

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЗАДАННЫХ ОПОРНЫХ КРИВЫХ

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
 Российский университет дружбы народов,
 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Тонкостенные пространственные конструкции позволяют создавать современные формы общественных, спортивных и промышленных зданий и сооружений. Оболочки, созданные на основе линейчатых поверхностей, являются наиболее конструктивно удобными для их воспроизведения на строительной площадке. В статье рассматриваются линейчатые поверхности, построенные на двух произвольных заданных опорных кривых

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: опорные кривые, опорные точки, линейчатые поверхности.

Примером линейчатых поверхностей, построенных на двух опорных кривых, могут служить торсовые поверхности, являющиеся огибающими семейств плоскостей, катящимися по двум заданным кривым [1-3].

Поверхности Каталана образуются движением прямолинейной образующей, которая при движении остается параллельной одной плоскости (плоскости параллелизма) [1, 2, 4]. Циллиндронд - поверхность Каталана, образуемая движением образующей прямой движущейся по двум образующим кривым параллельно общей плоскости (плоскости параллелизма) [1, 2, 5]. Коноид - цилиндрионд, образующие кривые которого пересекают фиксированную прямую (ось коноида) [1, 6, 7]. Коноиды - линейчатые поверхности на прямоугольных планах.

Рассмотрим линейчатые поверхности, образуемые движением прямой линии по двум направляющим кривым, ограниченным опорными точками четырехугольного плана.

Пусть заданы угловые точки четырехугольного плана, на двух противоположных сторонах которого заданы опорные кривые.

Линейчатую поверхность образуем равномерным (пропорциональным) движением прямой образующей по заданным опорным кривым (рис. 1). Предельные положения образующих кривых проходят через начальные и конечные точки опорных кривых (угловые точки четырехугольного контура).

Зададим векторные уравнения опорных линий $r_i(t_i)$,

$$t_{iH} \leq t_i \leq t_{iK} \quad i = 1, 2 \quad .$$

При этом

$$r_1(t_{1H}) = p_1; \quad r_1(t_{1K}) = p_2; \quad r_2(t_{2H}) = p_4, \quad r_2(t_{2K}) = p_3;$$

где p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) - векторы угловых точек контура.

Введем координатный параметр опорных кривых u , устанавливающий однозначную связь точек опорных кривых:

$$u_i = t_i(u) = t_{iH}(1-u) + t_{iK}u, \quad i = 1, 2; \quad u = 0 \div 1. \quad (1)$$

Уравнение линейчатой поверхности на заданных опорных кривых (в пределах заданного четырехугольного контура) получим в виде:

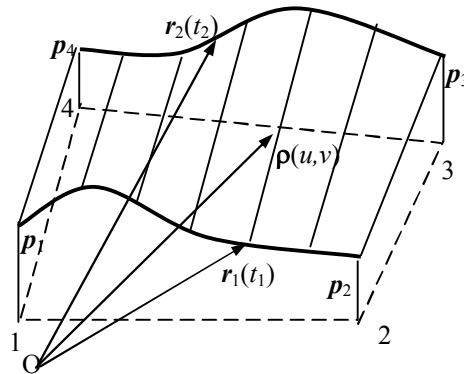


Рис. 1. Линейчатая поверхность на опорных кривых

$$\rho(u, v) = r_1(u_1)(1 - v) + r_2(u_2)v, \quad v = 0 \div 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) справедливо как для плоских, в том числе наклонных, так и для пространственных опорных кривых.

Если координаты в плоскости двух соседних точек опорных кривых совмещать, то будем получать линейчатые поверхности на треугольном плане.

На рис. 2 приведены линейчатые поверхности с опорными кривыми:

1- парабола $z = a - bx^2$; $a = 1$; $b = 0,5$; 2 - синусоида с 5-ю полуволнами $z = d \sin ct$; амплитуда синусоиды $d = 0,25$; $c = 2\pi$; $t = (-0,5 \div 2)$. Опорные точки параболы: 1 - $(x, y) = (-1,5; 0)$; 2 - $(x, y) = (1,5; 0)$ (кроме рис. 2,з,л). Опорные точки синусоиды (3, 4) различны на рис. 2,а÷м;

a - поверхность на симметричном трапециевидном плане: т. 3 - $(x, y) = (-2,5; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (2,5; 3)$;

б - опорные точки синусоиды поменялись местами: т. 3 - $(x, y) = (2,5; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (-2,5; 3)$;

в - поверхность на симметричном трапециевидном плане: т. 3 - $(x, y) = (-2,5; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (2,5; 3)$ с наклонной опорной параболой, $\varphi = \pi / 6$;

г - поверхность на несимметричном трапециевидном плане: т. 3 - $(x, y) = (1,0; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (1,5; 3)$;

д - поверхность на прямоугольном плане: т. 3 - $(x, y) = (-1,5; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (5,5; 3)$;

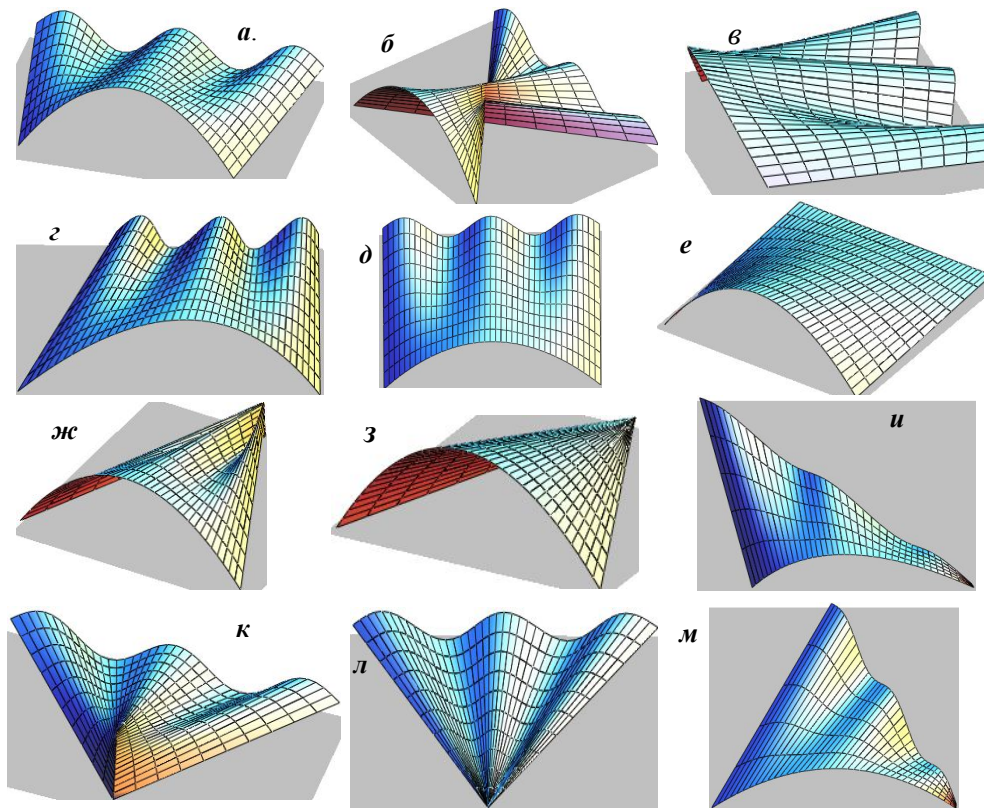


Рис. 2. Линейчатые поверхности с направляющими параболой и синусоидой

е - поверхность на прямоугольном плане: т. 3 - $(x, y) = (-1,5; 3)$; т. 4 - $(x, y) = (5,5; 3)$. Амплитуда синусоиды $d = 0$ - опорная синусоида трансформируется в прямую линию. Поверхность - параболический коноид.

На рис. 2, *ж-м* - линейчатые поверхности на треугольных планах:

ж, з - совмещены опорные точки синусоиды, опорная кривая вырождается в вертикальную линию. На рис. 2, *з* амплитуда синусоиды $d = 0$ - опорная кривая вырождается в точку, получаем параболическую коническую поверхность;

и - 3-я опорная точка совмещена со 2-й точкой т. 2, 3 - $(x,y) = (1,5;0)$;

к, л - опорные точки параболы совмещены - т.1, 2 - $(x,y) = (0;0)$;

л - параметр параболы $a = 0$ - синусоидальная коническая поверхность;

л - 3-я опорная точка синусоиды совмещена со 2-й опорной точкой параболы, 4-я опорная точка синусоиды т.4 - $(x,y) = (0;3)$.

На рис. 3 приведены примеры линейчатых поверхностей с направляющими полуэллипсом (полуоси $a = 1,5$; $b = 1$) и синусоидой (семь полуволов, амплитуда $c = 0,25$) на трапециевидном плане (основания 3 и 5, высота - 2,5):

а - опорные кривые в вертикальной плоскости;

г - опорные кривые с наклоном 30° от вертикали;

б, д - опорная парабола в горизонтальной плоскости с отклонением во внешнюю и внутреннюю стороны трапеции;

в, е - опорная синусоида в горизонтальной плоскости с отклонением во внешнюю и внутреннюю стороны трапеции;

ж, з, и - 3-я точки плана перенесены во 2-ю точку - треугольный план; *ж-з* - опорные кривые в вертикальной плоскости; *з* - опорная парабола в горизонтальной плоскости; *и* - опорная синусоида в горизонтальной плоскости.

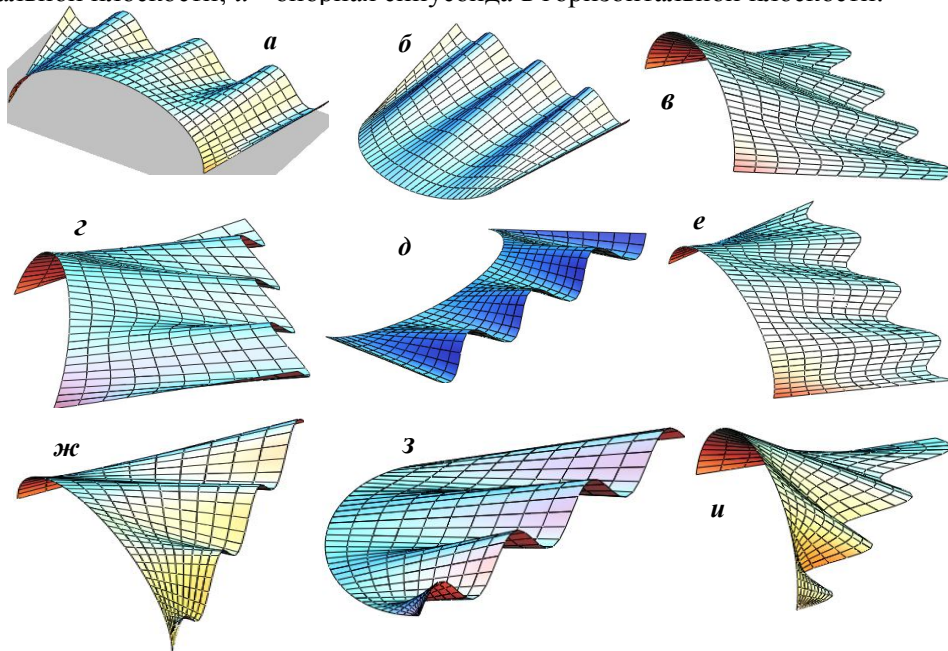


Рис. 3. Линейчатые поверхности с направляющими полуэллипсом и синусоидой

На рис. 2.4 представлены линейчатые поверхности с направляющими эллипсом с полуосями ($a = 1,5$; $b = 1$), $-0,5\pi \leq \varphi \leq 1,5\pi$ и параболой $z = at^2$, $-1,5 \leq t \leq 1,5$. Расстояние между опорными кривыми (высота трапеции) $h = 4,5$. пределы изменения параметра эллипса $-0,5\pi \leq \varphi \leq 1,5\pi$ обеспечивают симметричное прохождение образующей прямой опорного эллипса и параболы. В верхнем ряду рис. 4 большая ось эллипса горизонтальна, в нижнем ряду вертикальна;

а, г - опорные эллипс и парабола в вертикальной плоскости, вершина параболы : *а* - сверху, *б* - снизу;

\bar{b}, \bar{d} - парабола в горизонтальной плоскости с вершиной параболы: a - с внутренней стороны плана, с наружной стороны;
 $\bar{в}, \bar{е}$ - эллипс в горизонтальной плоскости, парабола в вертикальной.

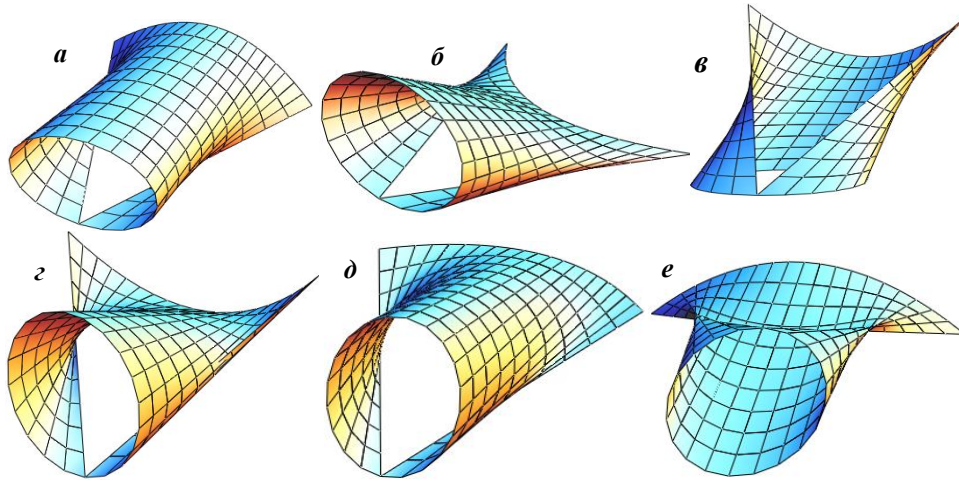


Рис. 4. Линейчатые поверхности с направляющими. эллипсом и параболой

Рассмотрим эллипсоидальные линейчатые поверхности - обе опорные кривые эллипса: $x_1 = a_1 \cos u$; $y_1 = b_1 \sin u$; $x_2 = a_2 \cos(u + u_0)$; $y_2 = b_2 \sin(u + u_0)$, $0 \leq u \leq 2\pi$. Полуоси 1-го опорного эллипса принимаем $a=1$, $a=0,75$ располагаем его в горизонтальной плоскости. Параметры 1-го опорного эллипса принимаем неизменными. Начало 2-го смещаем в вертикальной плоскости на расстояние $z_0 = 5$. Параметры 2-го опорного эллипса могут меняться, или может вращаться как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости. Очевидно, если $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, $u_0 = 0$ и плоскости опорных эллипсов параллельны, если начало координат 2-го эллипса смещено в параллельной плоскости, получим наклонный эллиптический цилиндр. При $u_0 = 0$ получим эллиптический гиперболоид. Если полуоси 2-го опорного эллипса принять равными нулю, получаем эллиптический конус. Если одну из полуосей 2-го опорного эллипса принять равной нулю и $u_0 = 0$ получаем эллиптический коноид.

Эллипсоидальные линейчатые поверхности представлены на рис. 5:

a - полуоси обоих эллипсов равны, $u_0 = \pi/2$ - эллиптический гиперболоид;

$\bar{б}-\bar{д}$ - полуоси верхнего опорного эллипса равны $2/3$ полуосей нижнего опорного эллипса, $\bar{б} - u_0 = \pi/2$ - эллиптический гиперболоид;

$\bar{в} - u_0 = \pi$ - поверхность вырождается в двухполостный конус;

$\bar{в} - u_0 = \pi/2$, верхний опорный эллипс повернут в горизонтальной плоскости на угол 90° ;

$\bar{в} - u_0 = \pi/2$, верхний опорный эллипс повернут в вертикальной плоскости на угол 30° ;

$\bar{е}-\bar{з}$ - $a_2 = 0$; $\bar{е} - u_0 = 0$ - поверхность - эллиптический коноид;

$\bar{ж} - u_0 = \pi/2$; $\bar{з} - u_0 = \pi$.

На рис 5, $\bar{е}-\bar{з}$ при использовании уравнения эллипса образующая прямая линия дважды проходит по отрезку прямой линии. Если использовать уравнение отрезка прямой, то получим поверхности с треугольным разрывом, аналогичные поверхностям на рис. 4.

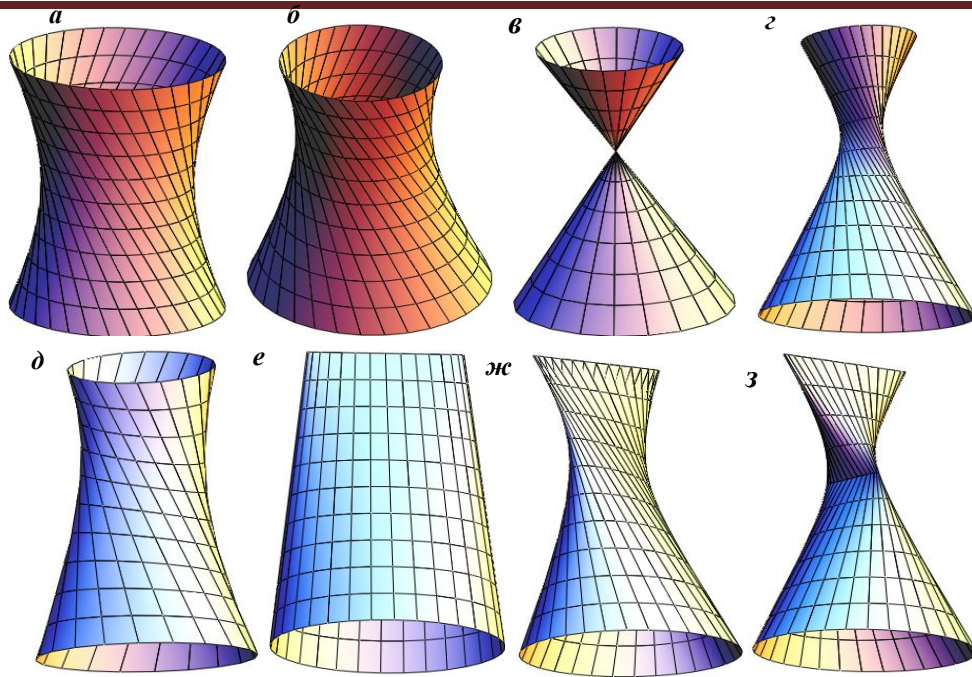


Рис. 5. Эллипсоидальные линейчатые поверхности

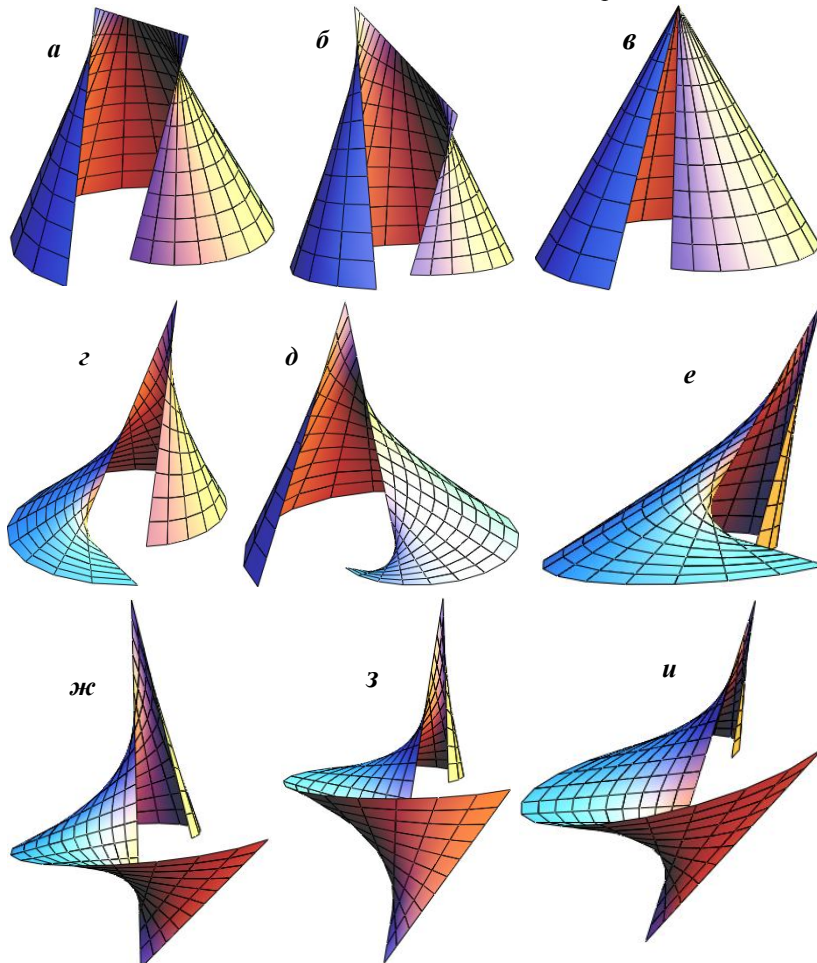


Рис. 6. Эвольвентные линейчатые поверхности

На рис. 6 представлены поверхности с опорными кривыми: эвольвентой круга радиусы $a = 0,5$; $1,5\pi \leq u \leq 3,5\pi$ и прямой линией:

- а) опорная прямая линия параллельна плоскости эвольвенты;
- б) опорная прямая линия наклонена к плоскости эвольвенты;
- в) опорные точки прямой линии совмещены - получаем эвольвентный конус;
- г) опорная прямая линия перпендикулярна плоскости эвольвенты, начальная точка опорной прямой линии в плоскости эвольвенты;
- д) опорная прямая линия перпендикулярна плоскости эвольвенты, конечная точка опорной прямой линии в плоскости эвольвенты;
- е) опорная прямая линия наклонена к плоскости эвольвенты под углом 60° , начальная точка опорной прямой линии в плоскости эвольвенты;
- ж) опорная прямая линия перпендикулярна плоскости эвольвенты, начальная и конечная точки опорной прямой линии по разную стороны от плоскости эвольвенты и на разном расстоянии;
- з) опорная прямая линия перпендикулярна плоскости эвольвенты, начальная и конечная точки опорной прямой линии по разную стороны от плоскости эвольвенты и на одинаковом расстоянии;
- и) опорная прямая линия наклонена к плоскости эвольвенты, начальная и конечная точки опорной прямой линии по разную стороны от плоскости эвольвенты и на одинаковом расстоянии.

На рис. 7 линейчатые поверхности на опорных кривых: эвольвенте круга радиуса $a = 0,5$; $1,5\pi \leq u \leq 3,5\pi$ и синусоиде с 5-ю полуволнами амплитудой $b = 0,5$;

- а) плоскости эвольвенты и синусоиды в параллельных плоскостях на расстоянии $h = 8$;
- б) ось синусоиды повернута к плоскости эвольвенты на угол 30° ;
- в) плоскость синусоиды ортогональна плоскости эвольвенты;
- г) ось синусоиды ортогональна плоскости эвольвенты, конец синусоиды в плоскости эвольвенты;
- д) ось синусоиды ортогональна плоскости эвольвенты, начало синусоиды в плоскости эвольвенты;
- е) плоскость эвольвенты наклонна к плоскости синусоиды;
- ж) ось синусоиды ортогональна плоскости эвольвенты; Начало и конец синусоиды на равных расстояниях от плоскости эвольвенты, начало синусоиды ниже плоскости эвольвенты;
- з) ось синусоиды ортогональна плоскости эвольвенты; начало и конец синусоиды на равных расстояниях от плоскости эвольвенты, начало синусоиды выше плоскости эвольвенты, плоскость синусоиды повернута на угол 45° вокруг оси;
- и) ось синусоиды составляет угол 60° к плоскости эвольвенты; Начало и конец синусоиды на равных расстояниях от плоскости эвольвенты, начало синусоиды ниже плоскости эвольвенты.

Как видно из приведенных примеров совмещая две опорные точки можно получать линейчатые поверхности на треугольном плане. Если опорные кривые не лежат в параллельных плоскостях, можно расположить все опорные точки на одной прямой линии, и получать новые виды линейчатых поверхностей. Примеры с опорными кривыми в горизонтальной и вертикальной плоскостях и опорными точками на прямой линии приведены на рис. 8:

- а-в) эллипс в горизонтальной, парабола в вертикальной плоскостях;
- г-е) синусоида в горизонтальной, эллипс в вертикальной плоскостях;
- ж-и) парабола в горизонтальной, синусоида в вертикальной плоскостях;
- к-п) опорные эллипсы в горизонтальной и вертикальной плоскостях;

На рис. 8,*a-u* в 1-х столбцах опорные точки вертикальных опорных кривых лежат во внутренней области опорных точек горизонтальных опорных кривых;

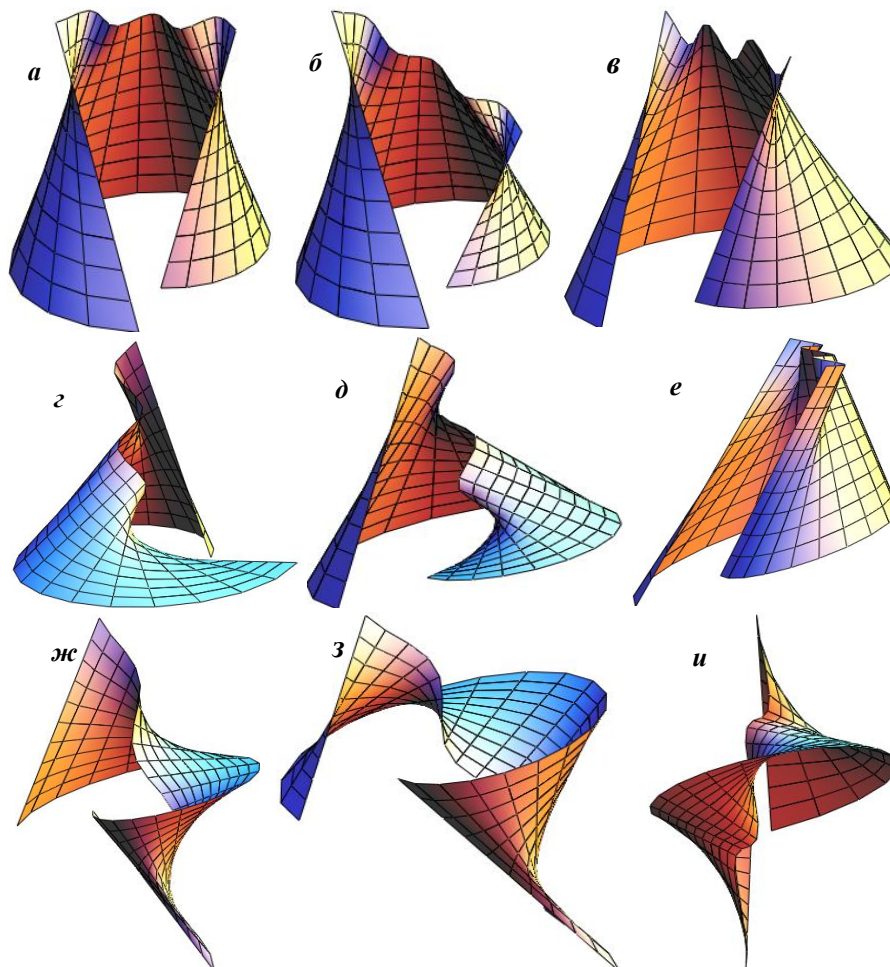


Рис. 7. Эвольвентно-синусоидальные линейчатые поверхности

во 2-х рядах опорные точки попарно совмещены; в 3-х рядах опорные точки вертикальных опорных кривых лежат во внешней области опорных точек горизонтальных опорных кривых.

На рис. 8,*к-м* продольные оси опорных эллипсов расположены на одной прямой и центры опорных эллипсов совмещены

к) размеры полуосей вертикального опорного эллипса больше полуосей горизонтального эллипса;

л) размеры полуосей вертикального и горизонтального опорных эллипсов равны;

м) размеры полуосей вертикального опорного эллипса меньше полуосей горизонтального эллипса.

На рис. 8,*н-п* центры опорных эллипсов совмещены: по направлению прямой опорных точек:

н) центр горизонтального опорного эллипса смещен на расстояние меньше размера полуоси вертикального опорного эллипса;

о) центр горизонтального опорного эллипса смещен на расстояние размера полуоси вертикального опорного эллипса, опорные эллипсы соприкасаются;

п) центр горизонтального опорного эллипса смещен на расстояние больше размера полуоси вертикального опорного эллипса.

Приведенные примеры показывают возможность создания разнообразных форм на основе линейчатых поверхностей, построенных на базе двух опорных кривых. При этом получаем поверхности на четырехугольных планах с двумя прямолинейными и двумя криволинейными сторонами. Совмещая опорные точки получаем линейчатые поверхности на треугольных и двуугольных (с криволинейными сторонами) планах.

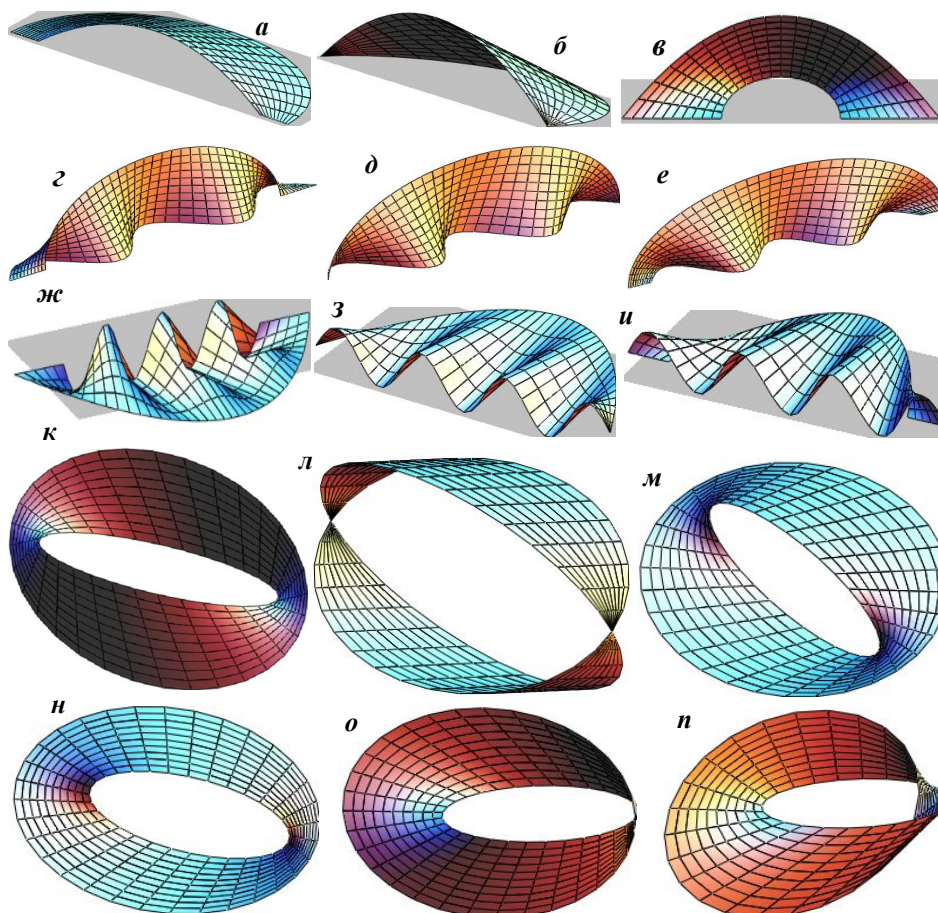


Рис. 8. Линейчатые поверхности с опорными точками на прямой линии

На основе линейчатых поверхностей на опорных кривых строятся поверхности Кунса, которые формируются суммированием двух линейчатых поверхностей с общими опорными точками на четырех и треугольных планах [8].

Л и т е р а т у р а

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
2. Кривошапко С.Н. Классификация линейчатых поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2006. – № 1. – С. 10-20.
3. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек. – М.: Изд-во РУДН, 2009. – 357 с.
4. Catalan E. Memoire sur les surfaces gauches a plan directeur. - P., 1843.
5. Davis R.F. On the cylindroid// The Mathematical Gazette. – July 1990. – Vol. 1. – № 22. – P. 370-371.
6. Weiß Gunter. Die algebraischen Konoide mit ebener Strictionslinie// Monatsh Math. - 1976. – 81, № 1. – S. 69-81.
7. Кривошапко С.Н. Коноидальные оболочки// Монтажные и специальные работы в строительстве. – 1998. – № 6. – С. 22-24.

8. Иванов В.Н. Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 5-10.

References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Moscow: "LIBROKOM", 560 p.
2. Krivoshapko, S.N. (2006). Classification of ruled surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 1, p. 10-20.
3. Krivoshapko, S.N. (2009). *Geometry of Ruled Surfaces with the Edges of Regression and Linear Theory of Analysis of Torse Surfaces*. Moscow: Izd-vo RUDN, 357 p.
4. Catalan, E. (1843). *Memoire sur les surfaces gauches a plan directeur*. Paris.
5. Davis, R.F. (1990). On the cylindroid. *The Mathematical Gazette*. July, Vol. 1, № 22, p. 370-371.
6. Weiß, Gunter (1976). Die algebraischen Konoide mit ebener Stricionslinie. *Monatsh Math.*, 81, № 1, p. 69-81.
7. Krivoshapko, S.N. (1998). Conoidal shells. *Montazhn. i Spetz. Rab. v Stroitel'stve*, № 6, p. 22-24.
8. Ivanov, V.N. (2007) Architectural compositions on the base of Coons surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p. 5-10

RULED SURFACES ON THE GIVEN SUPPORTING CURVES

V.N. IVANOV

Peoples' Friendship University, Moscow

Thin spatial structures allow creating modern forms of the public, sport and industrial buildings and creations. The shells made on the base of the ruled surfaces may be designed by the simplest way. The ruled surfaces formed on the base of any two supporting curves are regarded in the paper.

KEY WORDS: two directrix curves, supporting points, ruled surfaces.

