Прочность летательных аппаратов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УТОЧНЕННОГО РАСЧЕТА НЕПРЕРЫВНЫХ АВИАЦИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ С УЧЕТОМ ИХ ПОДАТЛИВОСТИ

Вал.В. ФИРСАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» «МАИ»,
125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4; k906@mai.ru

Построены математические модели и алгоритмы расчета, позволяющие уточнить напряженно-деформированное состояние непрерывных авиационных соединений и разностенных стыков. Сформулирована и решена краевая задача по определению напряженного состояния краевой плоской деформации (типа «погранслой») вблизи жесткозакрепленного края цилиндрической оболочки и кольцевой пластинки при осесимметричном нагружении. Проведены расчеты напряжений во фланцевом соединении, построены графики этих напряжений по толщине пластинки и оболочки. Краевая задача по определению «погранслоя» модифицирована для учета податливости соединяемых элементов конструкций, дана оценка ее влияния.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неклассическая теория пластинок и оболочек, цилиндрическая оболочка, краевой эффект, кольцевая пластинка, краевая плоская деформация, краевая задача, полиномиальная аппроксимирующая функция, разрешающая система дифференциальных уравнений, естественные граничные условия, нормальные продольные и поперечные напряжения, касательные напряжения, фланцевое соединение, задача Фламана-Буссинеска, упругие свойства материалов.

Введение

Инженерные расчеты всех видов непрерывных соединений, как правило, базируются на результатах классической теории пластинок и оболочек типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера. Однако результаты экспериментов показывают, что для соединений элементов конструкций указанная теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой в силу существенной трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС).

В результате, для предупреждения разрушения конструкций летательных аппаратов в зоне соединений и стыков, при их проектировании принимаются повышенные запасы прочности и долговечности, что приводит к ухудшению такого важного показателя научно-технического уровня, как весовое совершенство. Поэтому разработка достоверных методов расчета соединений элементов тонкостенных конструкций, основанных на трехмерной теории пластинок и оболочек, является актуальной проблемой.

В данной работе с позиции неклассической теории пластинок и оболочек построены математические модели уточненного расчета НДС тонкостенных авиационных конструкций как во внутренних областях, так и в узких краевых зонах вблизи нерегулярностей типа непрерывных соединений, стыков разностенных элементов конструкций и других зон контактного взаимодействия.

Сущность неклассической теории состоит в построении основного НДС во внутренних областях, базирующегося на классической теории типа Кирхгофа-Лява или уточненной теории расчета пластинок и оболочек переменной толщины, и дополнительного самоуравновешенного НДС типа «пограничный слой», возникающего вблизи соединений и стыков и быстро затухающего при удалении на расстояние, соизмеримое с толщиной пластинки или оболочек.

Рассматривается только жестко защемленный край, так как в этом частном случае дополнительные напряжения являются наиболее существенными, что очень важно для практических приложений. Тогда задача определения краевого НДС в окончательной постановке трактуется как задача суперпозиции двух состояний. Одной из них является решением классической теории, другое - дополнительное, соответствует решению задачи о краевой плоской деформации для уточненных граничных условий по закрепленному краю.

На базе неклассической теории пластинок и оболочек будут разработаны инженерные методы расчета НДС непрерывных соединений типа фланцевых, сварных, клеевых и т.п., обладающих повышенной достоверностью. Эти методы предназначены для применения на этапах проектирования, испытаний и эксплуатации летательных аппаратов при выборе рациональных конструктивно-силовых схем и материалов, обоснование режимов испытаний и условий эксплуатации. Указанные задачи решаются энергетическим методов приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для получения основных соотношений краевых задач используется вариационный метод Власова-Канторовича. В качестве примера уточненного расчета рассматривается определение НДС фланцевого соединения. Методы расчета фланцев основываются на результатах теории кольцевых пластинок и теории тонкостенных цилиндрических оболочек.

Приведем основные уравнения [1,2,3] для определения дополнительного НДС краевой плоской деформации в кольцевой пластинке и цилиндрической оболочке, необходимые для целей данной работы.

НДС краевой плоской деформации в кольцевой пластинке

Изотропная кольцевая пластинка (рис.1) нагружена поперечной распределенной нагрузкой $q(r)$, симметричной относительно оси Oz. Отнесём пластинку к цилиндрической системе координат (r, φ, z). Обозначим через a и b радиусы внешнего и внутреннего контуров, а через $2h$ - её толщину.

Для определённости будем полагать, что контур пластинки $r = a$ - жестко защемлённый. Внутренний контур пластинки $r = b$ может быть любым, в том числе и свободным, нагруженным краевыми усилиями типа изгибающих моментов и перерезывающих сил (осесимметричный изгиб).

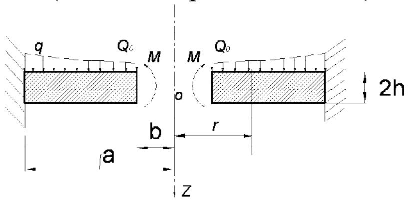

Рис. 1 Кольцевая пластинка

Далее полагаем, что основное НДС пластинки известно. Введем безразмерные координаты по формулам

$$\rho = \frac{r}{a}; \zeta = \frac{z}{h}; \rho_1 = \chi\rho; \chi = \frac{a}{h}.$$

Применяя метод прямого асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах и вариационный метод Власова-Канторовича, можно сформулировать краевую задачу вблизи жестко защемленного края пластинки для определения функции напряжений. С этой целью представим функцию Φ в виде конечного ряда

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=n} F_i(\zeta)\psi_i(\rho), \tag{1}$$

где $F_i(\zeta)$ - функции, аппроксимирующие функцию Φ по толщине пластинки и удовлетворяющие граничным условиям

$$F_i = F_i' = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1 \ , \tag{2}$$

а $\psi_i(\rho)$ – функции, подлежащие определению.

В результате, с точностью порядка h_* по сравнению с единицей, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_{ik}\psi_i^{IV} + b_{ik}\psi_i^{''} + c_{ik}\psi_i\right) = 0 \quad ; \left(k = 1,2,...,n\right) \ , \tag{3}$$

где введены обозначения

$$a_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta \ ; \ b_{ik} = -2\int_{-1}^{+1} F_i^{'} F^{'}_k d\zeta \ ; c_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i^{''} F^{''}_k d\zeta \ , \tag{4}$$

и естественные граничные условия для определения произвольных постоянных

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(d_{ik}\psi_i^{''} + e_{ik}\psi_i\right) = Q_k\Big|_{\rho=1} \ , \quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(f_{ik}\psi_i^{'''} + g_{ik}\psi_i^{'}\right) = 0 \ \text{ при } \rho_1 = \chi \ , \tag{5}$$

где $$d_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta \ ; \ e_{ik} = \frac{\nu}{1-\nu}\int_{-1}^{+1} F_i^{'} F^{'}_k d\zeta \ ; \ Q_k\left(\rho\right) = -L\left(\rho\right)\int_{-1}^{+1}\zeta F_k d\zeta \ ; \tag{6}$$

$$L\left(\rho\right) = N\left(\frac{d^2w}{d\rho^2}\right)\Bigg|_{\rho=1}\frac{d^2w}{d\rho^2}; \ N = \frac{2E}{1-\nu^2}\left\{\left[\left(\frac{d^2w}{d\rho^2}\right)\Bigg|_{\rho=1}\right]^2\right\}^{-1};$$

$$f_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta \quad ; \qquad g_{ik} = -\frac{2-\nu}{1-\nu}\int_{-1}^{+1} F_i^{'} F^{'}_k d\zeta \ ,$$

где ν - коэффициент Пуассона, w - прогиб, соответствующий основному НДС.

Аппроксимирующие функции $F_i(\zeta)$ должны удовлетворять только условиям (2), поэтому, решая задачу в полиномах, можно ограничиться лишь первым членом ряда (1), взяв аппроксимирующую функцию в виде

$$F_1\left(\zeta\right) = \zeta - \frac{7}{6}\zeta^3 + \frac{1}{6}\zeta^{15} \cdot \tag{7}$$

Обоснование применения этой функции при расчете НДС краевой плоской деформации дана в работе [4]. Тогда компоненты краевой плоской деформации определяются по формулам

$$\sigma_r^{\Pi} = m\left(\varphi\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}; \quad \sigma_z^{\Pi} = m\left(\varphi\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho_1^2}; \quad \tau_{rz}^{\Pi} = -m\left(\varphi\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\partial\rho_1} \quad ;$$

$$\sigma_\varphi^{\Pi} = \nu m\left(\varphi\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}\right); \tag{8}$$

$$Eu^{\Pi} = \left(1+\nu\right)m\left(\varphi\right)\left[\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}d\rho_1 - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial\rho_1}\right]; \ Ew^{\Pi} = \left(1+\nu\right)m\left(\varphi\right)\left[\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho_1^2}d\zeta - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right],$$

где $$m\left(\varphi\right) = -\frac{\nu h}{2(1-\nu)a^2}\frac{d^2w}{d\rho^2}\Bigg|_{\rho=1} \ , \tag{9}$$

На основании формулы (7) ограничимся случаем n = 1. Тогда в соответствии с (4), находим

$$a_{11} = \int_{-1}^{+1}\left[F_1\left(\zeta\right)\right]^2 d\zeta = 0{,}122; \quad b_{11} = -2\int_{-1}^{+1}\left[F_1^{'}\right]^2 d\zeta = -2{,}54;$$

$$c_{11} = \int_{-1}^{+1}\left[F_1^{''}\right]^2 d\zeta = 58{,}1$$

и дифференциальное уравнение (3) принимает вид

$$0,122\psi_1^{IV} - 2,54\psi_1^{''} + 58,1\psi_1 = 0\,.$$

Решая его и принимая во внимание характер затухания функции ψ_1, получим следующее выражение:

$$\psi_1 = e^{-4,01\rho_*}\left(C_1\cos\left(2,39\rho_*\right) + C_2\sin\left(2,39\rho_*\right)\right);$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные и введена замена переменной по формуле $\rho_* = \rho_1 - \chi$.

Для определения C_1, C_2 воспользуемся граничными условиями (5), вычислив коэффициенты по формулам (6), находим

$$d_{11} = \int_{-1}^{+1}\left[F_1\right]^2 d\zeta = -0,122\,; \quad e_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}\int_{-1}^{+1}\left[F_1^{'}\right]^2 d\zeta = 0,545\,;$$

$$Q_1\left(\rho\right) = -\frac{2E}{1-\nu^2}\int_{-1}^{+1}\zeta F_1 d\zeta = -0,483E\,;$$

$$f_{11} = \int_{-1}^{+1}\left[F_1\right]^2 d\zeta = 0,122\,; \quad g_{11} = -\frac{2-\nu}{1-\nu}\int_{-1}^{+1}\left[F_1^{'}\right]^2 d\zeta = -3,09\,.$$

В результате определяем:

$$C_1 = 0,0609E\,; \quad C_2 = -0,149E\,;$$

Функция ψ_1 записывается как

$$\psi_1 = Ee^{-4,01\rho_*}\left(0,061\cos\left(2,39\rho_*\right) - 0,149\sin\left(2,39\rho_*\right)\right)$$

и, наконец , функция Φ с учетом (1) принимает окончательный вид:

$$\Phi = Ee^{-4,01\rho_*}\left(0,061\cos\left(2,39\rho_*\right) - 0,149\sin\left(2,39\rho_*\right)\right)\left(\zeta - \frac{7}{6}\zeta^3 + \frac{1}{6}\zeta^{15}\right).$$

В качестве примера рассмотрим металлическую ($\nu = 0,3$) пластинку, изгибаемую моментом M, равномерно распределенным по ее внутреннему контуру (чистый изгиб). Далее введем для максимального радиального и тангенциального напряжения на жестко защемленном краю пластинки $r = a$ при $z = h$ обозначение σ_r^K и σ_φ^K соответственно и их величины определяются с помощью соотношений

$$\sigma_r^K = -\frac{E}{1-\nu^2}\left.\frac{d^2w}{dr^2}\right|_{r=a}\,; \quad \sigma_\varphi^K = \nu\sigma_r^K \tag{10}$$

Тогда на основании равенств (8) с учетом формул (9) и (10) компоненты напряжений краевой плоской деформации на этом же краю пластинки можно записать в виде

$$\sigma_r^{\Pi} = 0,0119\sigma_r^K\left(-7\zeta + 35\zeta^{13}\right) \quad \sigma_z^{\Pi} = 0,68\sigma_r^K\left(\zeta - \frac{7}{6}\zeta^3 + \frac{1}{6}\zeta^{15}\right);$$

$$\sigma_\varphi^{\Pi} = 0,195\sigma_r^K\left(3.06\zeta - 4,07\zeta^3 + 2,14\zeta^{13} + 0,58\zeta^{15}\right); \tag{11}$$

$$\tau_{rz}^{\Pi} = 0,117\sigma_r^K\left(1 - \frac{7}{2}\zeta^2 + \frac{5}{2}\zeta^{14}\right).$$

На основе соотношений (11) были построены графики (рис. 2), показывающие изменение напряжений по толщине пластинки при $\rho_* = 0$. Пунктирной линией для сравнения изображены соответствующие основные напряжения. Анализ рисунков показывает, что дополнительные к классической теории напряжения краевой плоской деформации достигают 35% от максимального нормального напряжения изгиба. Кроме того, поперечные нормальные и касательные напряжения, которые в классической теории для рассматриваемого примера равны нулю, здесь достигают 15-24% от максимального нормального напряжения изгиба. Последний факт может иметь большое значение для оценки прочности пластинок из композиционных материалов. Полученные результаты свидетельствуют, что плоская деформация вносит значительный вклад в общее напряженное состояние пластинки и её необходимо учитывать при расчетах на прочность соединений и стыков.

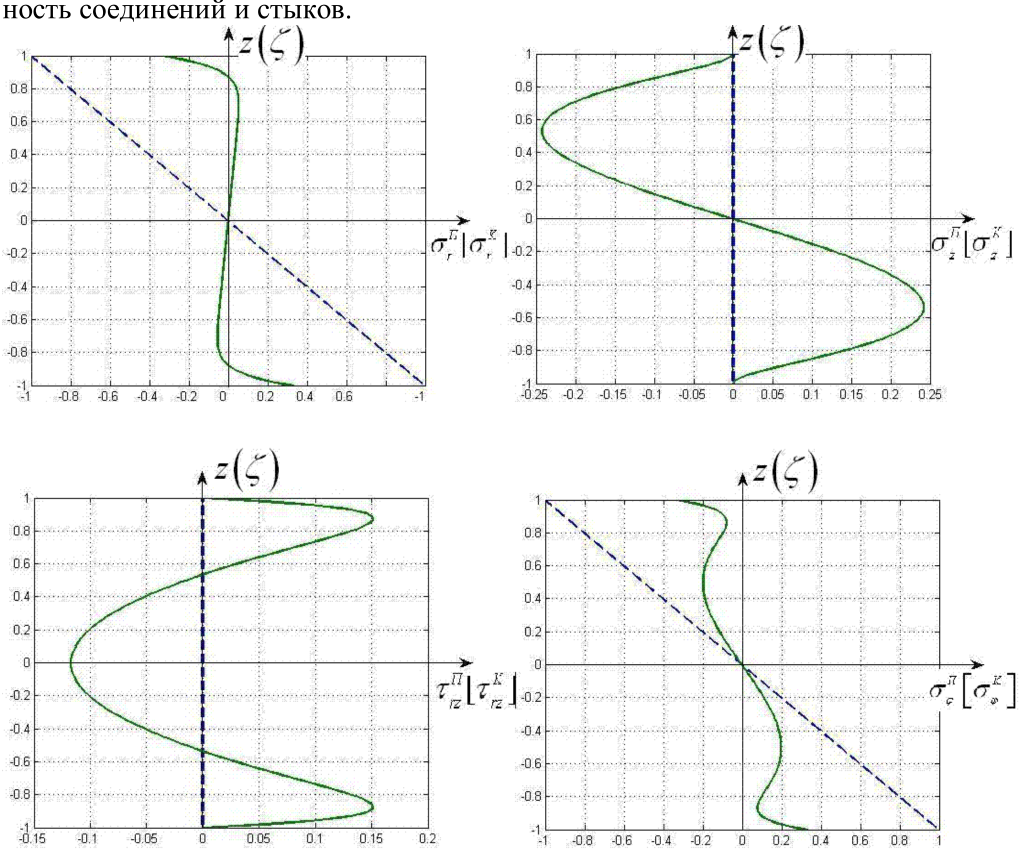

Рис. 2. Распределение напряжений плоской деформации по толщине круглой пластинки

Результаты, приведенные на рис. 2, в количественном отношении хорошо согласуются с данными работ [6,7], полученными комбинацией метода разложения перемещений в полиномиальные ряды по нормальной к срединной поверхности оболочки координате, и вариационного принципа Лагранжа.

НДС краевой плоской деформации в цилиндрической оболочке

Рассматривается оболочка из изотропного материала, нагруженная поперечной распределенной нагрузкой $q(\theta,\ z)$ отнесена к цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$ (рис.3). Обозначим через R характерный радиус кривизны оболочки, а через $2h$ - ее толщину.

Введем также координату ρ, для которой справедливо равенство

$$\rho = r - R \ ; \ -h \le \rho \le h \ .$$

Для определенности положим, что край оболочки $z = 0$ - жестко защемленный. Другой край может быть любым, в том числе и свободным, нагруженным сосредоточенными силовыми факторами типа изгибающих моментов и перерезывающих сил, передающихся на оболочку со стороны других отсеков конструкции.

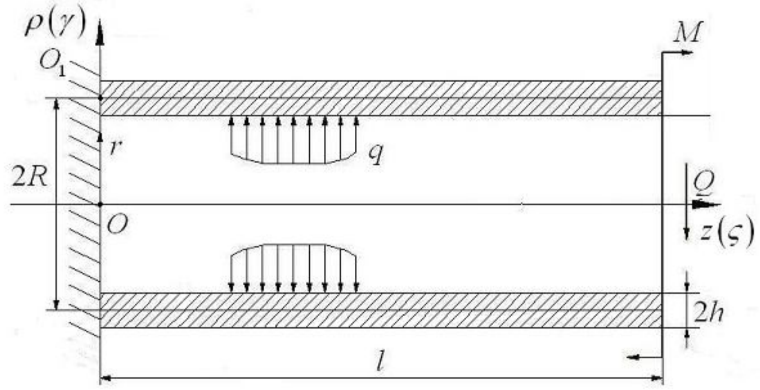

Рис. 3. Цилиндрическая оболочка

Будем считать далее всюду, что для рассматриваемой оболочки выполняются все условия [5] применимости безмоментной теории и, следовательно, внутреннее (основное) НДС оболочки, соответствующее классической теории, составляется как сумма безмоментного НДС и НДС простых краевых эффектов.

Кроме того, полагая, что оболочка достаточно тонкая, далее всюду заменим переменную величину $1/r$ на постоянную величину $1/R$. Эта замена эквивалентна пренебрежению в дифференциальных уравнениях членами порядка h_* по сравнению с h_*^0.

Применим известный прием растяжения масштаба, заменив независимые переменные по формулам

$$\rho = h\gamma,\ -1 \le \gamma \le 1;\ z = h\zeta;\ 0 \le \zeta \le l/h.$$

Для цилиндрической оболочки постоянной толщины краевая задача для функции $\Phi(\gamma,\zeta_3)$ формулируется аналогично рассмотренной задаче для кольцевой пластинки. Кроме того, учтем, что, в силу граничных условий, аналогичных (2), функция Φ должна быть нечетной относительно переменной и поэтому интегралы по γ от нечетных функций в интервале $(-1,+1)$ обращаются в ноль. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_{ik}\psi_i^{(IV)} - 2b_{ik}\psi_i^{II} + c_{ik}\psi_i\right) = 0, \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{12}$$

где
$$a_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\gamma; b_{ik} = \frac{1}{h_*^2}\int_{-1}^{+1} F_i' F_k' d\gamma; c_{ik} = \frac{1}{h_*^4}\int_{-1}^{+1} F_i'' F_k'' d\gamma. \tag{13}$$

Часть произволов интегрирования уравнений (12) определится из условий затухания функции Φ при $\zeta \to +\infty$, а другая часть произволов - из естественных граничных условий на краю $\zeta = 0$, которые записываются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(d_{ik}\psi_i^{(II)} + e_{ik}\psi_i\right) = Q_k; \sum_{i=1}^{i=n}\left(f_{ik}\psi_i^{(III)} + g_{ik}\psi_i^{(I)}\right) = 0, \quad \text{при } \zeta = 0, \tag{14}$$

где
$$d_{ik} = \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\gamma; e_{ik} = \frac{\nu \cdot h_*^{-2}}{1-\nu}\cdot\int_{-1}^{+1} F_i' F_k' d\gamma;$$

$$f_{ik} = -\int_{-1}^{+1} F_i F_k d\gamma; g_{ik} = \frac{(2-\nu)h_*^{-2}}{1-\nu}\cdot\int_{-1}^{+1} F_i' F_k' d\gamma; \tag{15}$$

$$Q_k = \frac{1}{N}\int_0^{2\pi}\left[m(\theta)\int_{-1}^{+1}\left(\sigma_z^M + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_\theta^M \right)\Bigg|_{\gamma=1} \cdot \gamma F_k d\gamma \right] d\theta.$$

После того, как функция Φ будет определена, компоненты напряжений плоской деформации можно найти из соотношений:

$$\sigma_{r\Pi} = m(\theta)\sum_{i=1}^{i=n} F_i(\gamma)\psi_i''(\zeta); \sigma_{z\Pi} = \frac{m(\theta)}{h_*^2}\sum_{i=1}^{i=n} F_i''(\gamma)\psi_i(\zeta);$$

$$\sigma_{\theta\Pi} = \nu m(\theta)\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{1}{h_*^2}\right)F_i''(\gamma)\psi_i(\zeta) + F_i(\gamma)\psi_i''(\zeta)\right]; \qquad (16)$$

$$\tau_{rz\Pi} = -\frac{m(\theta)}{h_*}\sum_{i=1}^{i=n} F_i'(\gamma)\psi_i'(\zeta).$$

где для функции $m(\theta)$ справедливо равенство

$$m(\theta) = -\frac{\nu}{E}\sigma_z^B\Big|_{z=0}^{\gamma=1}.$$

где σ_z^B- напряжение, соответствующее основному НДС.

В частном случае осесимметричной задачи в формулах (16) функция $m(\theta)$ обращается в постоянную величину. Для определенности полагаем

$$m_0(\theta) = 1. \qquad (17)$$

Тогда в правой части граничных условий (14) вместо Q_k надо брать величину Q_{k0}, которая находится из соотношения

$$Q_{k0}(\zeta) = \frac{\nu}{1-\nu}\int_{-1}^{+1}\sigma_z^M\Bigg|_{\gamma=1} \cdot \gamma \cdot F_k d\gamma, \qquad (18)$$

где σ_z^M -максимальное значение продольного нормального напряжения.

Отметим, что аппроксимирующая функция $F_1(\gamma)$ для определения первого приближения берется в виде (7), путем замены переменной ζ на γ.

В качестве примера рассмотрим стальную цилиндрическую оболочку с относительной полутолщиной $h_* = 0.01$, находящуюся под действием внутреннего давления. Край оболочки $z = 0$ жестко сочленен с металлической кольцевой пластинкой. Считаем, что основное осесимметричное напряженное состояние оболочки известно.

В результате решения краевой задачи (14), (15), (17), (18) функция $\Phi(\zeta,\gamma)$ записывается как

$$\Phi = h_*^2\sigma_z^M \cdot \exp\left(\frac{-4.01\zeta}{h_*}\right)\cdot\left(0.012\cdot\cos\left(\frac{2.39\zeta}{h_*}\right) - 0.031\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left(\frac{2.39\zeta}{h_*}\right)\right)\cdot\left(\gamma - \frac{7}{6}\gamma^3 + \frac{1}{6}\gamma^{15}\right). \qquad (19)$$

Определив функцию Φ, для нахождения компонентов напряжений плоской деформации, подставим выражение (19) в соотношения (16) с учетом (17). Графики искомых напряжений на краю $z = 0$ в произвольном сечении $\theta = const$ по толщине оболочки представлены на рис.2 .

Так как задача о НДС краевой плоской деформации в кольцевой пластинке решается в цилиндрических координатах и графики напряжений по толщине пластинки на *рис.2* представлены в относительном виде, то они сохраняют свой вид и для цилиндрической оболочки при условии следующей замены в обозначениях напряжений и координатных осей: r на z , z на r , на θ , σ_r^K на σ_z^M .

Уравнения краевой плоской деформации (12)-(15) были выведены в предположении абсолютно жесткого защемления края. На самом деле материал закрепления обладает определенными упругими свойствами. Для учета податливости закрепленного края будем считать, что оболочка крепится к упругому полупространству, простирающемуся в направлении $z < 0$ и обладающему иными упругими характеристиками материала. На полупространство со стороны оболочки по плоскости контакта действуют нормальные $\sigma_{zП}^0$ и касательные $\tau_{rzП}^0$ напряжения, определяемые формулами (16) при $\zeta = 0$.

Если для определения напряжений и перемещений в полупространстве использовать решение задачи Фламана-Буссинеска [8], переходя при этом с помощью функций влияния от нагружения сосредоточенными силами к нагружению распределенной нагрузкой, то для контактных перемещений имеем

$$u^0 = \frac{(\pi E_1)^{-1} m(\theta)}{h} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\psi_i(\zeta) \Big|_{\zeta=0} \cdot \int_{-1-\gamma}^{1-\gamma} F_i''(\gamma) \beta_1(\gamma) d\gamma \right];$$

$$w^0 = -\frac{(\pi E_1)^{-1} m(\theta)}{R} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \left[\psi_i'(\zeta) \Big|_{\zeta=0} \cdot \int_{-1-\gamma}^{1-\gamma} F_i'(\gamma) \beta_2(\gamma) d\gamma \right]; \qquad (20)$$

$$\beta_1(\gamma) = \ln\left(\frac{a_1^2}{h_*^2} \cdot \gamma^2 \right) - (1 + \nu_1); \quad \beta_2(\gamma) = \ln\left(\frac{a_2^2}{h_*^2} \cdot \gamma^2 \right). \qquad (21)$$

где ν_1, E_1 - упругие характеристики полупространства, а α_1, α_2 - относительные расстояния от начала координат таких точек, лежащих на оси ζ, в которых перемещения (20) пренебрежимо малы. Анализ характера затухания перемещений (20) позволяет для практических целей полагать [5] $\alpha_1 = \alpha_2 = h_*$.

На контактных перемещениях (20) краевые нагрузки произведут работу, трансформирующуюся в дополнительную потенциальную энергию оболочки, для которой можно записать

$$Э_д = -Rh \cdot \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\sigma_{zП}^0 \cdot u_0 + \tau_{rzП}^0 w^0 \right) d\theta d\gamma. \qquad (22)$$

Добавим выражение для энергии (22) в выражение полной энергии оболочки, соответствующее классической теории, и повторим со вторым слагаемым выкладки, что были проделаны ранее с первым слагаемым. В результате этих операций для определения краевой плоской деформации получим новую краевую задачу, в которой система дифференциальных уравнений (12) остается прежней, а граничные условия (14) представляются в модифицированной форме, а именно:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(d_{ik} \cdot \psi_i^{(II)} + r_{ik} \psi_i^{(I)} + e_{ik} \psi_i \right) = Q_k; \quad \sum_{i=1}^{i=n} \left(f_{ik} \cdot \psi_i^{(III)} + g_{ik} \cdot \psi_i^{(I)} + s_{ik} \right) = 0, \qquad (23)$$

при $\zeta = 0$, где для коэффициентов справедливы соотношения (15) и

$$r_{ik} = \frac{2L}{\left((1 - \nu^2) \cdot \pi h_*^3 \right)} \cdot \int_{-1}^{+1} \left\{ F_k'(\gamma) \cdot \left[\int_{-1-\gamma}^{1-\gamma} F_i'(\gamma) \beta_2(\gamma) d\gamma \right] \right\} d\gamma;$$

$$s_{ik} = \frac{2L}{\left((1 - \nu^2) \cdot \pi h_*^3 \right)} \cdot \int_{-1}^{+1} \left\{ F_k''(\gamma) \cdot \left[\int_{-1-\gamma}^{1-\gamma} F_i''(\gamma) \cdot \beta_1(\gamma) d\gamma \right] \right\} d\gamma; \quad L = E/E_1. \qquad (24)$$

Для оценки влияния упругости закрепленного края вновь обратимся к рассмотрению примера, считая, что для упругого полупространства $\nu_1 = 0{,}3$. Тогда непосредственные вычисления с использованием формул (21), (24) и (7) дают

$$r_{11} = \frac{0.921\,L}{h_*}; \quad s_{11} = \frac{1.66\,L}{h_*^3}.$$

Решая краевую задачу (12), (23), найдем значение функции Φ:

$$\Phi = h^2 \sigma_z^M \cdot \exp\left(\frac{-4.01\zeta}{h_*}\right) \cdot \left[\left(\frac{0.0941}{\left(0.72L^2 + 10.06L + 7.79\right)}\right) \cdot \right. \tag{25}$$

$$\left. \cdot \cos\left(\frac{2.39\zeta}{h_*}\right) - \left(\frac{0.24 + 0.03L}{0.72L^2 + 10.06L + 7.79}\right) \sin\left(\frac{2.39\zeta}{h_*}\right)\right] \cdot \left(\gamma - \frac{7}{6}\gamma^3 + \frac{1}{6}\gamma^{15}\right),$$

а затем, и компоненты НДС плоской деформации вблизи края $z = 0$. Анализируя формулы (25) и (16), можно установить, что напряженное состояние краевой плоской деформации существенно зависит от параметра L нелинейным образом. Изменяя L в интервале, характерном для металлов, можно построить, например, кривые зависимости напряжений $\sigma_{z\text{П}}$ от параметров L и α_2. Такие кривые представлены на рис.4, где напряжения $\sigma_{z\Pi}^0$ соответствуют точке с координатами $z = 0$, $\theta = const$, $\gamma = 1$.

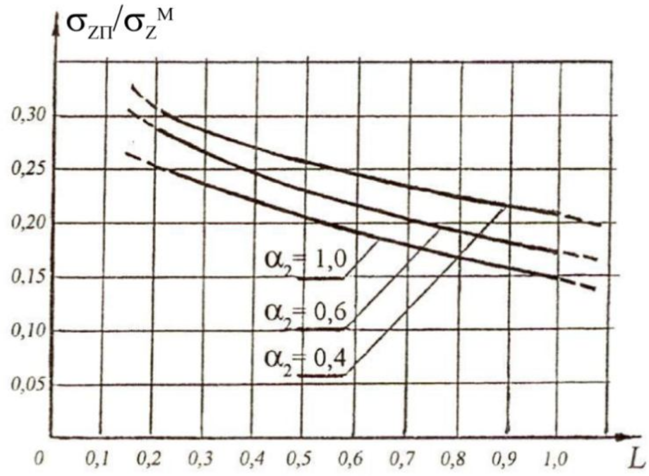

Рис. 4 Графики влияния податливости закрепленного края на нормальное напряжение

Анализ этих кривых показывает, что с уменьшением L (в пределе при $L \to 0$ имеем жестко защемленный край), компоненты напряжений плоской деформации увеличиваются, в противном случае, т.е. с увеличением L, они имеют тенденцию к убыванию и при одинаковых жесткостях стыкуемых элементов могут уменьшиться в 2,5 раза.

К расчету фланцевого соединения на прочность

Предполагается, что контакт между фланцами происходит по окружности, находящейся между болтами и осью соединения, так что нагрузка болтов $Q_{пр}$ вызывает изгиб фланцев (рис.5). При расчете все действующие силы, в том числе и нагрузку болтов, заменяют приведенными усилиями, равномерно распределенными по наружному краю, и изгибающим моментом.

Рис. 5. Расчетная схема цельного фланцевого соединения с переходной зоной

У цельных фланцев (см. рис. 5) между кольцом и цилиндрической частью втулки существует переходная зона, представляющая собой коническую оболочку. К расчетной схеме конической оболочки приводятся также галтельные втулки и втулки приварные внахлестку к трубам.

При расчете фланца с учетом построенной теории цилиндрических оболочек с несимметрично изменяющейся толщиной используются новые уравнения, описывающие его основное и дополнительное НДС [1,2,3]. В результате уточняются значения внутренних силовых факторов и компонент НДС в различных частях соединения.

Заметим, что в этом случае упругая линия конической части балки-полоски, соответствующая основному НДС, находится не из известного уравнения [9], а из уточненного уравнения (17) в [3]. Его решение представляется как комбинация функций, производных от функций Бесселя [9]. Упругой линии балки-полоски в пределах конической и цилиндрической частей соответствуют два интеграла, каждый из которых содержит по четыре постоянных интегрирования. Две произвольные постоянные для цилиндрической части втулки, в силу условий затухания, равны нулю. Четыре постоянных получим, приравняв перемещения и усилия слева и справа от переходного сечения *СД*. Оставшиеся две постоянные находим из следующих условий нагружения балки-полоски: $M = M_O$; $Q = Q_O$ при $z = 0$.

Добавляя к основному НДС дополнительное НДС, возникающее в зоне стыка кольца и втулки, для определения функции плоской деформации имеем систему уравнений (12), общий интеграл которой содержит $4n$ произвольных постоянных. Выполняя условия затухания функции плоской деформации при удалении от стыка, сократим число постоянных интегрирования до $2n$. Оставшиеся постоянные определим из граничных условий (14), что будет идти в запас прочности, или из модифицированных граничных условий типа (23), учитывающих податливость защемления втулки в кольце фланца.

Если дополнительное НДС краевой плоской деформации определено, то, очевидно, что расчет фланца по допускаемым напряжениям приведет к изменению толщины втулки в зоне стыка или допускаемых нагрузок. Отметим, что к прочностному расчету фланцевого соединения следует присовокупить его расчет на хрупкую прочность [10]. В этой работе методами механики разрушения получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины, находящейся в зоне соединения. Показано, что учет НДС краевой плоской деформации приводит к увеличению указанного коэффициента в 1,5 раза. Для фланцевого соединения это приводит к увеличению требуемого значения толщины в узкой краевой зоне цилиндрической оболочки.

В соответствии с современными представлениями механики разрушения, тонкостенные металлические элементы конструкций летательных аппаратов имеют дефекты типа трещин технологического и эксплуатационного характера, а так же возникающие в металлургическом процессе. При эксплуатации таких объектов резко возрастает вероятность появления усталостных трещин, которые при циклических нагрузках, постепенно разрастаясь, подготавливают условия для хрупкого разрушения. Данные эксплуатации и различных видов испытаний летательных аппаратов показывают, что разрушение часто происходит в зоне соединений элементов конструкций, которые при оценке прочности и трещиностойкости приобретают важное значение, особенно при интенсивных динамических нагрузках, в том числе при ударных воздействиях.

Оценка динамического состояния летательных аппаратов при указанных видах нагружения требует решения задачи о расчетном определении параметров собственных и вынужденных колебаний пластинок и оболочек постоянной и переменной толщины. В связи с этим, разработка уточненных методов расчета пластинок и оболочек, позволяющих находить колебания более высоких частот по сравнению с классической теорией, представляет собой актуальную проблему. В работе [7,11] для замкнутой круговой цилиндрической оболочки в рамках неклассической теории получены частотные уравнения, позволяющие определить высокие тона собственных колебаний (до одиннадцатого включительно), не описываемые классической теорией.

Литература

1. *Фирсанов В.В.* Динамика и прочность установок АВ. М.: Из-во МАИ, 2007. 400с.
2. *Фирсанов В.В.* Погранслой и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины//Вестник Московского авиационного института. –2010. –Т. 17. – №5. – С.212-218.
3. *Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу.* Напряженно-деформированное состояние краевого эффекта цилиндрической оболочки переменной толщины// Вестник Московского авиационного института. –2012. –Т. 19. –№1. – С. 157-162.
4. *Фирсанов В.В.* Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок их композиционных материалов// Механика композиционных материалов и конструкций/ Изд. ИПРИМ РАН. – 2002. – Т.8. – №1. – С. 28-64.
5. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
6. *V.V. Firsanov and Ch.N. Doan*. Energy-Consistent theory of cylindrical shells// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2011. –Vol. 40. – No.6. – Pp.543-548.
7. *Фирсанов В.В., Ч.Н. Доан.* Исследование статики и свободных колебаний цилиндрических оболочек на основе неклассических теорий// Механика композиционных материалов и конструкций/ Изд. ИПРИМ РАН. – 2014. – Т. 20. – №1. – С.104-123.
8. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки/ Пер.с англ. под ред.Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
10. *Фирсанов В.В., Серпичева Е.В.* Прочность и трещиностойкость непрерывных соединений авиационных конструкций на основе неклассической теории оболочек// Известия Тульского государственного университета. – 2014. – Вып. 11 (1). – С. 267-278.
11. *Firsanov V.V. and Ch.N. Doan.* Natural oscillations of general shells based on nonclassical theory// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43. – No 5. – Pp. 349-357.

References

1. *Firsanov, Val.V.* (2007). Dynamica i prochnost ustanovok AV, M.: Izd. MAI, 400 p.
2. *Firsanov, V.V.* (2010). Boundary layer and its influence on strength of cylindrical shell with a variable thickness, *Vestnik MAI,* Vol. 17, №5, 212-218.
3. *Firsanov, V.V., L.Ch. Hieu* (2012). Strain-stress state of fringe effect on a cylindrical shell with variable thickness, *Vestnik MAI*, Vol. 19, № 1, 157 -162.
4. *Firsanov V.V.* (2002). Ob utochnenii klassicheskoj teorii pryamougolnyh plastinok iz kompozicionnyh materialov, *Mehanika Kompozicionnyh Materialov i Konstrukcij*, Izd. IPRIM RAN, T.8, №1, 28-64.
5. *Goldenweyzer A.L.* (1976). *Teoriya Uprugih Tonkih Obolochek*, M.: Nauka, 512p.
6. *Firsanov, V.V. and Ch.N. Doan* (2011). Energy-Consistent Theory of Cylindrical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability,* Vol. 40, No. 6, pp. 543-548.
7. *Firsanov, V.V., Doan, Ch.N.* (2014). Research of statics and free vibrations of cylindrical shells by not classic theory, *Mehanika Kompozicionnyh Materialov i Konstrukcij,* Izd. IPRIM RAN, T.20, №1, p. 104-123.
8. *Filonenko-Borodich, M.M.* (1959). *Teoriya Uprugosty*, M.: Izd. Fizmatgiz, 364 p.
9. *Timoshenko, S.P., Vojnovskiy-Kriger, S.* (1966). *Plastinki i Obolochki*, M.: Nauka, 635 p.
10. *Firsanov, V.V., Serpicheva, E.V.* (2014). Unbroken joins strength and crack growth resistancr in airframes analysis based non classical theory of shells, *Izvestiya Tulskogo Gosudarstvennogo universiteta*, Vyp. 11, Ch. 1, pp. 267-278.
11. *Firsanov, V.V. and Ch.N. Doan* (2014). Natural oscillations of general shells based on nonclassical theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol. 43, No. 5, pp. 349-357.

MATHEMATICAL MODELS OF THE IMPROVEMENTED CALCULATION ON DURABILITY OF CONTINUOUS AVIATION CONNECTIONS WITH ACCOUNT OF THEIR COMPLIANCE

V. V. Firsanov

Moskovskiy aviazionniy institut, Moscow

Mathematical models and algorithms for the calculation, which allows to improve the strain-stress state of continuous aviation connections and joints with variation in wall thickness are constructed. The boundary-value problem by definition of a stress state of a boundary plane strain ("boundary layer" type) for rigid fixed edges of a cylindrical shell and an annular plate at axisymmetric loading is formulated and solved.

Calculations of stresses in flange connection are carried out. Graphs of these stresses on a thickness of a plate and a shell are constructed. The boundary-value problem by "boundary layer" definition is modified for the account of connected elements of structures compliance is modified and the estimation of its influence is given.

KEYWORDS: nonclassical theory of plates and shells, cylindrical shell, the fringe effect, annular plate, boundary plane strain, boundary-value problem, polynomial approximates function, resolving system of differential equations, the natural boundary conditions, normal, longitudinal and transverse stresses, shear stresses, flange connection, Flaman-Boussinesq's problem, elastic properties of materials.