

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНО УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

В.Д. ПОТАПОВ, д-р техн. наук, профессор,

А.И. ФИМКИН, канд. техн. наук,

А. Р. ПЕПАНИЯ, аспирант,

Московский государственный университет путей сообщения;

127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9.

E-mail: potapov.vd@mail.ru, smlab@yandex.ru, arseniy1991@rambler.ru

При расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании, часто используется модель основания, предложенная Винклером. Эта гипотеза неоднократно подвергалась вполне обоснованной критике. В работах [1, 2] была предложена новая модель нелокально упругого основания, которая позволяет устранить, по крайней мере, некоторые противоречия гипотезы Винклера. В настоящей статье предпринята попытка экспериментальной проверки гипотезы нелокальной упругости основания.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелокально упругое основание, балки, изгиб, экспериментальная проверка.

В работах [1, 2] была предложена модель нелокально упругого основания, в которой зависимость между реакцией основания $r(x)$ в рассматриваемой точке зависит от значений прогиба $w(x)$ по всей длине балки или площади пластины. Например, для балки эта зависимость принимает вид:

$$r(x) = c \int_0^L C(|x - x^*|) w(x^*) dx^* .$$

Здесь L - длина балки, $C(|x - x^*|)$ - функция нелокальности, которая учитывает влияние прогибов балки по всей ее длине на величину упругого отпора в рассматриваемой точке, c - коэффициент аналогичный коэффициенту постели в модели Винклера. В дальнейшем функция $C(|x - x^*|)$ принимается в виде:

$$C(|x - x^*|) = \left[c\delta(x - x^*) + c_0 \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x-x^*|} \right],$$

причем $\delta(x - x^*)$ - дельта-функция, c, c_0, μ - константы.

Примеры, приведенные в указанных работах, убедительно свидетельствуют о том, что форма прогиба и характер изменения его во времени для нелокально упругого основания может существенно меняться в сравнении с аналогичными изменениями при использовании модели Винклера.

В настоящей статье приводятся некоторые данные, полученные из физического и численного эксперимента, которые подтверждают возможность применения модели нелокально упругого основания при расчете балок и плит, лежащих на сплошном упругом основании.

1. Физический эксперимент

Этот эксперимент связан с испытанием стальной полосы на изгиб под действием сосредоточенной силы.



Рис. 1.

Установка для испытаний представляет собой вертикальную плиту пенополистирола высотой 100 см, шириной 200 см и толщиной 4 см. На верхней горизонтальной кромке плиты наклеена резиновая прокладка длиной 120 см, шириной 4 см и высотой 3,8 см. На эту прокладку наклеена стальная полоса длиной 100 см, шириной 2,74 см и толщиной 0,06 см. Сосредоточенная сила, равная 1 кГ, передается на стальную полосу с помощью вертикального штока, закрепленного в направляющей П-образной раме. Для измерения вертикальных перемещений полосы используются 8 индикаторов часового типа с точностью 0.001 мм, установленных вдоль полосы в точках с координатами -25 см, -17 см, -10 см, -3 см, +1,5 см, +8 см, +17 см, +25 см. Были проведены 10 повторных испытаний, в результате которых были вычислены средние значения вертикальных перемещений w в местах фиксации мессур, которые приведены в табл. 1.

На основании этих данных определены значения параметров c, c_0, μ . Погрешность определения названных величин использовались два критерия. Первый - в среднеквадратичном, в соответствии с которым минимизируется выражение

$$s = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^8 (w[i] - p[i])^2}{8} \right)}$$

Здесь $w[i], p[i]$ - значения прогиба балки в точках с координатами x_i , полученных расчетным путем и из эксперимента (см. таблицу).

Таблица 1

$x, \text{см}$	$w, \text{см}$
$x [1]=-25$	$P[1]=0.000515$
$x [2]=-17$	$P[2]=0.000535$
$x [3]=-10$	$P[3]=0.001195$
$x [4]=-3$	$P[4]=-0.011835$
$x [5]=1.5$	$P[5]=-0.017195$
$x [6]=8$	$P[6]=0.00105$
$x [7]=17$	$P[7]=0.0006$
$x [8]=25$	$P[8]=0.000285$

Второй критерий сводится к минимизации разности $s = |(w[i] - p[i])|$. При использовании первого критерия получим $c = 8.0 \text{кГ} / \text{см}^2$, $c_0 = -2.5 \text{кГ} / \text{см}^2$, $\mu = 0.00004 \text{см}^{-1}$, $s = 0.000295 \text{см}$. Заметим, что значения прогиба полосы определялись с помощью метода конечных разностей, причем шаг по координате принят равным 0.5 см. Кривая изменения прогиба полосы вдоль оси x при этих значениях параметров представлена на рис. 2 (сплошная кривая). Максимальное значение прогиба (по абсолютной величине) равен 0.0235 см.

Для сравнения на том же рисунке показана аналогичная кривая (штриховая линия), которая получена при использовании модели Винклера. В этом случае $c = 9.7 \text{кГ} / \text{см}^2$. Погрешность $s = 0.000508 \text{см}$. Максимальное значение прогиба равно 0.0204 см. Как видно, новая модель позволяет получить более точный результат по сравнению с тем, что имеем в случае использования традиционной модели Винклера.

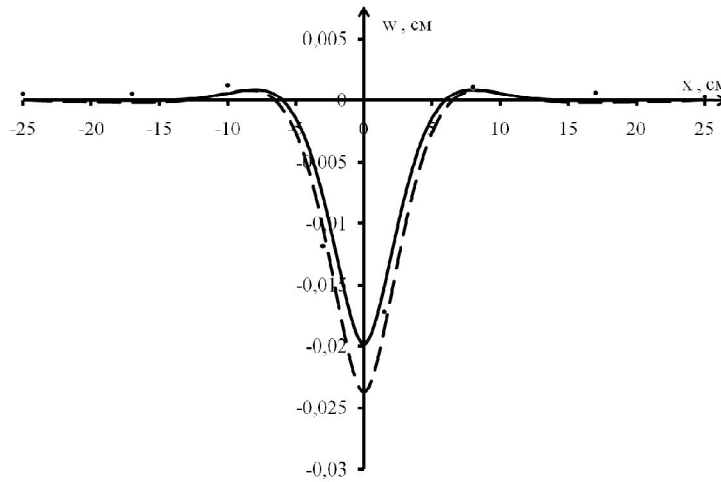


Рис. 2

На рис. 3 представлены аналогичные результаты, полученные с применением второго критерия оценки погрешности. Для сплошной кривой, отвечающей модели нелокально упругого основания, имеем: $c = 8.0 \text{кГ} / \text{см}^2$, $c_0 = -0.9 \text{кГ} / \text{см}^2$, $\mu = 0.04 \text{см}^{-1}$, $s = 0.001445 \text{см}$, $w_{\text{max}} = 0.0238 \text{см}$. В случае модели Винклера имеем $c = 10 \text{кГ} / \text{см}^2$, $s = 0.002926 \text{см}$, $w_{\text{max}} = 0.0199 \text{см}$. Как видно, и в этом случае погрешность построения кривой оказывается выше, чем при использовании модели нелокально упругого основания.

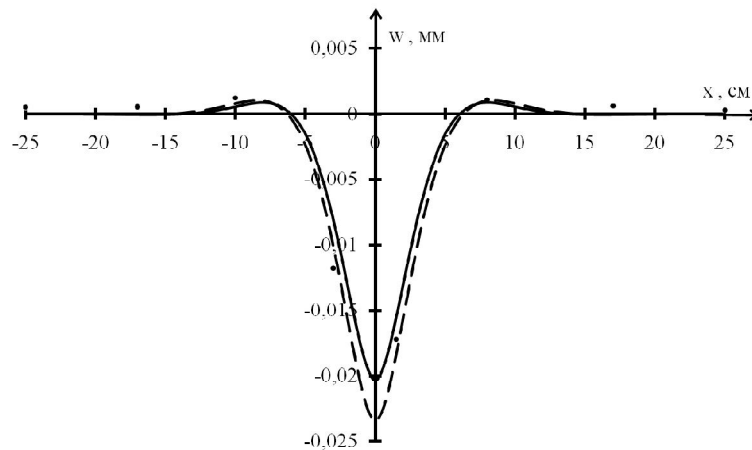


Рис. 3

2. Численный эксперимент

Рассмотрим упругую прямоугольную пластину толщиной 1 см, длиной 400 см и высотой 100 см. Модуль упругости материала пластины равен 1000 кг/см^2 , а коэффициент Пуассона – 0.2.

Вдоль боковых кромок наложены связи, исключающие перемещения вдоль осей x и z , а вдоль нижней кромки – связи, исключающие перемещения вдоль осей y и z . На верхнюю кромку пластины наклеен стальной стержень квадратного поперечного сечения со стороной 1 см. Эта конструкция загружена вертикальной сосредоточенной силой величиной 1000 кГ, приложенной на оси симметрии пластины и направленной сверху вниз.

Для расчета этой плоской задачи использовался метод конечных элементов с выбором квадратных конечных элементов с размерами $5 \times 5 \text{ см}$ (См. рис. 4).

Прогиб стального стержня имеет вид, показанный на рис. 5 кривой 1. Максимальный прогиб стержня в КЭ модели равен 1.6662 см. Две другие кривые получены для балки, лежащей на сплошном упругом основании с использованием модели нелокально упругого основания и основания Винклера.

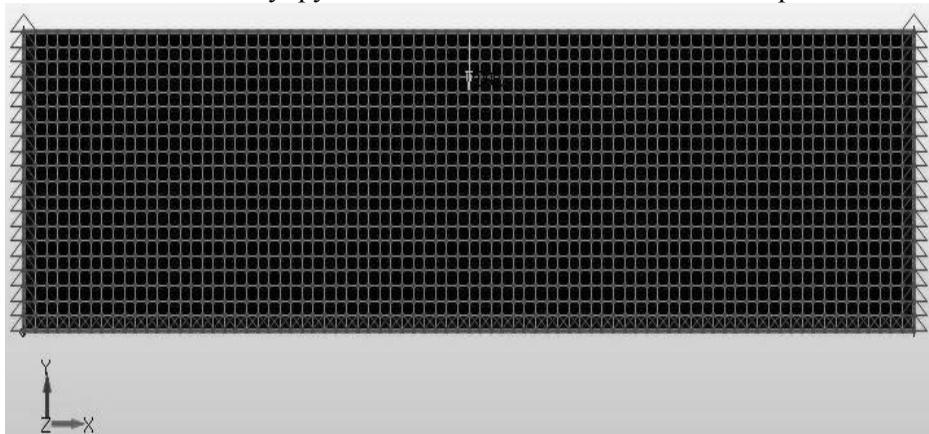


Рис. 4.

Расчет, как и раньше, выполнен методом конечных разностей с шагом 5 см. Для оценки погрешности получаемой аппроксимации используется средне-квадратичный критерий

$$s = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{81} (w[i] - p[i])^2 \right) / 81},$$

где $p[i]$ - значения прогиба балки, полученные методом конечных элементов.

Для модели нелокально упругого основания в итоге имеем $c = 35,35c_0 = -25.85 \Gamma / \text{см}^2$, $\mu = 0.034 \text{см}^{-1}$, $s = 0.0089 \text{см}$, $w_{\max} = 1.83 \text{см}$. Кривая, отвечающая этим данным, показана на рис. 5 кривой 2.

Аналогичные данные для модели Винклера имеют значения $c = 18.5 \text{кГ} / \text{см}^2$, $s = 0.0024 \text{см}$, $w_{\max} = 2.00 \text{см}$. Кривая 3 на рис. 5 дает представление об изменении прогиба стержня в этом случае. Значения характеристики s для двух вариантов моделей упругого основания показывает, что модель нелокально упругого основания позволяет получить более корректные результаты. Тот же вывод можно сделать сопоставляя непосредственно две кривые – 1 и 2. Особо следует обратить внимание на то, что в отличие от модели Винклера (кривая 3) в модели нелокально упругого основания практически отсутствует зона отлипания, т.е. зона положительных значений прогиба балки.

Заметим, что параметры кривых, полученных для нелокально упругого основания в обоих экспериментах отвечают некоторым локальным минимумам функции s . Глобальным минимумам функции s будут соответствовать параметры кривых, которые наилучшим образом будут аппроксимировать экспериментальные данные. С другой стороны, улучшение точности аппроксимации в случае нелокально упругого основания может быть достигнуто за счет увеличения числа членов в выражении функции $C(|x - x^*|)$. Например, эту функцию можно представить в виде

$$C(|x - x^*|) = \left[c\delta(x - x^*) + \sum_{i=1}^n c_{oi} \frac{\mu_i}{2} e^{-\mu_i|x-x^*|} \right], \text{ где } c, c_{oi}, \mu_i - \text{константы.}$$

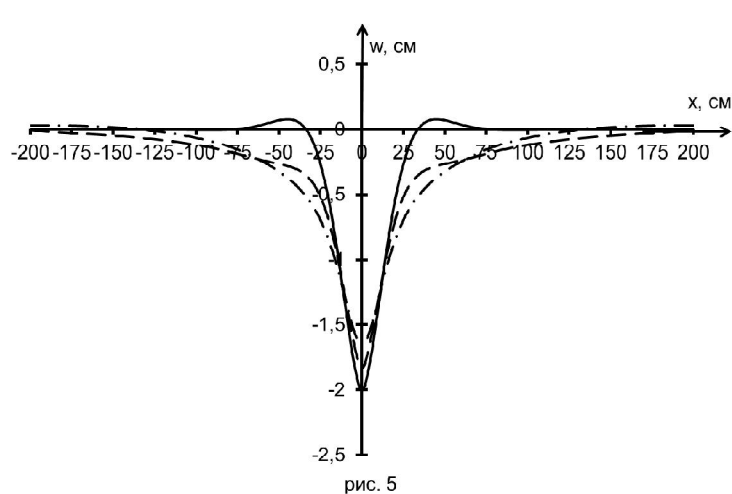


рис. 5

Заключение

В работе выполнен анализ точности аппроксимации экспериментальных данных при рассмотрении балок, лежащих на сплошном упругом основании. В качестве экспериментальных данных приняты результаты физического эксперимента со стальной полосой, лежащей на сплошном комбинированном основании, и численного эксперимента, связанного с расчетом прямоугольной пластины единичной толщины с приклеенным к ее верхней кромке стальным стержнем. Расчет выполнен методом конечных элементов. Определение параметров сплошного упругого основания производится с помощью метода конечных разностей. Точность аппроксимации результатов оценивается с помощью двух критериев: в среднеквадратичном и по максимуму разности $|w[i] - p[i]|$,

где $p[i]$, $w[i]$ - значения прогиба стержня (балки), найденные из эксперимента (физического или численного) и расчета балки, лежащей на сплошном упругом основании методом конечных разностей. Показано, что использование модели нелокально упругого основания дает более корректные результаты нежели традиционно наиболее употребляемая модель Винклеровского основания.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Основание». Учредители фонда: ОАО «Институт Гипростроймост», Группа компаний «СК МОСТ».

Л и т е р а т у р а

1. *Потапов В.Д.* К вопросу о расчете балок на нелокально упругом основании// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 4. – С. 63 – 68.
2. *Потапов В.Д.* Статический расчет плит, лежащих на сплошном нелокально упругом основании// Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 1. – С. 15 – 20.

References

1. *Potapov, V.D.* (2014). About calculation of bars lying on a nonlocal elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, pp. 63 - 68.
2. *Potapov, V.D.* (2015). Static calculation of plates lying on continuous nonlocal elastic foundation. *Stroit. Mech. i Raschet Soor.*, № 1, p. 15 – 20.

EXPERIMENTAL TEST OF THE MODEL OF A NONLOCAL ELASTIC FOUNDATION

POTAPOV V.D., FIMKIN A. I., PEPANYAN A. R.
Moscow State University of Railway Engineering, Moscow

The design of bars, lying on an elastic base is fulfilled usually with help of a simple model of the base proposed by Winkler. This hypothesis was subjected to repeated critics. A new model of nonlocal elastic foundation was proposed by Potapov V.D . It allows reducing some contradictions of Winkler’s model. In the paper, an attempt of an experimental test of the hypothesis of nonlocal elastic foundation is undertaken.

KEY WORDS: nonlocal elastic foundation, bars, bending, experimental test.

