Расчеты на устойчивость

О КРИТИЧЕСКИХ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКИХ РАВНОВЕСИЯХ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Г.А. МАНУЙЛОВ, *канд. техн. наук, доцент,*
С.Б. КОСИЦЫН, *д-р техн. наук, профессор,*
М.М. БЕГИЧЕВ, *канд. техн. наук, ст. преп.*
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ),
127994, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; noxonius@mail.ru

В статье рассмотрены некоторые признаки различия критических точек равновесия (предельные точки или точки бифуркации) обсуждаются особенности перемещения точек бифуркации на кривой равновесия, и приводятся примеры возникновения бифуркаций в особых случаях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость равновесия, бифуркация, предельная точка.

Известно [1], что потеря устойчивости равновесия упругой системы может произойти только в предельных точках или в точках бифуркации. Однако качественно послекритическое поведение системы может быть существенно различным. Если точка бифуркации устойчивая (потеря устойчивости в «малом»), то начальное послебифуркационное равновесие устойчивое. В предельной точке равновесие неустойчивое, система посредством «хлопка» стремится найти другое устойчивое положение равновесия; то же самое происходит и в точках неустойчивой бифуркации. Это соответствует сценарию потери устойчивости в «большом». Кроме того, система, теряющая устойчивость в точках неустойчивой бифуркации, почти всегда проявляет весьма сильную чувствительность к начальным несовершенствам. Критические нагрузки несовершенной системы определяются в предельных точках, подчиненных соответствующей точке бифуркации идеальной системы (в отличии от существенно предельных точек, не связанных с точкой бифуркации). Наконец, важный момент – влияние типа критической точки на форму области устойчивых сочетаний различных нагрузок в геометрически нелинейных задачах устойчивости (выпуклость или невыпуклость пограничной кривой или поверхности). Наличие хотя бы одной точки бифуркации (остальные критические точки – предельные) в составе точек пограничной поверхности есть необходимый признак невыпуклости области устойчивых сочетаний нагрузок [2]. В случае действия двух нагрузок данное условие оказывается и достаточным условием невыпуклости этой области. С другой стороны, если все точки пограничной поверхности геометрически нелинейной симметричной и симметрично нагруженной системы есть точки бифуркации, то область устойчивых сочетаний нагрузок выпуклая [3]. Фактически это нелинейный аналог теоремы Папковича.

Рассмотрим особенности появления предельных точек и точек бифуркации для системы с одной степенью свободы. Нелинейное уравнение равновесия дифференцируем по координате x и приравниваем производную к нулю. Получим производную нагрузки P по координате x:

$$F\big(x, P(x)\big) = 0;$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial P}.$$

Если $\partial F / \partial x = 0$, а $\partial F / \partial P \neq 0$, то тогда производная $dP / dx = 0$, и критическая точка есть предельная точка. Если же эти производные одновременно равны нулю, то получим точку бифуркации равновесия. Это означает, что точка бифуркации есть точка пересечения или точка касания двух кривых равновесия упругой системы: исходного (докритического), и «нового» (или закритического). Характер точки бифуркации определяется числом вещественных решений квадратного уравнения относительно «наклонов» касательных к указанным кривым равновесия в точке бифуркации [1, 4]. Коэффициенты этого уравнения – вторые частные и смешанные производные функции $F\big(x, P(x)\big) = 0$, вычисленные в точке бифуркации. Тогда для некоторой точки $(x_{KP} + \delta x, P_{KP} + \delta P)$, близкой к точке бифуркации

$$F(x_{кр} + \delta x, P_{кр} + \delta P) \approx F_{xx}\delta x^2 + 2F_{xp}\delta x \delta p + F_{pp}\delta p^2 = 0.$$

Принимая, что $\delta P = k\delta x$, и $F_{pp} \neq 0$, получим уравнение для «наклонов» касательных в точке бифуркации

$$k^2 + 2\frac{F_{xP}}{F_{pp}}k + \frac{F_{xx}}{F_{pp}} = 0$$

Если дискриминант этого уравнения

$$D = F_{xP}^2 - F_{pp}F_{xx} > 0,$$

то в точке бифуркации есть два различных наклона касательных к кривым равновесия $(dP / dx = k_1$ и $dP / dx = k_2 \neq k_1)$. Следовательно, через точку бифуркации проходят две различные траектории равновесий, которые пересекаются в этой точке (рис. 1, а).

Если дискриминант D равен нулю, то квадратное уравнение имеет только одно двукратное решение

$$k_1 = k_2 = -F_{px} / F_{pp}.$$

Это означает, что траектории равновесий не пересекаются в точке бифуркации, а имеют одну общую касательную (рис. 1, б, в). Такой случай соответствует так называемым «гладким» (или касательным) бифуркациям [1, 7], когда две кривые равновесий касаются друг друга в точке бифуркации или при касании образуют точку возврата. Гладкие бифуркации сравнительно редко встречаются в задачах устойчивости равновесия упругих систем.

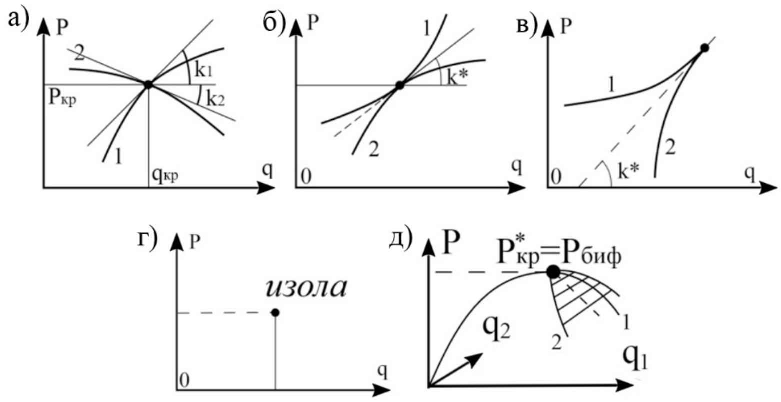

Рис. 1. Типы бифуркационных особенностей: а) бифуркация в результате пересечения двух траекторий равновесий; б, в) касательные бифуркации; г) изолированная точка бифуркации; д) двукратная критическая точка «ветвление в вершине холма»

Если же в точке бифуркации дискриминант отрицательный ($D < 0$), то эта критическая точка есть изолированная точка равновесия («изола», рис. 1, г): в неё нельзя попасть путем перемещения вдоль кривых равновесия. Для консервативных упругих систем изолированные равновесия есть следствие леммы Сарда, согласно которой изолированные равновесия консервативных систем образуют множество меры нуль.

Для систем с несколькими степенями свободы исследование типа критической точки равновесия сводится к определению ранга расширенной матрицы Якоби J_p, имеющей N строк и $N+1$ столбцов.

Пусть $F\big(X(q), \lambda(q)\big) = 0$ есть система геометрически нелинейных уравнений равновесия, q – обобщенная координата (норма, параметр перемещений и т.д.), по которой строится кривая равновесных состояний $\lambda = \lambda(q)$, X - вектор перемещений, λ – параметр внешней нагрузки $P = \lambda\vec{p}$, ($\vec{p}$ - вектор «единичных» нагрузок). Расширенная матрица Якоби имеет вид:

$$J_p = \left[J; \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right] = \left[\frac{\partial F_i}{\partial X_1}, \frac{\partial F_i}{\partial X_2}, ..., \frac{\partial F_i}{\partial X_n}; \frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right], \qquad i = 1, 2, ..., N$$

В критической точке $(\lambda_{\backslash KP}, \vec{X}_{KP})$ матрица Якоби становится вырожденной $(\det J(\lambda_{\backslash KP}, \vec{X}_{KP}) = 0)$, а её ранг равен N-1 при простой (не кратной) критической нагрузке. Если и ранг расширенной матрицы J_p также равен N-1, то критическая точка есть точка бифуркации; если же среди миноров N-го порядка есть хотя бы один невырожденный, то ранг расширенной матрицы Якоби равен N, а критическая точка есть предельная точка.

Однако для многомерных упругих систем исследование типа критической точки при помощи вычисления ранга расширенной матрицы Якоби - трудно-реализуемая процедура. Более удобен энергетический подход [5 ,6]. Для этого продифференцируем по параметру q систему уравнений равновесия

$$\sum_{K=1} \frac{\partial F_i}{\partial X_k}\frac{dX_k}{dq} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dq} = 0, \text{или } \left[\frac{\partial F_i}{\partial X_1}, \frac{\partial F_i}{\partial X_2}, ..., \frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right]\left[\frac{dX}{dq}\right] + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dq} = 0.$$

В критическом равновесии у вырожденной матрицы Якоби (или матрицы касательной жесткости для конечноэлементных моделей) наименьшее из её собственных чисел равно нулю. Пусть соответствующий собственный вектор есть Δ. Тогда справедливы равенства:

$$J(\lambda_{\backslash KP},\vec{X}_{KP})\cdot\vec{\Delta}=\vec{\Delta}^T\cdot J(\lambda_{\backslash KP},\vec{X}_{KP})=0.$$

Для симметричной матрицы Якоби левый собственный вектор равен правому. С учетом этого соотношения умножим предпоследнее равенство на транспонированный собственный вектор $\vec{\Delta}^T$ слева. Получим

$$\vec{\Delta}^T\cdot\left[\frac{\partial F_i}{\partial X_1},\frac{\partial F_i}{\partial X_2},...,\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right]\left[\frac{dX}{dq}\right]+\vec{\Delta}^T\cdot\frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dq}=0.$$

Здесь первое слагаемое равно нулю в силу второго равенства из предпоследнего соотношения. Но тогда, равно нулю и второе слагаемое

$$\vec{\Delta}^T\cdot\frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dq}=0.$$

Если в этом равенстве скалярное произведение не равно нулю $(\vec{\Delta}^T\cdot\frac{\partial F}{\partial\lambda}\neq 0)$ то в ноль должна обратится производная

$$d\lambda/dq=0.$$

Из этого вытекает, что критическая точка есть точка экстремума на кривой $\lambda=\lambda(q)$ (т. е. это верхняя или нижняя предельная точка).

Второй случай возникает, когда производная $d\lambda/dq=0$ не равна нулю, а равно нулю скалярное произведение $\vec{\Delta}^T\cdot\partial\vec{F}/\partial\lambda=0$. Тогда критическая точка есть точка бифуркации. Равенство нулю скалярного произведения имеет важный энергетический смысл – работа внешних сил исходного равновесия на перемещениях, задаваемых собственной формой, соответствующей нулевому собственному значению, в точке бифуркации равна нулю [5, 6]. Если же эта работа не равна нулю $\vec{\Delta}^T\cdot\partial\vec{F}/\partial\lambda\neq 0$, то критическая точка есть предельная точка.

При одновременном равенстве нулю производной и скалярного произведения

$$d\lambda/dq=0,\qquad \vec{\Delta}^T\cdot\partial\vec{F}/\partial\lambda\neq 0.$$

критическая нагрузка двукратная: предельная точка оказывается одновременно и точкой симметричной бифуркации («ветвление в вершине холма», рис. 1, д). Такая полусимметричная точка бифуркации является одним из вариантов катастрофы гиперболической омбилики. Она возникает, например, при изменении типа критической точки, когда вместо потери устойчивости в предельной точке ,при наименьшей критической нагрузке будет потеря устойчивости в точке бифуркации [5, 10].

Как возникают точки бифуркации? Они рождаются парами, как двукратные точки бифуркации на кривой равновесий, которые затем расщепляются в две простые точки бифуркации и расходятся друг от друга вдоль упомянутой кривой. Поясним это на примере фермы Мизеса и пологой круговой арки. Для симметричной и симметрично нагруженной в узле фермы Мизеса при начальных углах наклона стержней, меньших 67°,36, потеря устойчивости может быть только и предельных точках. Это значит, что при достижении критической нагрузки в предельной точке коэффициент жесткости в узле фермы по направлению действия силы становится равным нулю. Но нулевой коэффициент жесткости – это нулевое собственное значение матрицы Якоби, которому соответствует собственный вектор, пропорциональный форме равновесия фермы в предельной точке.

При начальных углах наклона, равных 67°,36 и при нагрузке, значительно меньшей критической нагрузки в предельной точке, рождается двукратная точка бифуркации. С этого момента все, «высокие» фермы Мизеса, имеющие начальные углы наклона больше 67°,36, теряют устойчивость в точке бифуркации - простой (не кратной), симметричной и неустойчивой. При этом вторая простая точка бифуркации «движется» вдоль кривой равновесий фермы, и при начальных углах наклона, равных 69°,295 достигает предельной точки, а при дальнейшем увеличении этих углов попадает на неустойчивую («падающую») ветвь равновесий [8].

Отметим, что в точке бифуркации равновесия в ноль обращается коэффициент жесткости в узле фермы по направлению, перпендикулярному линии действия силы, а нулевому собственному значению матрицы Якоби соответствует собственный вектор, ортогональный исходной симметричной форме равновесия.

Для весьма пологих симметричных и симметрично нагруженных арок и аналогичных пологих цилиндрических оболочек, теряющих устойчивость равновесия в предельных точках, двукратная точка бифуркации рождается на неустойчивой ветви равновесий [8, 9, 5], расщепляется в две простые точки бифуркации, которые движутся друг от друга по этой ветви в противоположных направлениях по мере увеличения параметра подъемистости арки или оболочки. При некотором «граничном» значении этого параметра «верхняя» точка бифуркации достигает предельной точки. Образуется двукратная полусимметричная критическая точка («ветвление в вершине холма»). Далее точка бифуркации «проходит» предельную точку и попадает на устойчивую ветвь кривой равновесий. С этого момента, при наименьшей критической нагрузке потеря устойчивости симметричного равновесия арки (или симметричного равновесия оболочки) будет в точке бифуркации. При этом в ноль обращается собственное значение, которое определяет жесткость арки или оболочки по направлению, ортогональному к исходному симметричному равновесию.

Какой будет форма «нового» начального послекритического равновесия? Её можно представить как сумму предкритического равновесия и равновесия, определяемого собственной формой, соответствующей нулевому собственному значению. В предельной точке указанная собственная форма пропорциональна предкритической форме равновесия. Поэтому в результате прохождения предельной точки исходное равновесие не приобретает новых компонент. Качественно закритическое равновесие это то же предкритическое, но неустойчивое. Заметим, что предельную точку можно трактовать как двукратное равновесие, полученное в результате слияния двух почти одинаковых равновесий: устойчивого и неустойчивого. Превышение критической нагрузки в предельной точке приводит к исчезновению двукратного равновесия, поскольку соответствующие решения системы нелинейных уравнений равновесия становятся комплексно сопряжёнными.

В случае точки бифуркации изменение предкритического равновесия при переходе в начальное послебифуркационное равновесие реализуется в двух вариантах:

а) предкритическое равновесие пополняется новыми компонентами, которые соответствуют собственной форме «потери устойчивости». Это имеет место при бифуркации равновесия центрально сжатого стержня, бифуркации равновесия рамной системы с центрально сжатыми стойками, бифуркационной потери устойчивости плоского равновесия пластины, плоской арки и т.д. Во всех этих случаях ортогональная к предкритическому равновесию собственная форма «потери устойчивости» порождает дополнительные компоненты равновесия, которых не было в составе исходного равновесия. Так как начальное послебифуркационное равновесие есть сумма предкритического равновесия и указанных дополнительных компонентов, то «новое» начальное послебифуркационное равновесие оказывается материально более полным по сравнению с предкритическим равновесием.

б) предкритическое равновесие в результате бифуркационного пересечения не получает новых компонентов. Добавляются те же компоненты, что и в указанном равновесии, но распределенные по другому (энергетически ортогонально по отношению к предкритическому равновесию). По сравнению с вариантом а) здесь понятие «пополнение исходного равновесия» приобретает несколько другой смысловой оттенок. Пример - симметричное предкритическое равновесие арки при прохождении точки бифуркации суммируется с кососимметричными компонентами равновесия, порожденными соответсвующей кососимметричной собственной формой. В результате начальное (!!) послебифуркационное равновесие арки оказывается несимметричным, и, в определенном смысле, более полным (устойчивым или неустойчивым). Осесимметричное равновесие пологой оболочки вращения положительной гауссовой кривизны под действием сосредоточенной силы, приложенной в её вершине, в результате бифуркационной потери устойчивости переходит в квазициклически симметричное равновесие. Это закритическое равновесие есть сумма исходного осесимметричного моментного равновесия и циклически симметричных компонент, создаваемых собственной формой «потери устойчивости».

Отметим, что вариант б) может иметь место и в случае несимметричного предкритического равновесия, когда на первый взгляд оно представляется достаточно «полным», новых компонент для этого равновесия нет, и ожидаемая потеря устойчивости может быть только в предельной точке. Действительно, во многих случаях несимметричное равновесие «общего вида» теряет устойчивость в предельной точке, поскольку собственная форма «потери устойчивости» оказывается пропорциональной форме предкритического равновесия. Но в общем случае это не так.

В качестве примера рассмотрим бифуркацию исходного равновесия симметричной круговой арки (угол раствора - 20° длина дуги 100 см, поперечное сечение – прямоугольное шириной 4 см и высотой 1 см). Арка нагружена двумя несимметрично приложенными и неодинаковыми вертикальными силами, отстоящими от опор на 25 см и 15 см (рис. 2 а, в). Пусть правая сила $P_2=1{,}2351P_1$. Критическое значение левой силы равно 4664 Н, правой – 5760,5 Н. Предкритическая форма несимметричного равновесия при нагрузках, равных 4560 Н и 5632,1 Н, и соответствующая этим нагрузкам двузначная собственная форма, показаны на рис. 2, *а, б*. Из этого рисунка видно, что соотношение между перемещениями под силами, взятыми из этой первой собственной формы, есть отрицательная величина, обратная соотношению между силами (рис. 2, *б*). Но тогда работа внешних сил в состоянии критического равновесия на указанных перемещениях равна нулю. Следовательно, арка теряет устойчивость докритического равновесия в точке бифуркации. «Пополнение» несимметричного предкритического равновесия такими же, но почти кососимметричными компонентами, порождёнными соответствующей собственной формой, лишь несколько «подправляет» несимметричное предкритическое равновесие, но не добавляет к нему никаких новых компонент.

При других соотношениях между этими нагрузками, (например $P_2=0{,}8P_1$) исходное равновесие арки также несимметричное, но здесь соотношение энергетической ортогональности между исходным равновесием (рис. 2, в) и соответствующей ему предкритической собственной формой (рис. 2, г) не выполняется, так как эта форма почти повторяет указанное равновесие. Поэтому потеря устойчивости арки будет в предельной точке.

Отметим, что для определения типа критической точки с помощью собственной формы в предкритическом равновесии необходимо вычислять эту форму при нагрузке, практически совпадающей с критической (рис. 3). Так для арки с углом раствора 6°, теряющей устойчивость в предельной точке от действия сосредоточенной силы в замковом сечении, собственная форма, пропорциональная форме предкритического равновесия, оказалась первой лишь при нагрузке ≈0,99$P_{кр}$ (рис. 3, б).

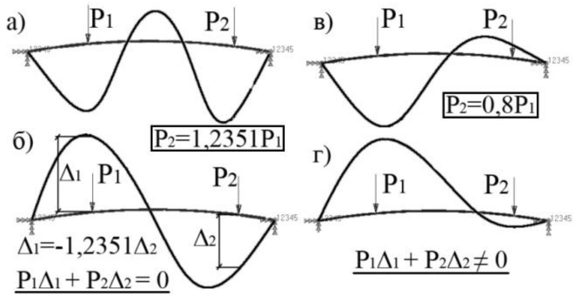

Рис. 2. Собственные формы двухшарнирных арок 20° в критическом равновесии при различных соотношениях нагрузок:
а), в) формы предкритического равновесия;
б), г) первые собственные формы в критическом равновесии.

При меньших нагрузках первая собственная форма была ортогональна предкритическому равновесию арки (рис. 3, в), что ошибочно указывало на бифуркационный характер ожидаемой потери устойчивости.

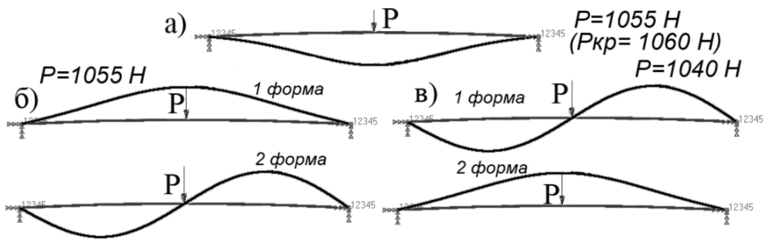

Рис. 3. Собственные формы двухшарнирных арок 6° в предкритическом и критическом равновесии: а) форма арки в предкритическом равновесии (P = 1055 Н); б) две первые собственные формы при нагрузке $P = 0{,}9953P_{кр}$, в) две первые собственные формы при нагрузке $P = 0{,}9811P_{кр}$.

Упомянутая арка 6° действительно теряет устойчивость в предельной точке, поскольку постановка в замковом сечении горизонтальной связи не изменила значения вычисленной критической нагрузки.

В заключение отметим, что предкритическое равновесие считается полным, если среди собственных форм матрицы Якоби (для этого равновесия) нет ни одной формы, энергетически ортогональной этому равновесию. В этом случае никаких вариантов пополнения предкритического равновесия нет, и оно может потерять устойчивость только в предельной точке. Если же среди упомянутых собственных форм имеется конечное число m собственных форм, энергетически ортогональных предкритическому равновесию ($m < N$, N – размерность матрицы Якоби), то оно считается неполным и возможна потеря устойчивости как в точке бифуркации, так и в предельной точке. Каким будет сценарий потери устойчивости зависит от того, какой из коэффициентов жесткости (собственных значений) первым обратится в ноль при наименьшей критической нагрузке.

Л и т е р а т у р а

1. *Иосс Ж, Джозеф Д.* Экспериментальная теория устойчивости и бифуркаций. - М.: Мир, 1983. – 300 с.

2. *Huseyin K.* The elastic stability of structural systems with independent loading parameters // Int. J. Solids Structures. – 1970. – Vol. 6. – P. 677-691.

3. *Huseyin K.* The convexity of the stability boundary of symmetric structural systems// Acta mechanica. – 1969. – Vol. 8. – P. 205-211.

4. *Мануйлов Г.А., Жуков К.А., Косицын С.Б.* Метод «неособенных продолжений» в задачах устойчивости нелинейно деформируемых упругих систем // Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. – № 5. – С. 68-72

5. *Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.* Исследование устойчивости круговых двухшарнирных арок с учетом влияния начальных несовершенств // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. –№ 1. – С. 17 – 23.

6. *Galishnikova V., Dunaiski P., Pahl P.J.* Geometrically nonlinear analysis of plane trusses and frames. – Sun press. – 2009, 382 p.

7. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука. – 1999. – 250 с.

8. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1. – М.: СКАД СОФТ, 2007. – 670 с.

9. *Ворович И.И., Яценко М.Н.* Об одной форме потери устойчивости цилиндрической панели // В сб. «Теория оболочек и пластин». Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ростов-Дон 1971. – М.: Наука, 1973. – 798 с.

10. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

R e f e r e n c e s

1. *Ioss, Zh,, Dzhozef, D.* (1983). *Eksperimentalnaya Teoriya Ustoychivosti I Bifurkatsy*. Moscow: Mir, 300 p.

2. *Huseyin, K.* (1970). The elastic stability of structural systems with independent loading parameters. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, p. 677-691.

3. *Huseyin, K.* (1969). The convexity of the stability boundary of symmetric structural systems. *Acta Mechanica,* 8, p. 205-211.

4. *Manuylov, G.A., Zhukov, K.A., Kositsyn, S.B.* (1989). Metod «neosobennykh prodolzheny» v zadachakh ustoychivosti nelineyno deformiruyemykh uprugikh sistem. *Stroitelnaya Mekhanika i Raschet Sooruzheny*, №5, p. 68-72

5. *Manuylov, G.A., Kositsyn, S.B., Begichev, M.M.* (2009). Issledovaniye ustoychivosti krugovykh dvukhsharnirnykh arok s uchetom vliyaniya nachalnykh nesovershenstv. *Stroitelnaya Mekhanika i Raschet Sooruzheny,* № 1, p. 17 – 23.

6. *Galishnikova, V., Dunaiski P., Pahl, P.J.* (2009). *Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames*. Sun press, 382 p.

7. *Grigolyuk, E.I., Shalashilin, V.I.* (1999). *Problemy Nelineynogo Deformirovaniya*. Moscow: Nauka, 250 p.

8. *Perelmuter, A.V., Slivker, V.I.* (2007). *Ustoychivost Ravnovesiya Konstruktsy i Rodstvennye Problemy*. Vol. 1, Moscow: SKAD SOFT, 670 p.

9. *Vorovich, I.I., Yatsenko, M.N.* (1973). Ob odnoy forme poteri ustoychivosti tsilindricheskoy paneli. *«Teoriya obolochek i plastin». Trudy VIII Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin*, Rostov-Don, 1971, Moscow: Nauka, 798 p.

10. *Tompson, Dzh.M.T.* (1985). *Neustoychivosti i Katastrofy v Nauke i Tekhnike*, Moscow: Mir, 254 p.

CRITICAL AND POSTCRITICAL EQUILIBRIA IN STABILITY PROBLEMS OF ELASTIC SYSTEMS

Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Begichev M.M.
MGUPS (MIIT), Moscow

The article deals with some signs of differences of critical points (limit point or bifurcation point). The features bifurcation points movement on the equilibrium curve are discussed. Origination of bifurcations are shown.

KEY WORDS: stability equilibrium, bifurcation, limit point.