

Теория упругости

**НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ЗАДАННЫХ  
НА ГРАНИЦЕ УСИЛИЯХ ИЛИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ**

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент

Ю.М. БУЛДАКОВА, аспирант

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»

424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3

KudryavcevSG@volgatech.net

*Приводится методика определения напряженного и деформированного состояния в упругом изотропном полупространстве, при заданных на границе усилиях или перемещениях, основанная на интегрировании операторным методом дифференциальных уравнений в частных производных в сочетании с интегральным преобразованием Фурье. Показано ее приложение для варианта нагружения прямоугольной площадки, расположенной на ограничивающей полупространство плоскости, равномерно распределенными нормальными и касательными усилиями. Представлены результаты расчетов в виде графиков.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: перемещения, напряжения, полупространство.

Вопросы определения напряженно-деформированного состояния в упругом полупространстве, при заданных на границе усилиях или перемещениях, имеют практическое применение, например, в механике грунтов [1]. Список литературных источников по данной проблеме включает большое число наименований. Поэтому отметим работы [1,2], в которых содержится подробная библиография по истории данного вопроса. Задача Буссинеска рассматривалась также в [3-5].

Рассмотрим упругое изотропное полупространство. Плоскость  $xu$  совместим с плоскостью, ограничивающей полупространство, ось  $z$  направим внутрь полупространства. Положительные направления перемещений и напряжений совпадают с обозначениями [2]. Компоненты тензора малых деформаций с составляющими вектора перемещения связаны уравнениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – перемещения в направлении осей координат  $x, y, z$ .

Связь компонентов тензора напряжений с деформациями имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + \lambda\theta, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + \lambda\theta, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda\theta, & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ляме;  $\theta$ - относительное изменение объема.

При отсутствии объемных сил перемещения являются бигармоническими функциями и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)u &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)v &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)w &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Оператор Лапласа от двух переменных  $x$  и  $y$  обозначен через

$$D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Проинтегрируем уравнения (3) операторным методом [2], учитывая, что функции перемещений на бесконечности стремятся к нулю. Тогда

$$\begin{aligned} u &= e^{-izD} \cdot A_1(x, y) + ze^{-izD} \cdot A_3(x, y), \\ v &= e^{-izD} \cdot B_1(x, y) + ze^{-izD} \cdot B_3(x, y), \\ w &= e^{-izD} \cdot C_1(x, y) + ze^{-izD} \cdot C_3(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_k, B_k, C_k$  ( $k=1,3$ ) произвольные функции интегрирования. Точки отделяют дифференциальные операторы от функций, к которым они применяются. Далее точки показывать не будем.

Функции напряжений через произвольные функции интегрирования найдем из уравнений (1),(2), (4).

Произвольные функции определим из следующих условий. Обозначим на поверхности полупространства интенсивности внешних усилий  $\tau_1, \tau_2, q$ , перемещения  $u_o, v_o, w_o$ . Полагаем, что данные величины являются известными функциями координат точек границы. Нормальное усилие  $q$  считаем положительным, если оно растягивающее. Правило знаков для касательных усилий совпадает с правилом, установленным по отношению к касательным напряжениям. Усилие  $\tau_1$  направлено по оси  $x$ ,  $\tau_2$  - по оси  $y$ . Положительные направления перемещений  $u_o, v_o, w_o$  совпадают с положительным направлением соответствующей координатной оси.

Краевые условия позволяют составить шесть уравнений для определения произвольных функций интегрирования. После преобразований запишем через известные поверхностные усилия выражения перемещений

$$u = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ [\mu - (\lambda + \mu)izD] \partial_1 q + 2(\lambda + \mu)iD\tau_1 - \left[ \lambda \frac{iD}{D^2} - (\lambda + \mu)z \right] \partial_1 (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\},$$

$$v = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ [\mu - (\lambda + \mu)izD] \partial_2 q + 2(\lambda + \mu)iD\tau_2 - \left[ \lambda \frac{iD}{D^2} - (\lambda + \mu)z \right] \partial_2 (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\},$$

$$w = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ [(\lambda + \mu)iD - (\lambda + \mu)zD^2] q - [\mu + (\lambda + \mu)izD] (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\},$$

и напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ \left[ \lambda D^2 + \mu \partial_1^2 - (\lambda + \mu) \partial_1^2 izD \right] q + 2(\lambda + \mu) iD \partial_1 \tau_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \lambda \left( 1 - \frac{\partial_1^2}{D^2} \right) iD + (\lambda + \mu) z \partial_1^2 \right] (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\}, \\
 \sigma_y &= \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ \left[ \lambda D^2 + \mu \partial_2^2 - (\lambda + \mu) \partial_2^2 izD \right] q + 2(\lambda + \mu) iD \partial_2 \tau_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \lambda \left( 1 - \frac{\partial_2^2}{D^2} \right) iD + (\lambda + \mu) z \partial_2^2 \right] (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\}, \\
 \sigma_z &= e^{-izD} \left[ (1 + izD) q - z(\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right], \\
 \tau_{xy} &= \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-izD} \frac{1}{D^2} \left\{ \left[ \mu - (\lambda + \mu) izD \right] \partial_1 \partial_2 q + (\lambda + \mu) iD (\partial_2 \tau_1 + \partial_1 \tau_2) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \lambda iD - (\lambda + \mu) z D^2 \right] \frac{\partial_1 \partial_2}{D^2} (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right\}, \\
 \tau_{xz} &= e^{-izD} \left\{ \tau_1 - z \partial_1 \left[ q + \frac{iD}{D^2} (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right] \right\}, \quad \tau_{yz} = e^{-izD} \left\{ \tau_2 - z \partial_2 \left[ q + \frac{iD}{D^2} (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что напряжения на площадках, перпендикулярных оси  $z$ , не зависят от упругих постоянных [2].

При решении первой краевой задачи целесообразно записать перемещения и напряжения через известные на границе функции перемещений.

Полагая в (5)  $z = 0$ , найдем связь между поверхностными усилиями и перемещениями  $u_o, v_o, w_o$ :

$$\begin{aligned}
 q &= -\frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \left[ (\lambda + 2\mu) iD w_o + \mu (\partial_1 u_o + \partial_2 v_o) \right], \\
 \tau_1 &= \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} \left\{ 2\mu \partial_1 w_o - \left[ (\lambda + 3\mu) + (\lambda + \mu) \frac{\partial_1^2}{D^2} \right] iD u_o - (\lambda + \mu) \frac{iD}{D^2} \partial_1 \partial_2 v_o \right\}, \\
 \tau_2 &= \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} \left\{ 2\mu \partial_2 w_o - \left[ (\lambda + 3\mu) + (\lambda + \mu) \frac{\partial_2^2}{D^2} \right] iD v_o - (\lambda + \mu) \frac{iD}{D^2} \partial_1 \partial_2 u_o \right\}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получим выражения перемещений через заданные на границе функции перемещений

$$\begin{aligned}
 u &= e^{-izD} \left\{ u_o - \frac{z}{\lambda + 3\mu} \partial_1 \left[ (\lambda + \mu) w_o - \mu \frac{iD}{D^2} (\partial_1 u_o + \partial_2 v_o) \right] \right\}, \\
 v &= e^{-izD} \left\{ v_o - \frac{z}{\lambda + 3\mu} \partial_2 \left[ (\lambda + \mu) w_o - \mu \frac{iD}{D^2} (\partial_1 u_o + \partial_2 v_o) \right] \right\}, \\
 w &= e^{-izD} \left\{ w_o + \frac{z}{\lambda + 3\mu} iD \left[ (\lambda + \mu) w_o + (\lambda + 3\mu) (\partial_1 u_o + \partial_2 v_o) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Формулы (6) и (7) позволяют составить функции напряжений через известные функции перемещений на границе, которые выписывать не будем.

При смешанных граничных условиях, когда на плоскости  $z=0$  заданы перемещения  $u_o, v_o$  и усилие  $q$ , из уравнений (7) найдем  $w_o$ . Подставляя  $w_o$  в (8) получим функции перемещений, записанные через  $u_o, v_o$  и  $q$ , на основании которых определим функции напряжений. Для второго варианта смешанных условий, если известны касательные усилия  $\tau_1, \tau_2$  и перемещение  $w_o$ , решение проводится аналогично.

Рассмотрим использование полученных уравнений на примере следующей задачи. Прямоугольная область  $(-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b)$  на плоскости  $z = 0$  нагружена равномерно распределенной касательной нагрузкой  $\tau_1$ , действующей в отрицательном направлении оси  $x$  (рис. 1).

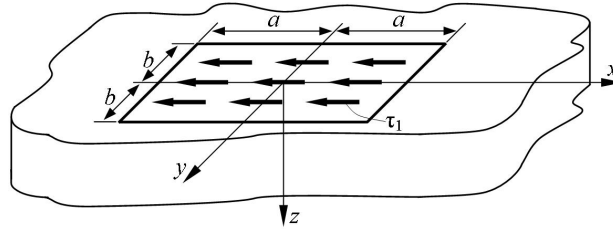


Рис. 1. Схема нагружения полупространства касательной нагрузкой

Нагрузка  $\tau_1(x,y)$  симметрична по переменным  $x, y$ , поэтому представим ее двойным косинус-преобразованием Фурье

$$\tau_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tau_1(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \quad (9)$$

где трансформанта Фурье

$$\tau_1(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \int_0^b \tau_1(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy = \frac{2\tau_1}{\pi} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \frac{\sin \beta b}{\beta}, \quad (10)$$

$\alpha, \beta$  – любые положительные вещественные числа.

Подставим (9) в уравнения (5). После преобразований и вычисления несобственных интегралов, используя [6] и [7], найдем функции перемещений

$$\begin{aligned} u^* = \frac{4\mu\pi u}{\tau_1} = & -2[y_1(\ln|x_1 + R_{11}| - \ln|x_2 + R_{21}|) - y_2(\ln|x_1 + R_{12}| - \ln|x_2 + R_{22}|)] - \\ & - z \left( \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_1}{z R_{11}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_2}{z R_{12}} - \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_1}{z R_{21}} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_2}{z R_{22}} \right) - \\ & - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [x_1(\ln|y_1 + R_{11}| - \ln|y_2 + R_{12}|) - x_2(\ln|y_1 + R_{21}| - \ln|y_2 + R_{22}|)] + \\ & + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z \left( \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \operatorname{arctg} \frac{y_1 z}{x_1 R_{11}} - \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_1} + \operatorname{arctg} \frac{y_2 z}{x_1 R_{12}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_2} + \operatorname{arctg} \frac{y_1 z}{x_2 R_{21}} + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_2} - \operatorname{arctg} \frac{y_2 z}{x_2 R_{22}} \right), \\ v^* = \frac{4\mu\pi v}{\tau_1} = & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (R_{11} - R_{12} - R_{21} + R_{22}) + \\ & + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z (\ln|z + R_{11}| - \ln|z + R_{12}| - \ln|z + R_{21}| + \ln|z + R_{22}|), \end{aligned} \quad (11)$$

$$w^* = \frac{4\mu\pi w}{\tau_1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[ -y_1 (\ln|z + R_{11}| - \ln|z + R_{21}|) + y_2 (\ln|z + R_{12}| - \ln|z + R_{22}|) \right] +$$

$$+ x_1 \left( \operatorname{arctg} \frac{y_1 z}{x_1 R_{11}} - \operatorname{arctg} \frac{y_2 z}{x_1 R_{12}} \right) - x_2 \left( \operatorname{arctg} \frac{y_1 z}{x_2 R_{21}} - \operatorname{arctg} \frac{y_2 z}{x_2 R_{22}} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} z (\ln|y_1 + R_{11}| - \ln|y_2 + R_{12}| - \ln|y_1 + R_{21}| + \ln|y_2 + R_{22}|),$$

где  $x_1 = x - a, x_2 = x + a, y_1 = y - b, y_2 = y + b,$

$$R_{11} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2}, R_{12} = \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z^2},$$

$$R_{21} = \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z^2}, R_{22} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z^2}.$$

Пользуясь (6) и (9), получим составляющие тензора напряжений

$$\sigma_x^* = \frac{2\pi\sigma_x}{\tau_1} = -2(\ln|y_1 + R_{11}| - \ln|y_2 + R_{12}| - \ln|y_1 + R_{21}| + \ln|y_2 + R_{22}|) -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[ y_1 \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} \right) - y_2 \left( \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{22}} \right) \right] -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda + \mu} z \left\{ y_1 \left[ \frac{1}{R_{11}(z + R_{11})} - \frac{1}{R_{21}(z + R_{21})} \right] - y_2 \left[ \frac{1}{R_{12}(z + R_{12})} - \frac{1}{R_{22}(z + R_{22})} \right] \right\} +$$

$$+ z^2 \left[ \frac{1}{x_1^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{11}} - \frac{y_2}{R_{12}} \right) - \frac{1}{x_2^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{21}} - \frac{y_2}{R_{22}} \right) \right],$$

$$\sigma_y^* = \frac{2\pi\sigma_y}{\tau_1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[ y_1 \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} \right) - y_2 \left( \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{22}} \right) - \right.$$

$$\left. - \ln|y_1 + R_{11}| + \ln|y_2 + R_{12}| + \ln|y_1 + R_{21}| - \ln|y_2 + R_{22}| \right] +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda + \mu} z \left\{ y_1 \left[ \frac{1}{R_{11}(z + R_{11})} - \frac{1}{R_{21}(z + R_{21})} \right] - y_2 \left[ \frac{1}{R_{12}(z + R_{12})} - \frac{1}{R_{22}(z + R_{22})} \right] \right\},$$

$$\sigma_z^* = \frac{2\pi\sigma_z}{\tau_1} = -z^2 \left[ \frac{1}{x_1^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{11}} - \frac{y_2}{R_{12}} \right) - \frac{1}{x_2^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{21}} - \frac{y_2}{R_{22}} \right) \right], \quad (12)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{2\pi\tau_{xy}}{\tau_1} = -(\ln|x_1 + R_{11}| - \ln|x_1 + R_{12}| - \ln|x_2 + R_{21}| + \ln|x_2 + R_{22}|) +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[ x_1 \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) - x_2 \left( \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) \right] -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda + \mu} z \left\{ x_1 \left[ \frac{1}{R_{11}(z + R_{11})} - \frac{1}{R_{12}(z + R_{12})} \right] - x_2 \left[ \frac{1}{R_{21}(z + R_{21})} - \frac{1}{R_{22}(z + R_{22})} \right] \right\} +$$

$$+ z^2 \left\{ x_1 \left[ \frac{1}{R_{11}(z + R_{11})} - \frac{1}{R_{12}(z + R_{12})} \right] - x_2 \left[ \frac{1}{R_{21}(z + R_{21})} - \frac{1}{R_{22}(z + R_{22})} \right] \right\},$$

$$\tau_{xz}^* = \frac{2\pi\tau_{xz}}{\tau_1} = \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_1}{z R_{11}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_2}{z R_{12}} - \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_1}{z R_{21}} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_2}{z R_{22}} -$$

$$- z \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{11}} - \frac{y_2}{R_{12}} \right) - \frac{x_2}{x_2^2 + z^2} \left( \frac{y_1}{R_{21}} - \frac{y_2}{R_{22}} \right) \right],$$

$$\tau_{yz}^* = \frac{2\pi\tau_{yz}}{\tau_1} = z \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right).$$

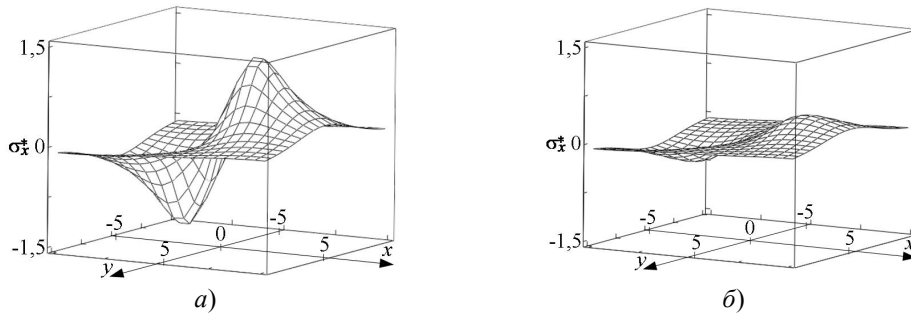


Рис. 2. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\sigma_x^*$

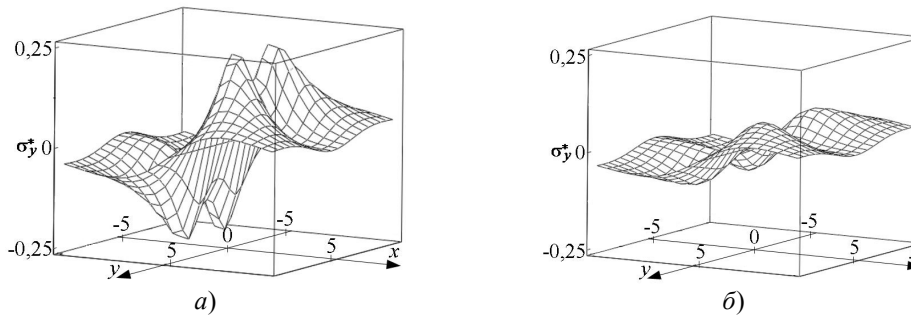


Рис. 3. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\sigma_y^*$

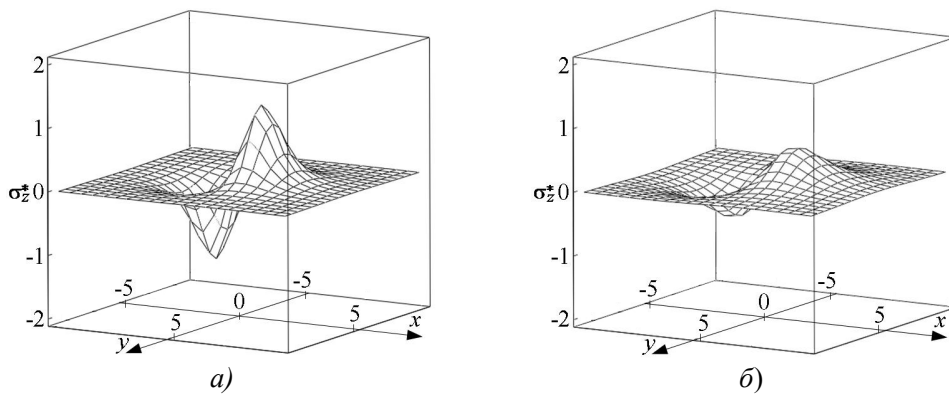


Рис. 4. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\sigma_z^*$

Результаты численного расчета изменения безразмерных параметров нормальных напряжений, когда равномерно распределенные касательные усилия  $\tau_1$  действуют на квадратной площадке с размерами  $b \times b$ , показаны на рис. 2-4, касательных -

на рис. 5-7. Значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$ . На рисунках, обозначенных буквой *a*, значение  $z = b$ , буквой *б* –  $z = 2b$ .

Используя принцип суперпозиции и (11), (12), несложно получить уравнения для определения перемещений и напряжений в упругом полупространстве, когда внутри площадки имеются прямоугольные области, свободные от нагружения равномерно распределенными касательными усилиями. Для варианта, когда на прямоугольной площадке действуют в отрицательном направлении оси  $y$  равномерно распределенные касательные усилия  $\tau_2$ , структура формул для определения перемещений и напряжений очевидна. Нагружение прямоугольной площадки равномерно распределенными нормальными усилиями  $q$  можно рассмотреть аналогично. Результаты решения данной задачи с использованием функций Б. Г. Галеркина приведены в работе [8].

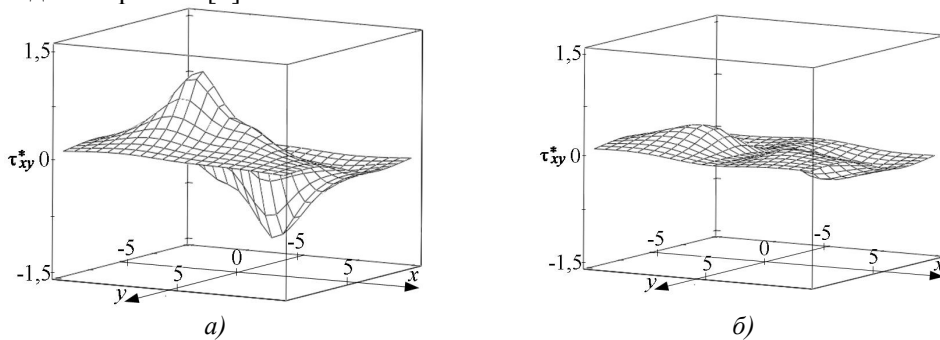


Рис. 5. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\tau_{xy}^*$

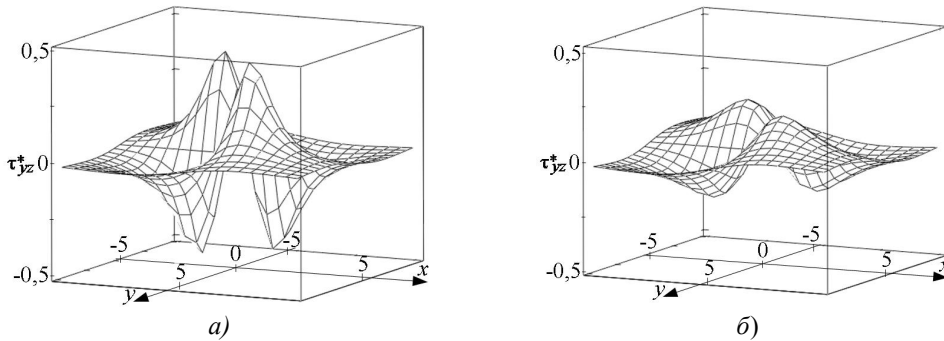


Рис. 6. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\tau_{yz}^*$

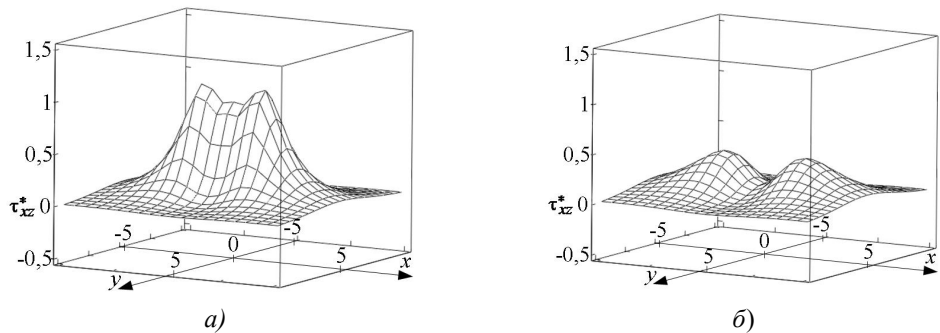


Рис. 7. Поле изменения безразмерного параметра напряжения  $\tau_{xz}^*$

Другой вариант, основанный на использовании уравнений (5) и (6), предполагает определение трех гармонических функций. При отсутствии объемных сил первый инвариант напряженного состояния является гармонической функцией, которую обозначим  $\omega$ . Согласно (6), получим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} e^{-izD} \left[ q + \frac{iD}{D^2} (\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2) \right] = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \omega. \quad (13)$$

Гармоническую функцию  $\omega$  представим в виде суммы производных от трех гармонических функций  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$\omega = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} + \partial_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} + \partial_2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2}, \quad (14)$$

где  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} = e^{-izD} q, \partial_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} = e^{-izD} \frac{iD}{D^2} \partial_1 \tau_1, \partial_2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} = e^{-izD} \frac{iD}{D^2} \partial_2 \tau_2.$  (15)

Проинтегрируем (15) по переменной  $z$ , а уравнения, в которые входят касательные усилия  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , дополнительно проинтегрируем по переменным  $x$  и  $y$ , соответственно. Учитывая поведение функций перемещений и напряжений на бесконечности, произвольные функции интегрирования полагаем равными нулю. Тогда

$$\omega_1 = -e^{-izD} \frac{1}{D^2} q, \omega_2 = -e^{-izD} \frac{iD}{D^4} \tau_1, \omega_3 = -e^{-izD} \frac{iD}{D^4} \tau_2. \quad (16)$$

Пользуясь (16) и уравнениями (5), (6), выразим через три гармонические функции перемещения

$$u = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \left\{ - \left[ \mu + (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \partial_1 \omega_1 + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} + \left[ \lambda - (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \partial_1 (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\},$$

$$v = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \left\{ - \left[ \mu + (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \partial_2 \omega_1 + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} + \left[ \lambda - (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \partial_2 (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\}, \quad (17)$$

$$w = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \left\{ \left[ (\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \left[ \mu - (\lambda + \mu)z \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\},$$

и напряжения

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ \left[ \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu \partial_1^2 - (\lambda + \mu)z \partial_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \right] \omega_1 + 2(\lambda + \mu) \partial_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2} + \left[ \lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \partial_1^2 \right) - (\lambda + \mu)z \partial_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \right] (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\},$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ \left[ \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu \partial_2^2 - (\lambda + \mu)z \partial_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \right] \omega_1 + 2(\lambda + \mu) \partial_2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} + \left[ \lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \partial_2^2 \right) - (\lambda + \mu)z \partial_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \right] (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\},$$



$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3}{\partial z^3} (\omega_1 + \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} - z \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ - \left[ \mu + (\lambda + \mu) z \frac{\partial}{\partial z} \right] \partial_1 \partial_2 \omega_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\partial_2 \omega_2 + \partial_1 \omega_3) + \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \partial_2 \left[ \lambda - (\lambda + \mu) z \frac{\partial}{\partial z} \right] (\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) \right\}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3} - z \partial_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\omega_1 + \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) = \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3} - z \partial_1 \omega, \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} - z \partial_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\omega_1 + \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_3) = \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} - z \partial_2 \omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ уравнений (17) и (18) показывает, что в выражения функций перемещений и напряжений не входят гармонические функции  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , а только их производные.

Из структуры формул

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} = e^{-izD} q, \quad \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3} = e^{-izD} \tau_1, \quad \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} = e^{-izD} \tau_2, \quad (19)$$

следует, что при  $z = 0$  имеем

$$\left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} = q, \quad \left( \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3} \right)_{z=0} = \tau_1, \quad \left( \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} \right)_{z=0} = \tau_2. \quad (20)$$

Следовательно, для определения гармонических функций  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3}$  и

$\frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3}$  воспользуемся уравнениями

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} = \frac{z}{2\pi} \iint_a \frac{q(\xi, \eta)}{R^3} da, \quad \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial z^3} = \frac{z}{2\pi} \iint_a \frac{\tau_1(\xi, \eta)}{R^3} da, \quad \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} = \frac{z}{2\pi} \iint_a \frac{\tau_2(\xi, \eta)}{R^3} da, \quad (21)$$

$$\text{где} \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, \quad (22)$$

$x, y, z$  – координаты точки наблюдения;  $\xi, \eta$  – координаты точки приложения нагрузки;  $a$  – область нагружения плоскости  $z=0$ .

Покажем порядок расчета при нагружении прямоугольной площадки ( $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ ) равномерно распределенной касательной нагрузкой  $\tau_2$ , направленной в отрицательном направлении оси  $y$ . Определим, например, касательное напряжение

$$\tau_{xz} = -z \cdot \partial_1 \partial_2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2}.$$

$$\text{Учитывая, что} \quad \frac{\partial^3 \omega_3}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\tau_2}{R} d\xi d\eta \right), \quad (23)$$

найдем

$$\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\tau_2}{R} d\xi d\eta =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\tau_2}{2\pi} \left\{ x_1 \ln|y_1 + R_{11}| - x_1 \ln|y_2 + R_{12}| - x_2 \ln|y_1 + R_{21}| + x_2 \ln|y_2 + R_{22}| + \right. \\
 &+ y_1 \ln|x_1 + R_{11}| - y_1 \ln|x_2 + R_{21}| - y_2 \ln|x_1 + R_{12}| + y_2 \ln|x_2 + R_{22}| - \\
 &\left. - z \left( \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_1}{z R_{11}} - \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_1}{z R_{21}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_2}{z R_{12}} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 y_2}{z R_{22}} \right) \right\}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Обозначения в (24) аналогичны обозначениям в формулах (11) и (12).

Продифференцируем (24) по переменным  $x$ ,  $y$  и результат подставим в выражение касательного напряжения  $\tau_{xz}$ . Тогда

$$\tau_{xz}^* = \frac{2\pi\tau_{xz}}{\tau_2} = z \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right). \quad (25)$$

При нагружении прямоугольной площадки равномерно распределенными нормальными усилиями  $q$  или касательными  $\tau_1$  легко составить, учитывая (21) и (24), гармонические функции  $\frac{\partial \omega_1}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2}$ , а далее, используя (17) и (18), получить выражения перемещений и напряжений.

Для варианта, когда на плоскости  $z=0$  заданы перемещения, гармонические функции целесообразно представить через функции перемещений  $u_o$ ,  $v_o$ ,  $w_o$ . Это несложно сделать, если подставить выражения (7) в (13). Тогда

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} e^{-izD} (\partial_1 u_o + \partial_2 v_o - iD w_o) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tilde{\omega}, \quad (26)$$

где гармоническая функция

$$\tilde{\omega} = \partial_1 \tilde{\omega}_1 + \partial_2 \tilde{\omega}_2 + \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial z}, \quad (27)$$

также представлена в виде суммы производных от трех гармонических функций

$$\partial_1 \tilde{\omega}_1 = e^{-izD} \partial_1 u_o, \quad \partial_2 \tilde{\omega}_2 = e^{-izD} \partial_2 v_o, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial z} = -e^{-izD} iD w_o. \quad (28)$$

Проинтегрируем уравнения (28) по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , соответственно, и, учитывая поведение функций перемещений на бесконечности, получим

$$\tilde{\omega}_1 = e^{-izD} u_o, \quad \tilde{\omega}_2 = e^{-izD} v_o, \quad \tilde{\omega}_3 = e^{-izD} w_o. \quad (29)$$

Полагая в (29)  $z = 0$ , найдем

$$\tilde{\omega}_1(z = 0) = u_o, \quad \tilde{\omega}_2(z = 0) = v_o, \quad \tilde{\omega}_3(z = 0) = w_o. \quad (30)$$

Из (30) следует, что гармонические функции  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$ ,  $\tilde{\omega}_3$  определяются решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_1 &= \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_o(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta, \\
 \tilde{\omega}_2 &= \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_o(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta, \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_o(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta,$$

где  $R$  совпадает с обозначением (22), а функции  $u_o, v_o, w_o$  - непрерывные функции координат  $\xi, \eta$ . Используя (8) и (29), легко записать функции перемещений через гармонические функции  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ , а далее составить выражения для определения функций напряжений.

#### Л и т е р а т у р а

1. Харр, М. Е. Основы теоретической механики грунтов / М. Е. Харр. - М.: Стройиздат, 1971. - 320 с.
2. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. - 492 с.
3. Ferretti, E. A higher order solution of the elastic problem for a homogeneous, linear-elastic and isotropic half-space subjected to a point-load perpendicular to the surface // CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences vol.86, no.5, 2012. - pp. 435-468.
4. Ferretti, E. The second order solution of boussinesq's problem. Research and Applications in Structural Engineering, Mechanics and Computation – Proc. of the 5th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC 2013. - pp. 2473-2478.
5. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
6. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований, т.1. / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. - М.: Наука, 1969. - 343 с.
7. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. - М.: Физматлит, 1971. - 1108 с.
8. Короткин, В. Г. Объемная задача для упруго-изотропного полупространства / В. Г. Короткин // ГОНТИ «Сборник Гидроэнергопроекта». - 1938. - №4. - С. 52-85.

#### R e f e r e n c e s

1. Harr, M.E. (1971). *Foundations of Theoretical Soil Mechanics*. M.: Stroyizdat, 320 p.
2. Lurie, A.I. (1955). *The Space Problem of Elasticity Theory*. Moscow: GITTL, 492 p.
3. Ferretti, E. (2012). A higher order solution of the elastic problem for a homogeneous, linear-elastic and isotropic half-space subjected to a point-load perpendicular to the surface. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 86, no. 5, pp. 435-468.
4. Ferretti, E. (2013). The second order solution of Boussinesq's problem. *Research and Applications in Structural Engineering, Mechanics and Computation*. Proceedings of the 5th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC 2013, pp. 2473-2478.
5. Nowacki, W. (1975). *Theory of Elasticity*. Moscow: Izd-vo "Mir", 872 p.
6. Bateman, G., Erdelyi, A. (1969). *Tables of Integral Transformations*, Vol. 1, Moscow: "Nauka", 343 p.
7. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (1971). *Tables of Integrals, Series and Products*. M.: Fizmatlit, 1108 p.
8. Korotkin, V.G. (1938). Volume problem for elastic-and-isotropic half-space. GONTI "Sbornik Hydroenergoprojekta", №4, p. 52 -85.

#### STRESS AND STRAIN STATE IN THE ELASTIC HALF-SPACE AT A PREDETERMINED ON BORDER FORCES OR DISPLACEMENTS

KUDRYAVTSEV S.G., BULDAKOVA J.M.

FGBOU VPO "Povolzhskiy Gosudarstvennyy Tehnologicheskiy Universitet", Yoshkar-Ola

The method of determination of the stress and strain state in the isotropic elastic half-space under given forces or displacements at the border based on the integration of differential equations by the operator method in combination with the Fourier integral transformation is presented. Its application for load case of rectangular area located on the limiting half-plane by uniformly distributed normal and tangential forces is shown. The results of calculations in the form of graphs are given.

KEYWORDS: displacements, stresses, half-space.