of the soil by saturated it with moisture. The term “moisture elasticity” is used by analogy with the term thermo-elasticity since the presence of moisture in the material induce forced deformations which is similar to the temperature deformations and problems of heat and mass transfer use the same mathematics.

KEY WORDS: ground, clay, welling, forced deformation, moisture elasticity, in homogeneity, no stationary problem, thick-walled hollow sphere.

