

## Динамика конструкций и сооружений

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А.И. СЕЙФУЛЛАЕВ,

Г.Д. АГАЛАРОВ

*Национальная Академия Наук Азербайджана,*

*Институт Математики и Механики, г. Баку, AZ 1143, ул. Б. Вахабзаде, 9.*

[a.seyfullayev@yahoo.com](mailto:a.seyfullayev@yahoo.com)

*Исследуются свободные колебания сферической оболочки заполненной упругой средой. Приведены уравнения движения тонкой упругой сферической оболочки подверженной внутреннему давлению. Среды, заполняющая оболочку, со значительно меньшим модулем упругости оболочки. Решение представляется для свободных колебаний системы оболочка-заполнитель. Строится аналитическое решение задачи, т.е. зависимость частоты колебаний оболочки без заполнителя как функция частоты системы оболочки-заполнитель. Представлен график зависимости частот для двух ветвей спектра.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: колебания, волны, частота, оболочка, плотность

Оболочки как элементы машин и сооружений широко применяются в авиа-судостроении и т.д. Поэтому в последнее время значительный интерес у исследователей вызывают вопросы, связанные с динамическим поведением тонкостенных конструкций, которые в рабочих условиях находятся в контакте с внешней средой. Важное место среди динамических контактных задач теории оболочки занимают задачи о свободных колебаниях упругих тонких оболочек, контактирующих с упругой средой и жидкостью. Оболочки с наполнителем могут применяться на практике для хранения и транспортировки продуктов. Так как в связи с добычей нефти и газа, необходимостью хранения, транспортировки и переработки разнообразных химических жидкостей весьма актуальны проблемы прочности и ресурса оболочек резервуаров. Кроме того, Земля может рассматриваться как сферическая оболочка с наполнителем.

В работах [1-3] исследуются частоты и формы свободных колебаний сферической и цилиндрической оболочек, контактирующих с упругой и жидкой средами. Асимптотическими методами получены приближенные простые формулы для вычисления частоты и определения формы колебаний, рассмотренных систем, что ограничивает использование полученных результатов, поскольку исключает в ряде важных случаев возможность проведения качественного анализа исследуемых процессов. Эти исследования также сопряжены с большими трудностями в связи с необходимостью решения трансцендентных систем уравнений.

В работе [4] исследованы свободные колебания тонкостенной оболочки, содержащей сжимаемую жидкость. При некоторых значениях параметров системы определены ее собственные частоты колебаний, а также исследовано влияние геометрических и физических параметров системы цилиндрическая оболочка-жидкость на свободные колебания цилиндра.

В данной работе исследуется задача о свободных колебаниях тонкостенной упругой сферической оболочки содержащей упругую среду с отличающимися свойствами, обычно с модулем упругости значительно меньшим модуля упругости материала оболочки. Известные решения в этой области получены численными методами или представляют собой асимптотические решения для мод высоких порядков. Здесь строится точное аналитическое решение задачи, представляющее зависимость частоты оболочки без заполнителя от частоты заполненной оболочки. Результат демонстрируется в виде двух кривых спектра.

**Постановка задачи.** Выпишем системы дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания сферической оболочки, контактирующей со средой. Система уравнений сферической оболочки представляется в виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_0}{\partial \beta} - b^2 \frac{\partial}{\partial \beta} (\nabla^2 + 2)w - (1-\nu) \left( \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \theta} - u + \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) &= - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} X, \\ \frac{1}{\sin \beta} \left[ \frac{\partial \Delta_0}{\partial \theta} - b^2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 + 2)w \right] + (1-\nu) \left[ \frac{\partial \Delta_1}{\partial \beta} + \vartheta - \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] &= - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Y, \\ b^2 [\nabla^2 + 1 - \nu] \Delta_0 - (\nabla^2 + 2)w - (1+\nu)\Delta_0 &= - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sin \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (u \sin \beta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right] + 2w, \quad \Delta_1 = \frac{1}{2 \sin \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (\vartheta \sin \beta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right],$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right].$$

Здесь  $X, Y, Z$  - проекции поверхностного усилия на направления  $\beta, \theta, r$  сферической системы координат,  $E, \nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки,  $b^2 = h^2 / 12R^2$ .

Уравнение движения упругой среды имеет вид:

$$(\lambda_s + 2\mu_s) \text{grad div } \bar{u} - \mu_s \text{rot rot } \bar{u} + \bar{b} = \rho_s \partial^2 u / \partial t^2. \quad (2)$$

В сферической системе координат  $r, \beta, \theta$  эти уравнения имеют с учётом гармонических колебаний следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_s) r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - 2\mu_s \left( \frac{\partial \omega_\psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega_\psi \sin \psi) \right) + \rho r \sin \psi \omega^2 S_r &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} - 2\mu_s \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi) \right) + \rho r \sin \psi \omega^2 S_\theta &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} - 2\mu_s \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi \sin \psi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) + \rho r \sin \psi \omega^2 S_\beta &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (S_\beta \sin \psi) + \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} \right), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial S_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r S_\beta) \right), \quad \omega_r = \frac{1}{2r \sin \beta} \left( \frac{\partial S_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \psi} (S_\theta \sin \psi) \right), \\ \omega_\psi &= \frac{1}{2r \sin \beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (S_\theta \sin \psi) + \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Уравнения движения оболочки (1) и среды (3) дополняются контактными и граничными условиями. На стыке заполнителя и оболочки ставятся условия равенства компонент перемещений:

$$S_\beta = S_2 = v, \quad S = S_3 = W; \quad S_1 = u, \quad S_2 = \vartheta, \quad S_3 = w \quad (r = R) \quad (4)$$

и равенства давлений

$$X_1 = -\sigma_1 - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y_1 = -\sigma_2 - \rho h \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \quad Z_1 = -\sigma_3 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (r = R), \quad (5)$$

где  $X_1, Y_1, Z_1$  - давления со стороны оболочки на заполнитель.

Решения уравнения движения упругой среды в сферической системе координат принимают вид:

$$\begin{aligned} S_1 = S_r &= \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial \phi_*}{\partial r} + \frac{1}{\mu_t} \left( \mu_t^2 r \chi + \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r^2} \right), \\ S_2 = S_\beta &= \frac{1}{\mu_e r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu_t r} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \beta}, \\ S_3 = S_\theta &= \frac{1}{\mu_e r \sin \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu_t r \sin \beta} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \theta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Phi, \psi, \chi$  суть решения скалярных волновых уравнений:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{a_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \chi - \frac{1}{a_t^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0; \quad (7)$$

$\nabla^2$  -оператор Лапласа в сферической системе координат.

Составляющие вектора напряжений на сферической поверхности  $r = 0$ , согласно [5], определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{rr} &= \lambda_s \operatorname{div} \bar{u} + 2\mu_s \frac{\partial S_r}{\partial r}, \\ \sigma_2 = \sigma_{r\beta} &= \mu_s \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial S_r}{\partial \beta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{S_\beta}{r} \right) \right], \\ \sigma_3 = \sigma_{r\theta} &= \mu_s \left[ \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial S_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{S_\theta}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведем общие решения уравнений движения среды и сферической оболочки, которые понадобятся для дальнейшего исследования задачи о свободных колебаниях сферической оболочки с упругим заполнителем.

Решение скалярного волнового уравнения (7) относительно потенциала  $\Phi$  пишется в виде:

$$\Phi = \Gamma(r) Y(\beta, \theta) e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в волновые уравнения (7), записанное в сферических координатах, дает:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + \left( \mu_e^2 - \frac{\lambda_t}{r^2} \right) \Gamma &= 0, \\ \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \lambda_t Y &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mu_e = \omega/a_e$ ,  $\lambda_t$  - константа разделения.

Однозначное, конечное и непрерывное решение второго уравнения (10)  $\nabla^2 Y + \lambda Y = 0$  существует лишь при условии  $\lambda_t = n(n+1)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Частное решение образуется из функций типа присоединенных сферической функции 1-го рода:

$$Y_{kn}^c = P_n^k(\cos \beta) \cos k\theta, \quad Y_{kn}^s = P_n^k(\cos \beta) \sin k\theta, \quad (11)$$

$k$  - половина числа узловых меридианов или число узловых меридианых плоскостей. Решение первого уравнения (10) следующее:

$$\Gamma(r) = A_1 j_n(\mu_e r),$$

где  $j_n(z)$  -сферические функции Бесселя связанные с цилиндрическими функциями формулами:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (12)$$

В результате для  $\Phi, \psi, \chi$ :

$$\Phi = [A_1 j_n(\mu_e r)] Y^c(\beta, \theta), \quad \psi = [B_1 j_n(\mu_t r)] Y^c(\beta, \theta), \quad \chi = [C_1 j_n(\mu_t r)] Y^c(\beta, \theta). \quad (13)$$

Учитывая (13) и (4), получаем выражения для проекций перемещений:

$$S_r = a_0 Y^c, \quad S_\beta = a_1 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_2 \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \quad S_\theta = -a_2 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_1 \frac{k}{\sin \beta} Y^s. \quad (14)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\mu_e} \left\{ A_1 \frac{\partial}{\partial r} [j_n(\mu_e r)] \right\} + \frac{\tilde{\lambda}_n}{\mu_t r} [C_1 j_n(\mu_t r)], \\ a_1 &= \frac{1}{\mu_e r} \left\{ A_1 [j_n(\mu_e r)] \right\} + \frac{1}{\mu_t r} \left\{ C_1 \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\mu_t r)] \right\}, \\ a_2 &= B_1 j_n(\mu_t r), \\ Y^s &= \sin k \theta P_n^k(\cos \beta), \quad \tilde{\lambda} = n(n+1). \end{aligned} \quad (15)$$

Для нахождения собственной частоты рассмотренной системы оболочка – наполнитель составим частотное уравнение. Нахождение собственной частоты свободных колебаний сферической оболочки со сплошным наполнителем для всевозможных форм колебаний оболочки крайне затруднительно. Поэтому выбираются те решения уравнений движения оболочки, которые хорошо согласуются с движением наполнителя. Первые три контактных условия для перемещений автоматически выполняются. Остается удовлетворить остальные три контактных условия (5) для напряжений. Используя формулы (14) для перемещений из (8) для напряжений находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{r\beta} &= b_1 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - b_2 \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \quad \sigma_2 = \sigma_{r\theta} = -b_2 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - b_1 \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \\ \sigma_3 = \sigma_{rr} &= b_0 Y^c, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_s \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \frac{a_1}{r} + \frac{a_0}{r} \right], \quad b_2 = \mu_s r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_2}{r} \right) b_2 = \mu_s r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_2}{r} \right), \\ b_0 &= \lambda_s \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (a_0 r^2) - \tilde{\lambda}_n \frac{a_1}{r} \right] + 2\mu_s \frac{\partial a_0}{\partial r}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5) и с учетом  $X, Y, Z$  в системе уравнений движения оболочки (1), получим систему алгебраических однородных уравнений относительно постоянных  $A_1, B_1, C_1$  для существования нетривиального

$$\begin{aligned} &\left[ (\lambda_n - \rho_s^* - \rho_s^{*2}) - \rho_s^* \mu_t^* \alpha - (1 + \rho_s^*) \mu_e^* \beta - \mu_e^* \mu_t^* \alpha \beta \right] \lambda^2 + \\ &+ [\lambda_n L_2 + \rho_s^* (L_3 + (2\lambda_n - 1) \chi E_s^*) - (-r_1 + \chi E_s^*) \rho_s^* \mu_t^* \alpha + (-L_2 + \rho_s^* (r_n - 2\chi E_s^*)) \mu_e^* \beta - L_1 \mu_t^* \alpha \beta] \lambda + \\ &+ \lambda_n L_1 - L_1 \mu_e^* \beta - L_1 \mu_e^* \mu_t^* \alpha \beta = 0, \end{aligned}$$

решения которой приравняем к нулю главный определитель названной системы. Таким образом, частотные уравнение свободных колебаний сферы с упругим наполнителем имеют вид [5]:

$$\alpha = \frac{j_n'(\mu_t^*)}{j_n(\mu_t^*)}; \quad \beta = \frac{j_n'(\mu_e^*)}{j_n(\mu_e^*)}. \quad (17)$$

Здесь  $\mu_t^* = \mu_t R$ ,  $\mu_e^* = \mu_e R$ ,  $\lambda = k\omega^2$ ,

$$\mu_t = \frac{\omega}{a_t}; \quad \mu_e = \frac{\omega}{a_e}; \quad k = (1 - \nu^2)\rho R^2 / E,$$

$$a_t = \sqrt{\frac{E_s}{2(1 + \nu_s)\rho_s}}; \quad a_e = \sqrt{\frac{E_s(1 - \nu)}{2(1 - 2\nu_s^2)\rho_s}}; \quad \beta = \frac{j_n(\mu_e^*)}{j_n(\mu_t^*)},$$

$$E_s^* = \frac{E_s}{Eh_*}; \quad \rho_s^* = \frac{\rho_s}{\rho h_*}; \quad h_* = \frac{h}{R}; \quad \alpha = \frac{j'(\mu_t)}{j(\mu_t)},$$

$\rho$  – плотность оболочки,  $\rho_s$  – плотность наполнителя,  $h$  – толщина оболочки;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки,

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \chi = \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu^2},$$

$$L_1 = r_1 r_n - \lambda_n r_2 r_n + \chi E_s^* (-r_n - 2r_1 + \lambda_n r_3 + \lambda_n r_2) + \chi^2 E_s^{*2} (-2 - \lambda_n),$$

$$L_2 = -r_n - r_1 + 3\chi E_s^*; \quad L_3 = -r_1 - \lambda_n r_2 - \lambda_n r_3; \quad r_1 = \lambda_n - 1 + \nu,$$

$$r_2 = b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu; \quad r_3 = b^2 r_1 + 1 + \nu; \quad r_n = b^2 \lambda_n r_1 + 2(1 + \nu),$$

$$b^2 = h^2 / 12R^2.$$

При отсутствии заполнителя уравнение колебаний имеет вид:

$$(\lambda_n - \rho_s^* + \rho_s^{*2})\lambda_0^2 + (\lambda_n L_2^0 - L_2^0)\lambda_0 + \lambda_n L_1^0 = 0, \quad \lambda_0 = k\omega_0^2. \quad (18)$$

Решив уравнение (17) относительно  $\lambda$ , имеем

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (19)$$

где

$$A = (\lambda_n - \rho_s^* - \rho_s^{*2}) - \rho_s^* \mu_t^* \alpha - (1 + \rho_s^*) \mu_e^* \beta - \mu_e^* \mu_t^* \alpha \beta,$$

$$B = \lambda_n L_2 + \rho_s^* (L_3 + (2\lambda_n - 1)\chi E_s^*) - (-r_1 + \chi E_s^*) \rho_s^* \mu_t^* \alpha + (-L_2 + \rho_s^* (r_n - 2\chi E_s^*)) \mu_e \beta - L_2 \mu_e^* \mu_t^* \alpha \beta,$$

$$C = \lambda_n L_1 - L_1 \mu_e^* \beta - L_1 \mu_e^* \mu_t^* \alpha \beta = 0.$$

Из (18) следует 
$$\lambda_0 = \frac{-B_0 \pm \sqrt{B_0^2 - 4A_0 C_0}}{2A_0}, \quad (20)$$

$$A_0 = \lambda_n; \quad B_0 = \lambda_n L_2 - 2L_2; \quad C_0 = \lambda_n L_1 - L_1.$$

Исключая из (19) и (20)  $k$ , получим

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\frac{B_0 \pm \sqrt{B_0^2 - 4A_0 C_0}}{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}} \frac{A}{A_0}}. \quad (21)$$

Уравнение (21) связывает частоту системы с частотой оболочки.

Нахождение частот свободных колебаний системы в целом связано с решением трансцендентного уравнения. При решении трансцендентного уравнения часто авторы прибегают к приближенным методам, в частности к асимптотическим. Однако, решение данной задачи методом, использованным в работах [6,8] позволяет, строить спектр графиков, что упрощает исследование, в том числе определение частоты.

Рассмотрим пример:

$$n = 2, \quad h = 10^4 \text{ м}, \quad \nu_s = 0.5, \quad h^* = 0,00167, \quad \lambda_2 = 6,$$

$$E_s = 42 \text{ Па}, \quad \rho_s = 7,8 \frac{10^3 \text{ кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$E = 502 \text{ Па}, \quad \nu = 0.2, \quad R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}; \quad \tilde{B}_1 = 0,$$

$$\tilde{A}_1 = 3,125; \quad \chi = 0,64; \quad E_s^* = 47,9; \quad \rho_s^* = 1556,9$$

$$\mu_e^* = \sqrt{\tilde{B}_1 \frac{\rho_s^*}{E_s^*}} = 0; \quad \mu_t^* = R \cdot \frac{\omega}{a_t},$$

$$a_t = \sqrt{\frac{E_s}{2(1+\nu_s)\rho_s}} = 0,17 \cdot 10^3; \quad \mu_t^* = 35,28 \cdot 10^3 \omega;$$

$$r_1 = 5,2; \quad r_2 = 1,2; \quad r_3 = 1,2; \quad r_4 = 2,4; \quad L_1 = -3705,8; \quad L_2 = 84,4; \quad L_3 = -9,2;$$

$$A = -2425,5 \cdot 10^3 - 54927 \cdot 10^3 \omega \alpha; \quad A_0 = -2425,5 \cdot 10^3,$$

$$B = 511169,6 - 1398232 \cdot 10^3 \omega \alpha; \quad B_0 = 511,17 \cdot 10^3; \quad C = -22234,8; \quad C_0 = -22234,8.$$

Частотное уравнение будет иметь вид

$$(242,5 \cdot 10^3 + 54927 \cdot 10^3 \omega \alpha) \lambda^2 - (511170 - 1398232 \cdot 10^3 \omega \alpha) \lambda + 22234,8 = 0. \quad (22)$$

При отсутствии заполнителя будем иметь

$$2425,5 \cdot 10^3 \lambda_0^2 - 51170 \lambda_0 + 22234,8 = 0. \quad (23)$$

Из уравнений (22) и (23) имеем

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\frac{(511 \pm 214)(1 + 22,65 \omega \alpha)}{511 - 1398 \cdot 10^3 \omega \alpha \pm \sqrt{(511 - 1398 \cdot 10^3 \omega \alpha)^2 - 89(2425 + 54927 \omega \alpha)}}},$$

$$\alpha = j_2'(\mu_t^*) / j_2(\mu_t^*); \quad \mu_t = 35 \cdot 10^3 \omega.$$

Формула (21) является аналитическим решением задачи свободных колебаний сферической оболочки с упругим заполнителем, представляющая собой обратную зависимость, т.е. зависимость частоты оболочки без заполнителя как функцию от частоты оболочки с упругим заполнителем.

На рис. 1 представлен спектр графика зависимости частоты системы от частоты оболочки без заполнителя.

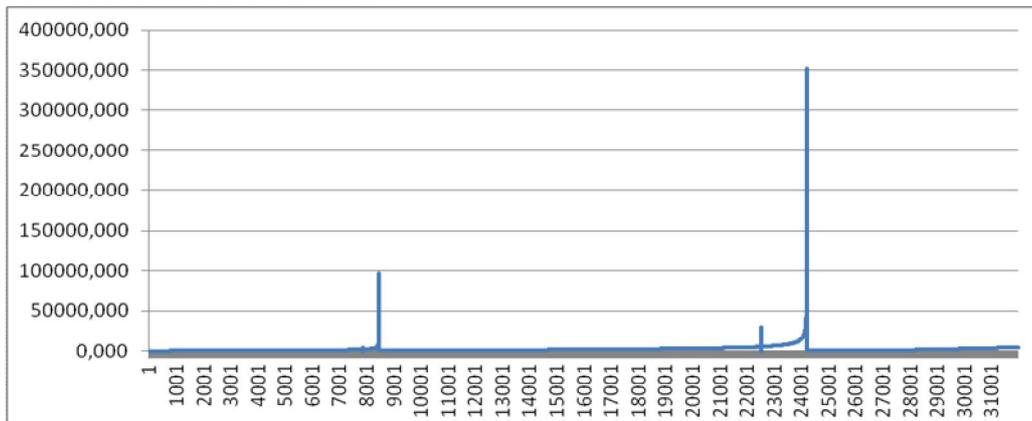


Рис.1. График зависимости частот колебаний для различных мод системы от частоты колебаний пустой оболочки

Для иллюстрации расчёта проведены вычисления с вышеприведёнными данными системы оболочка-наполнитель. Результаты вычислений представлены

на рисунке в виде двух ветвей спектра собственных колебаний. Из графика видно асимптотическое нарастание частоты системы  $\omega$  до некоторого постоянного значения, отвечающего жесткой оболочке для каждого спектра.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Ильина А.М., Корбут Б.А.* Колебания цилиндрической оболочки, содержащей упругий наполнитель // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1968.–№4.– С.183-186.
2. *Ильина А.М.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 182 с.
3. *Корбут Б.А.* Собственные колебания цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Изв. вузов: Авиационная техника. – 1970. – №4. – С.136-141.
4. *Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А., Рустамова М.А., Юзбашиева А.О.* Анализ свободных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек содержащих сжимаемую жидкость //Инженерно-физический журнал (Минск). – 2012. – Том. 85, № 6.
5. *Latifov F.S. Giyasbeyli S.A.* Oscillation of current carries cylindrical envelope with filter // Translation of NASA, №1, vol. XXI, PP 204-206.
6. *Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R.* Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT), Vol. 3, Issue 10, April 2014, p.33-37.
7. *Мамедова Г.А., Рустамова М.А., Агасиев С.Р.* Исследование свободных колебаний сферической оболочки с жидкостью обратным методом //Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2013. – 6/7 (66). – С. 16-20.

#### References

1. *Il'ina, A.M., Korbut, B.A.* (1968). Vibration of cylindrical shell containing elastic filler. *Izv. AN SSSR: MTT*, № 4, p. 183-186.
2. *Il'ina, A.M.* (1969). *Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas*. Moscow: Nauka, 182 p.
3. *Korbut, B.A.* (1970). Natural vibrations of a cylindrical shell with an elastic filler. *Izv. Vuzov: Aviatzionnaya Tehnika*, №4, p. 136-141.
4. *Seyfullayev, A.I., Mamedova, G.A., Rustamova, M.A., Yuzbasheva, A.O.* (2012). An analysis of natural vibrations of thin-walled cylindrical shells containing compressive liquid. *Inzhenerno-fizicheskiy Journal* (Minsk), Vol. 85, № 6.
5. *Latifov, F.S., Giyasbeyli, S.A.* Oscillation of current carries cylindrical envelope with filter. *Translation of NASA*, №1, vol. XXI, PP 204-206.
6. *Seyfullayev, A.I., Rustamova, M.A., Agasiev, S.R.* (2014). Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them. *International Journal of Engineering and Innovative Technology* (IJEIT), Vol. 3, Issue 10, April, p.33-37.
8. *Mamedova, G.A., Rustamova, M.A., Agasiev, S.R.* (2013). The investigation of free vibrations of a spherical shell with liqued by the back method. *Vostochno-Evropeyskiy Journal Peredovyh Tehnologiy*, 6/7 (66). – С. 16-20.

### FREE VIBRATIONS OF THE SPHERICAL SHELL CONTAINING AN ELASTIC FILLER

SEYFULLAYEV A.I., AQALAROV H.C.  
*National Academy of Sciences of Azerbaijan,  
Institute of Mathematics and Mechanics,  
Azerbaijan, Baku, AZ 1143, B. Vahabzadeh str., 9.*

We study the free vibrations of a spherical shell filled with an elastic medium. The equations of motion of a thin elastic spherical shell of exposure to internal pressure are given. Medium, filling the shell with a significantly has the lower modulus of elasticity.

Solution for the free vibration of the system shell filler is presented. We construct an analytical solution of the problem, dependence of the oscillation frequency of the shell without the filler as a function of the frequency of the shell - filler. A plot of the frequency spectra for the two branches is given.

KEY WORDS: vibration, wave, natural frequency, shell, density.