

Численные методы расчета конструкций

**РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
НА ОСНОВЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА
С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ МНОЖИТЕЛЯМИ ЛАГРАНЖА¹**

Ю. В. КЛОЧКОВ, доктор техн. наук, профессор
 О. В. ВАХНИНА, кандидат техн. наук, доцент
 Т.А. КИСЕЛЕВА, кандидат техн. наук, старший преподаватель
 Волгоградский государственный аграрный университет
 400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26,
 e-mail: Klotchkov@bk.ru

Изложен алгоритм расчета тонких оболочек на основе треугольного конечного элемента, в столбец узловых варьируемых параметров которого дополнительно включены корректирующие множители Лагранжа, позволившие улучшить совместность данного типа элемента дискретизации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оболочка вращения, метод конечных элементов, треугольный конечный элемент, множители Лагранжа, матрица жесткости, элемент дискретизации.

Для расчета на прочность тонкостенных конструкций различной геометрии [1] широко используется метод конечных элементов [2-6]. При этом достаточно часто применяются треугольные элементы дискретизации (ТЭД). В соотношениях Коши, входящих в систему основных уравнений теории тонких оболочек [7,8], деформации срединной поверхности являются функциями компонент вектора перемещения, а также их первых и вторых производных по криволинейным координатам. В связи с этим целесообразным является включение в столбец узловых варьируемых параметров ТЭД кроме компонент вектора перемещения их первых и вторых производных. Однако, такие элементы одновременно с преимуществами в виде повышенной точности вычислений, обладают существенными недостатками, которые являются следствием несовместности на сторонах ТЭД по первым и вторым производным компонент вектора перемещений.

Столбец узловых неизвестных ТЭД в глобальной (S – длина дуги меридиана, θ – угол, отсчитываемый от плоскости XOZ против хода часовой стрелки) системе координат был выбран в следующем виде:

$$\left\{ \begin{matrix} U \\ v \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 54}^T = \left\{ \left\{ \begin{matrix} v_{1\Gamma} \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 18}^T \left\{ \begin{matrix} v_{2\Gamma} \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 18}^T \left\{ \begin{matrix} v_{\Gamma} \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 18}^T \right\}, \quad (1)$$

где $\left\{ \begin{matrix} q \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 18}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,s}^i q_{,s}^j q_{,s}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k q_{,ss}^i q_{,ss}^j q_{,ss}^k q_{,\theta\theta}^i q_{,\theta\theta}^j q_{,\theta\theta}^k q_{,s\theta}^i q_{,s\theta}^j q_{,s\theta}^k \right\}$.

Здесь под $q^m (m = i, j, k)$ понимаются тангенциальные v^1, v^2 или нормальная v компоненты векторов перемещений узлов i, j, k ТЭД.

В качестве дополнительных узлов ТЭД I рассмотрим точки в серединах сторон 1, 2, 3, которые одновременно являются дополнительными узлами со-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области по проекту «Разработка математических моделей для расчета на прочность тонкостенных конструкций, входящих в структуру строительных, машиностроительных, нефтехимических и водохозяйственных объектов Волгоградской области» № 15-41-02125 р_Поволжье_а.

седних ТЭД II, III, IV (рис. 1). В этих узлах должны выполняться равенства для первых и вторых производных нормальной компоненты вектора перемещения по направлениям нормалей \bar{n}_l ($l = 1, 2, 3$) к сторонам ТЭД:

$$\begin{aligned} \partial v / \partial \bar{n}_l &= -\partial v' / \partial \bar{n}'_l; \\ \partial^2 v / \partial \bar{n}_l^2 &= \partial^2 v' / \partial \bar{n}'_l{}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где штрихом обозначены компоненты и нормали смежных с ТЭД I элементов дискретизации.

В силу несовместности рассматриваемого ТЭД равенства (2) точно не выполняются. Поэтому предлагается записать (2) в виде

$$\begin{aligned} \lambda_l (\partial v / \partial \bar{n}_l + \partial v' / \partial \bar{n}'_l) &= 0; \\ \lambda_t (\partial^2 v / \partial \bar{n}_t^2 - \partial^2 v' / \partial \bar{n}'_t{}^2) &= 0; (t = 4, 5, 6). \end{aligned} \quad (3)$$

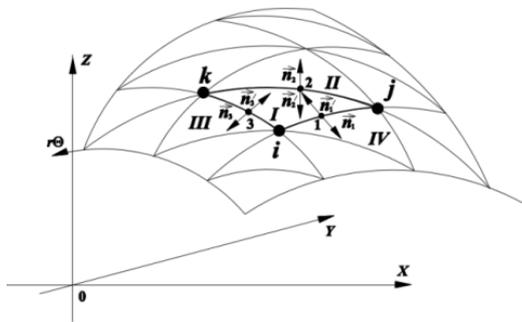


Рис. 1

Для отдельного ТЭД I будут выполняться равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\partial v / \partial \bar{n}_1) + \lambda_2 (\partial v / \partial \bar{n}_2) + \lambda_3 (\partial v / \partial \bar{n}_3) &= 0; \\ \lambda_4 (\partial^2 v / \partial \bar{n}_1^2) + \lambda_5 (\partial^2 v / \partial \bar{n}_2^2) + \lambda_6 (\partial^2 v / \partial \bar{n}_3^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Первые и вторые производные нормальной компоненты вектора перемещения в направлении внешней нормали могут быть выражены через соответствующие производные нормальной компоненты вектора перемещения по глобальным криволинейным координатам S, θ

$$\begin{aligned} \partial v / \partial \bar{n}_l &= [(\partial v / \partial S)_l \cos \alpha_l + (\partial v / \partial \theta)_l \cos \beta_l]; \\ \partial^2 v / \partial \bar{n}_l^2 &= [(\partial^2 v / \partial S^2)_l \cos^2 \alpha_l + 2(\partial^2 v / \partial S \partial \theta)_l \cos \alpha_l \cos \beta_l + (\partial^2 v / \partial \theta^2)_l \cos^2 \beta_l], \end{aligned} \quad (5)$$

где α_l и β_l – углы между векторами нормалей \bar{n}_l и касательными векторами локального базиса \bar{a}_{1l}^0 и \bar{a}_{2l}^0 .

Используя в качестве функций формы ТЭД полиномы пятой степени [9], выражения (5) могут быть записаны в виде:

$$\partial v / \partial \bar{n}_l = \{ \Phi_l' \}^T \{ U_y^\Gamma \}; \quad \partial^2 v / \partial \bar{n}_l^2 = \{ \Phi_l'' \}^T \{ U_y^\Gamma \}. \quad (6)$$

С учетом (6) соотношения (4) могут быть представлены в виде:

$$\{ \lambda' \}^T [G'] \{ U_y^\Gamma \} = 0; \quad \{ \lambda'' \}^T [G''] \{ U_y^\Gamma \} = 0, \quad (7)$$

где $\{ \lambda' \}^T = \{ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \}; \quad \{ \lambda'' \}^T = \{ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6 \}; \quad [G'] = \begin{bmatrix} \{ \Phi_1' \} \\ \{ \Phi_2' \} \\ \{ \Phi_3' \} \end{bmatrix}; \quad [G''] = \begin{bmatrix} \{ \Phi_1'' \} \\ \{ \Phi_2'' \} \\ \{ \Phi_3'' \} \end{bmatrix}.$

Функционал Лагранжа для ТЭД может быть записан в виде

$$\begin{aligned} L &= \int_V \{ \epsilon_{py}^\zeta \}^T \{ \sigma_{py} \} dV - \int_F \{ U \}^T \{ P \} dF + \\ &+ \{ \lambda' \}^T (\partial v / \partial \bar{n}_1 - \partial v' / \partial \bar{n}'_1) + \{ \lambda'' \}^T (\partial^2 v / \partial \bar{n}_1^2 + \partial^2 v' / \partial \bar{n}'_1{}^2) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{ \epsilon_{py}^\zeta \}; \{ \sigma_{py} \}$ – деформации и напряжения в слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ ; $\{ P \}$ – столбец внешней нагрузки;

$\{U\}^T = \{v^1 \ v^2 \ v\}$ – матрица-строка, содержащая компоненты вектора перемещения точки внутренней области ТЭД.

Учитывая (7) и стандартные для МКЭ матричные преобразования [10], функционал (8) может быть представлен в виде:

$$L = \{U_v^T\}^T [PR]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C][\Gamma][B] dV [PR] \{U_v^T\} - \{U_v^T\}^T [PR]^T \int_F [A]^T \{P\} dF + \{\lambda'\}^T [G'] \{U_v^T\} + \{\lambda''\}^T [G''] \{U_v^T\} = 0. \quad (9)$$

Минимизируя функционал (8) по $\{U_v^T\}^T$, $\{\lambda'\}^T$ и $\{\lambda''\}^T$, можно получить следующие системы уравнений

$$\begin{cases} \partial L / \partial \{U_v^T\}^T = [K] \{U_v^T\} - \{R\} + [G']^T \{\lambda'\} + [G'']^T \{\lambda''\} = 0; \\ \partial L / \partial \{\lambda'\}^T = [G']^T \{U_v^T\} = 0; \\ \partial L / \partial \{\lambda''\}^T = [G'']^T \{U_v^T\} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $[K]$, $\{R\}$ – матрица жесткости и столбец узловой нагрузки ТЭД [9].

Для удобства конечно-элементной реализации описанного выше алгоритма систему (10) можно представить в следующем виде

$$[K_p] \{U_{vp}^T\} \{R_p\} = 0, \quad (11)$$

где $[K_p]$, $\{U_{vp}^T\}$, $\{R_p\}$ – расширенная матрица жесткости, столбец узловых неизвестных и столбец узловых усилий ТЭД с корректирующими множителями Лагранжа.

Пример. Была рассчитана цилиндрическая оболочка, нагруженная вдоль образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 2). Были приняты следующие исходные данные: $q = 0,1$ Н/см; $R = 10$ см; $t = 0,1$ см; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^7$ Н/м². Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/4 часть цилиндра, которая представлялась одной полоской элементов, ориентированной в кольцевом направлении шириной $\Delta S = 1,0$ см.

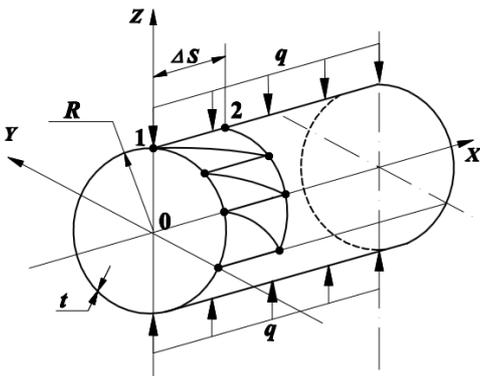


Рис. 2

Расчеты были выполнены в трех вариантах: в первом варианте использовался ТЭД с размером матрицы жесткости 54×54 без множителей Лагранжа [3]; во втором варианте корректирующие множители Лагранжа были применены только к первым производным нормальной компоненты вектора перемещения в направлении \vec{n}_i . В этом случае размер матрицы жесткости составил 57×57 . В третьем варианте описанный

выше алгоритм совершенствования ТЭД с помощью корректирующих множителей Лагранжа был реализован в полном объеме.

Результаты повариантного расчета представлены в таблице 1, в которой приведены численные значения кольцевых напряжений на внутренней $\sigma_k^в$ и на-

ружной σ_k^H поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 (рис. 2) в зависимости от густоты сетки дискретизации ТЭД.

Таблица 1

Сетка узлов	Напряжения, МПа	Варианты расчета		
		54 × 54	57 × 57	60 × 60
13 × 2	σ_1^B	335,373	197,211	190,986
	σ_1^H	- 312,738	- 197,852	- 190,986
	σ_2^B	121,014	184,217	190,985
	σ_2^H	- 138,029	- 183,764	- 190,986
25 × 2	σ_1^B	346,222	219,888	190,986
	σ_1^H	- 328,963	- 220,195	- 190,986
	σ_2^B	209,275	161,042	190,986
	σ_2^H	- 220,154	- 160,975	- 190,986
33 × 2	σ_1^B	324,519	227,218	190,984
	σ_1^H	- 311,888	- 227,300	- 190,984
	σ_2^B	251,258	153,666	190,984
	σ_2^H	- 258,462	- 153,757	- 190,984

Анализ табличного материала показывает, что в первом варианте отсутствует сходимость вычислительного процесса. Кроме того, напряжения, вычисленные в точках 1 и 2, существенно различаются между собой, тогда как по условиям задачи они должны быть одинаковыми. Во втором варианте наблюдается некоторое улучшение сходимости вычислительного процесса. Однако, с увеличением числа элементов дискретизации, погрешность вычислений значительно увеличивается и становится неприемлемой. В третьем варианте результаты вычислений можно признать вполне удовлетворительными. Наблюдается быстрая сходимость вычислительного процесса. Напряжения, вычисленные в точках 1 и 2, практически совпадают. Выбранная расчетная схема позволяет сравнить полученные значения напряжений с решением, полученным по формулам сопротивления материалов [11]

$$\sigma = 0,318 \cdot q \cdot R/W, \quad \text{где } W = t\Delta S^2/6. \quad (12)$$

При подстановке исходных данных в (12) можно получить

$$\sigma = \frac{0,318 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 6}{0,01 \cdot 1^2} = 190,8 \text{ Н/см}^2.$$

Сопоставляя значение σ , вычисленное по формуле (12), с табличными значениями третьего варианта, можно отметить их практическое совпадение.

Вывод: при использовании ТЭД в конечно-элементном анализе оболочек при локальном приложении нагрузок необходимо применять высокоточные треугольные элементы дискретизации, матрицы жесткости которых формируются на основе разработанного алгоритма с корректирующими множителями Лагранжа, позволяющими существенно повысить точность конечно-элементных решений.

Л и т е р а т у р а

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of analytical surfaces. –Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.

2. Nakamura T. A finite element approach ach to study cavitation instabilities in non-linear elastic solids under general loading conditions / T. Nakamura, O. Lopez-Pamies // *Int. J. Non-linear Mech.* – 2012. – 47. – № 2. – С. 331-340.
3. Rahman T. Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method / T. Rahman, E.L. Jansen, Z. Giirdal // *Nonlinear Dyn.* - 2011. – 66. – № 3. – С. 389-401.
4. Shabana A. A. Use of v-spline in the finite element analysis: comparison with ANSF geometry / A.A. Shabana, A.M. Hamed, A.-N. A. Mohamed, P. Jayakumar, M.D. Letherwood // *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn.* – 2012. – 7. – № 1. – С. 011008/1-011008/8.
5. Swenson E. D. Finite element model tuning with spatially-dense 3D modes / E.D. Swenson, J.T. Black // *Exp. Mech.* - 2011. – 51. – № 6. - С. 933-945.
6. Tiso P. Reduction method for finite element nonlinear dynamic analysis of shells / P. Tiso, E. Jansen, M. Abdalla // *AIAA Journal.* – 2011. – 49. - № 10. – С. 2295-2304.
7. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. Особенности формирования матрицы жесткости треугольного конечного элемента размером 54×54 // *Известия вузов. Строительство.* – 1998. – № 2. – С. 32–37.
10. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
11. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Nakamura, T., Lopez-Pamies, O. (2012) A finite element approach ach to study cavitation instabilities in non-linear elastic solids under general loading conditions. *Int. J. Non-linear Mech.*, 47, № 2, p. 331-340.
3. Rahman, T., Jansen, E.L., Giirdal, Z. (2011) Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method. *Nonlinear Dyn.*, 66, № 3, p. 389-401.
4. Shabana, A.A., Hamed, A.M., Mohamed, A.-N. A., Jayakumar, P., Letherwood, M. D. (2012) Use of v-spline in the finite element analysis: comparison with ANSF geometry, *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn.*, 7, № 1, p. 011008/1-011008/8.
5. Swenson, E. D., Black, J.T. (2011). Finite element model tuning with spatially-dense 3D modes, *Exp. Mech.*, 51, № 6, p. 933-945.
6. Tiso, P., Jansen, E., Abdalla, M. (2011). Reduction method for finite element nonlinear dynamic analysis of shells, *AIAA Journal*, 49, № 10, p. 2295-2304.
7. Novozhilov, V.V. (1962). *Theory of Thin Shells*, L.: Shipbuilding, 431 p.
8. Timoshenko, S.P., Voynovsky-Krieger, S. (1966). *Plates and Shells*, Moscow: Nauka, 636 p.
9. Scraps, Yu.V., Nikolaev, A.P., Kiselyov, A.P. (1998). Features of formation of a matrix of rigidity of a triangular final element size. *News of higher education institutions. Construction*, No 2, p. 32-37.
10. Golovanov, A.I., Tyuleneva, O.N., Shigabutdinov, A.F. (2006). *Method of Final Elements in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures*, Moscow: Fizmatlit, 392 p.
11. Belyaev, N.M. (1976). *Strength of Materials*, Moscow: Nauka, 608 p.

CALCULATION OF THIN SHELLS ON THE BASIS OF THE TRIANGULAR FINAL ELEMENT WITH THE CORRECTING LAGRANGE'S COEFFICIENTS

KLOCHKOV Yu.V., VAKHNINA O.V., KISELEVA T.A.
Volgograd State Agricultural University, Volgograd, Russia

The algorithm of calculation of thin shells is presented on a basis of the triangular final element, in a column of nodal varied parameters of which is included additionally the correcting Lagrangian coefficients, and that allowed to improve compatibility of taken type of an element of discretization.

KEY WORDS: Shell of revolution, finite element method, triangle element, Lagrangian coefficients, matrix features, element of discretization.