

## Динамика конструкций и сооружений

### ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ НА ДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Г.Л. КОЛМОГОРОВ, доктор технических наук, профессор,

В.И. КЫЧКИН, кандидат технических наук, доцент,

И.А. ЕСИПЕНКО, аспирант

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».*

*614990, г. Пермь – ГСП, Комсомольский проспект, д. 29, каф. «Динамика и прочность машин», esipenkoivan@gmail.com*

*Рассмотрена задача о динамическом равновесии дорожной одежды при воздействии движущейся нагрузки с использованием соотношений плоского деформированного состояния вязкоупругого твердого тела, опирающегося на вязкоупругое основание. С использованием метода конечных разностей разработаны экономичные разрешающие соотношения для численной реализации поставленной задачи. Предложен подход анализа в частотном диапазоне. Показаны зависимости амплитуды перемещений дорожного покрытия от скорости движущейся нагрузки при различных значениях коэффициента постели. Установлена оптимальная скорость движения нагрузки.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** дорожная одежда, метод конечных разностей, амплитудно-частотная характеристика, амплитуда перемещений, скорость движущейся нагрузки, коэффициент постели, оптимальная скорость.

#### **Введение**

Одной из важнейших задач дорожной отрасли является совершенствование методов расчета дорожных одежд, связанных с введением в математические модели различных параметров, как для материалов дорожной одежды, так и для действующих нагрузок. Применение моделей пластичности и ползучести материалов позволяют более детально описать накопление деформаций, старение материала и учитывать их в прочностном анализе дорожной конструкции. Введение температуры и влажности позволяет оценивать влияние климатических факторов на параметры материала и прочностные характеристики в целом. Использование уравнений движения и задание внешних временных нагрузок позволяет оценить реакцию дорожной одежды на динамическое возмущение.

Многочисленные теоретические и экспериментальные материалы, полученные и представленные в трудах российских и зарубежных научных школ говорят о том, что при проезде автотранспортных средств в дорожной конструкции возникает колебательное движение [1-13]. Автотранспортное средство (АТС) при прохождении расчетного сечения вызывает вынужденные колебания в дорожной конструкции, а после прохождения возникают свободные затухающие колебания. За время протекания обоих процессов создаются знакопеременные вертикальные перемещения дорожной одежды, амплитуды которых представляют интерес для авторов статьи.

Цель работы: Оценить влияние скорости движущейся нагрузки от транспортного средства на амплитуду собственных колебаний автомобильной дороги.

#### **Математическая постановка задачи**

Рассмотрим поперечное сечение дорожной конструкции (Рис.1). Асфальтобетонное покрытие будем моделировать в виде твердого тела, используя гипотезу о плоском деформированном состоянии [14]. Реальную характеристику материала покрытия заменим эквивалентной вязкоупругой (демпфирующей)

моделью. Основание представим в виде вязкоупругой (демпфирующей) реакции.

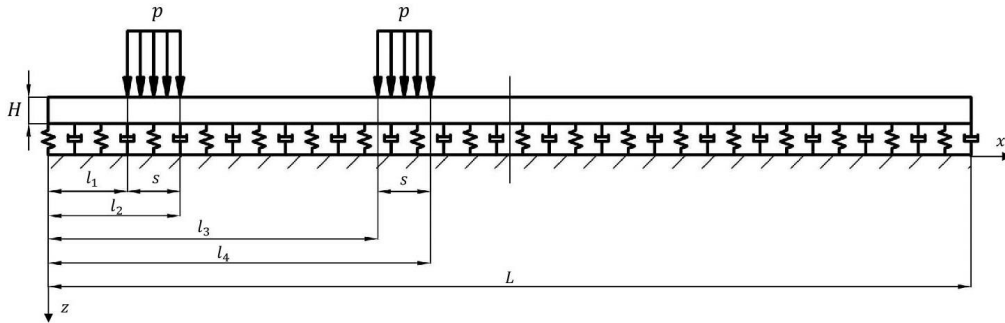


Рис. 1

Уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = x, z. \quad (1)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Физические соотношения:

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} + \eta \dot{\varepsilon}_{ij}) + \lambda(\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \eta \delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}). \quad (3)$$

Здесь обозначено:  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – тензоры напряжений и малых деформаций,  $u_i$  – перемещения вдоль координатных осей,  $\rho$  – плотность материала,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\eta$  – коэффициент демпфирования,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, точкой обозначена производная по времени.

Подставим геометрические соотношения (2) в физические (3), затем в уравнения движения (1), получим:

$$\mu(\nabla^2 u_i + \eta \nabla^2 \dot{u}_i) + (\lambda + \mu)(u_{j,ji} + \eta \dot{u}_{j,ji}) = \rho \ddot{u}_i. \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=0} &= 0; \quad \sigma_{zx}|_{x=0} = 0; \\ \sigma_{xx}|_{x=D} &= 0; \quad \sigma_{zx}|_{x=D} = 0; \\ u_x|_{z=H} &= 0; \quad \sigma_{zz}|_{z=H} = k(u_z + \xi \cdot \dot{u}_z); \\ \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0; \quad \sigma_{zz}|_{x \in (0;l_1) \cup (l_2;l_3) \cup (l_4;L)} = 0; \quad \sigma_{zz}|_{x \in (l_1;l_2) \cup (l_3;l_4)} = p. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначено:  $k$  – жесткость основания (коэффициент постели),  $\xi$  – коэффициент демпфирования,  $p$  – нагрузка.

Начальные условия:

$$u_x|_{t=0} = 0; \quad u_z|_{t=0} = 0; \quad (6)$$

$$\dot{u}_x|_{t=0} = 0; \quad \dot{u}_z|_{t=0} = 0.$$

Движение колеса будет моделировать движущаяся нагрузка:

$$p = \begin{cases} \frac{p_{max}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}. \quad (7)$$

Иллюстрация движущейся нагрузки приведена на рис. 2.

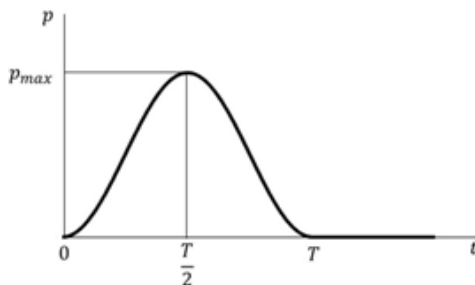


Рис. 2

#### Разрешающие соотношения

Решение системы дифференциальных уравнений (4) при заданных граничных (5) и начальных (6) условиях, с учетом движущейся нагрузки (7), выполним с помощью численного метода конечных разностей.

Представим реализацию разностной схемы в три этапа [15]. На первом этапе заменяем область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения. На втором этапе заменяем дифференциальные операторы разностными. На третьем этапе сформулируем разностный аналог для граничных условий и для начальных данных. Для удобства заменяем обозначения  $u_x = u$ ,  $u_z = w$ . Координатную плоскость представим сеткой с шагом  $h_x = h_z = h$ . Шаг по времени принимаем  $\tau$  (рис. 3).

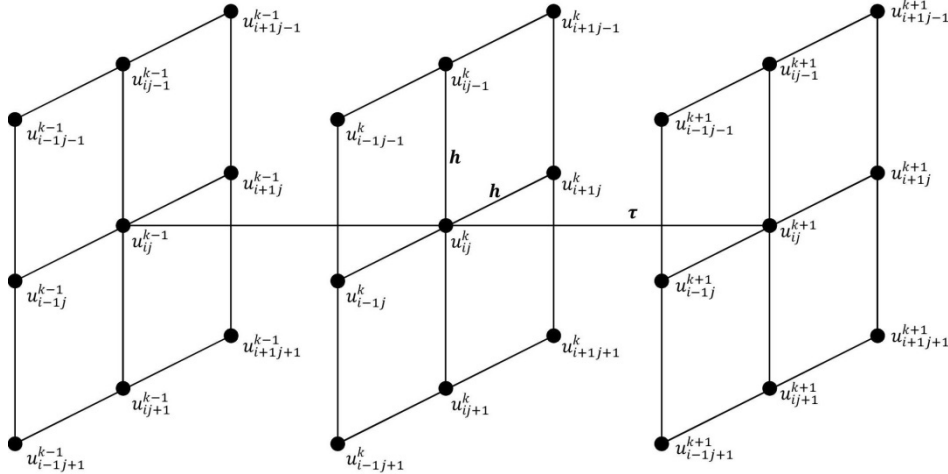


Рис.3

Рекуррентные соотношения для внутренних и граничных узлов [16, 17]:

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{k+1} = & 2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1} + \frac{(1+A_\eta)\tau^2(\lambda+2\mu)[u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k]}{\rho h^2} + \\
 & \frac{(1+A_\eta)\tau^2(\lambda+\mu)[w_{i+1j+1}^k + w_{i-1j-1}^k - w_{i+1j-1}^k - w_{i-1j+1}^k]}{4\rho h^2} + \frac{(1+A_\eta)\tau^2\mu[u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k]}{\rho h^2} - \\
 & \frac{A_\eta\tau^2(\lambda+2\mu)[u_{i+1j}^{k-1} - 2u_{ij}^{k-1} + u_{i-1j}^{k-1}]}{\rho h^2} - \frac{A_\eta\tau^2(\lambda+\mu)[w_{i+1j+1}^{k-1} + w_{i-1j-1}^{k-1} - w_{i+1j-1}^{k-1} - w_{i-1j+1}^{k-1}]}{4\rho h^2} - \\
 & \frac{A_\eta\tau^2\mu[u_{ij+1}^{k-1} - 2u_{ij}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1}]}{\rho h^2} ; \\
 w_{ij}^{k+1} = & 2w_{ij}^k - w_{ij}^{k-1} + \frac{(1+A_\eta)\tau^2(\lambda+2\mu)[w_{ij+1}^k - 2w_{ij}^k + w_{ij-1}^k]}{\rho h^2} + \\
 & \frac{(1+A_\eta)\tau^2(\lambda+\mu)[u_{i+1j+1}^k + u_{i-1j-1}^k - u_{i+1j-1}^k - u_{i-1j+1}^k]}{4\rho h^2} + \frac{(1+A_\eta)\tau^2\mu[w_{i+1j}^k - 2w_{ij}^k + w_{i-1j}^k]}{\rho h^2} - \\
 & \frac{A_\eta\tau^2(\lambda+2\mu)[w_{ij+1}^{k-1} - 2w_{ij}^{k-1} + w_{ij-1}^{k-1}]}{\rho h^2} - \frac{A_\eta\tau^2(\lambda+\mu)[u_{i+1j+1}^{k-1} + u_{i-1j-1}^{k-1} - u_{i+1j-1}^{k-1} - u_{i-1j+1}^{k-1}]}{4\rho h^2} - \\
 & \frac{A_\eta\tau^2\mu[w_{i+1j}^{k-1} - 2w_{ij}^{k-1} + w_{i-1j}^{k-1}]}{\rho h^2} . \\
 A_\eta = \frac{\eta}{\tau}, \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Рекуррентные соотношения (8) являются конечно-разностным аналогом уравнений (4).

Полученная схема устойчива при выполнении условия:

$$\tau \leq \sqrt{\eta^2 + \frac{\rho h^2}{(\lambda+3\mu)}} - \eta. \tag{9}$$

Для удовлетворения граничных условий введем законтурные узлы, для которых запишем конечно-разностный аналог граничных условий.

Для края  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u_{i-1j}^{k+1} &= u_{ij}^{k+1} + \frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu)} [w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij-1}^{k+1}] ; \\ w_{i-1j}^{k+1} &= w_{ij}^{k+1} + \frac{1}{4} [u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для края  $x = D$ :

$$\begin{aligned} u_{i+1j}^{k+1} &= u_{ij}^{k+1} - \frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu)} [w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij-1}^{k+1}] ; \\ w_{i+1j}^{k+1} &= w_{ij}^{k+1} - \frac{1}{4} [u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для края  $z = H$ :

$$\begin{aligned} u_{ij+1}^{k+1} &= 0 ; \\ w_{ij+1}^{k+1} &= \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu+hk(1+A\xi)} w_{ij}^{k+1} - \frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu+hk(1+A\xi))} [u_{i+1j}^{k+1} - u_{i+1j}^{k+1}] + \\ &\quad \frac{hk(1+A\xi)}{\lambda+2\mu+hk(1+A\xi)} w_{ij+1}^{k+1}; \quad \text{где } A\xi = \frac{\xi}{\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для края  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} u_{ij-1}^{k+1} &= u_{ij}^{k+1} + \frac{1}{4} [w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^{k+1}] ; \\ w_{ij-1}^{k+1} &= w_{ij}^{k+1} - \frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu)} [u_{i+1j}^{k+1} - u_{i+1j}^{k+1}], \quad x \in (0; l_1) \cup (l_2; l_3) \cup (l_4; L); \\ w_{ij-1}^{k+1} &= w_{ij}^{k+1} - \frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu)} [u_{i+1j}^{k+1} - u_{i+1j}^{k+1}] + \frac{h}{(\lambda+2\mu)} \frac{p_{max}}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi k\tau}{T}\right), \\ &\quad x \in (l_1; l_2) \cup (l_3; l_4). \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия:

$$u_{ij}^{k-1} = 0; \quad w_{ij}^{k-1} = 0; \quad u_{ij}^k = 0; \quad w_{ij}^k = 0. \quad (14)$$

#### Реализация вычислительного эксперимента

В качестве вычислительного эксперимента была принята дорожная одежда с параметрами: геометрические характеристики  $L = 7$  м,  $H = 0,2$  м,  $l_1 = 0,6$  м,  $l_2 = 1$  м,  $l_3 = 2,5$  м,  $l_4 = 2,9$  м; шаг по координате  $h = 0,1$  м; шаг по времени  $\tau = 10^{-4}$  с; нагрузка  $p_{max} = 0,6$  МПа; время действия нагрузки  $T = 0,05$  с; физико-механические  $E = 200$  МПа,  $\mu = 0,3$ ,  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\eta = 2 \cdot 10^{-4}$  с,  $k = 10$  МПа/м,  $\xi = 2 \cdot 10^{-4}$  с.

Результаты реализации представлены на рисунках 4 – 6. На рис. 4 показано вертикальное перемещение  $w|_{z=0}$  в момент времени  $t = 0,02$  с. Из рисунка видно, что максимальное перемещение в месте приложения нагрузки.

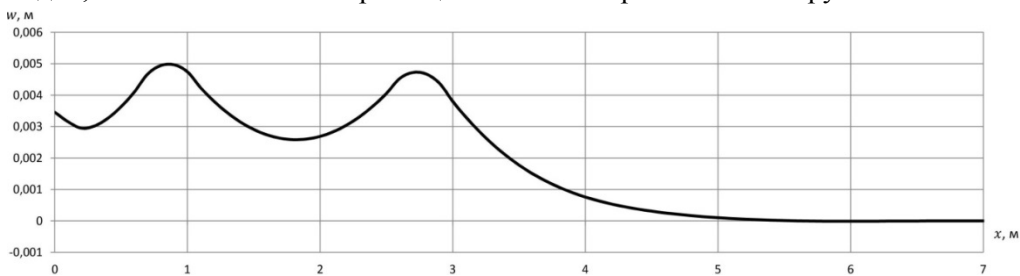


Рис. 4

На рис. 5 показана амплитудно-временная характеристика (АВХ) вертикального перемещения в точке  $w|_{x=l_1+\frac{s}{2}}|_{z=0}$ . На рисунке отчетливо виден отклик конструкции дороги на движущуюся нагрузку в интервале от 0 до 0,05 с, затем следует режим свободных затухающих колебаний.

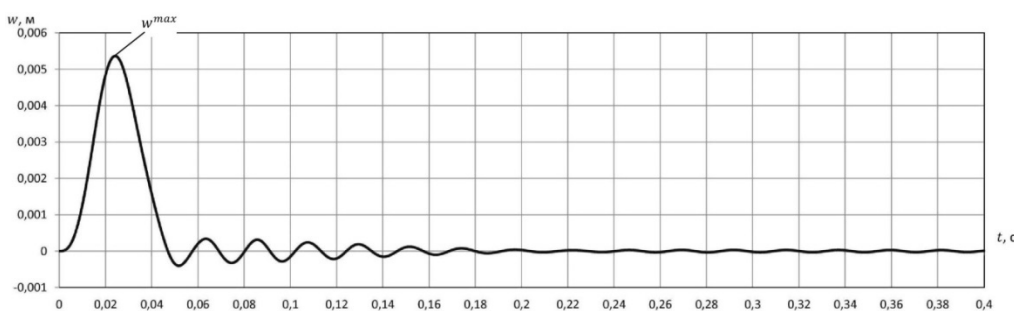


Рис. 5

На рис. 6 показана амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) вертикального перемещения в расчетной точке.

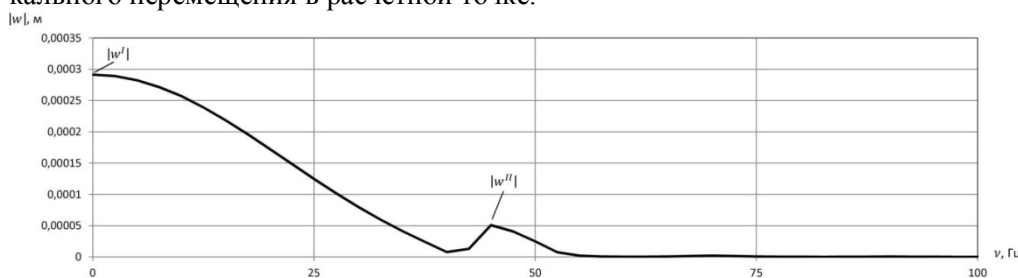


Рис. 6

Из рисунка видно, что  $|w^I|$  – амплитуда перемещений от вынужденных колебаний (от действия нагрузки),  $|w^{II}|$  – амплитуда перемещений по первой форме от собственных колебаний.

### Учет скорости движения АТС

На рис. 7 представлена модель движения колеса.

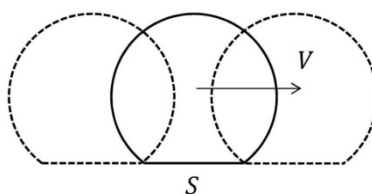


Рис. 7

Время действия нагрузки на поперечное сечение:

$$T = S/V, \tag{15}$$

где  $S$  – длина пятна контакта,  $V$  – скорость АТС.

В таблице приведены скорость АТС и время прохождения колеса через расчетное сечение. Длина пятна контакта  $S = 0,4$  м.

Таблица

$V$ , км/ч	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$T$ , мс	36,0	28,8	24,0	20,6	18,0	16,0	14,4	13,1	12,0	11,1

На рис. 8 показаны амплитуды перемещений от действия нагрузки  $|w^I|$  в зависимости от скорости АТС при различных значениях коэффициента постели без демпфирования в расчетной точке. С ростом скорости движущейся нагрузки амплитуды перемещений падают. Увеличение коэффициента постели приводит к снижению амплитуды вертикального перемещения.

На рис. 9 показаны амплитуды перемещений от свободных колебаний  $|w^{II}|$  в зависимости от скорости АТС при различных значениях коэффициента постели.

ли без демпфирования в расчетной точке. С ростом скорости амплитуды возрастают. Увеличение коэффициента постели приводит к снижению амплитуды вертикального перемещения.

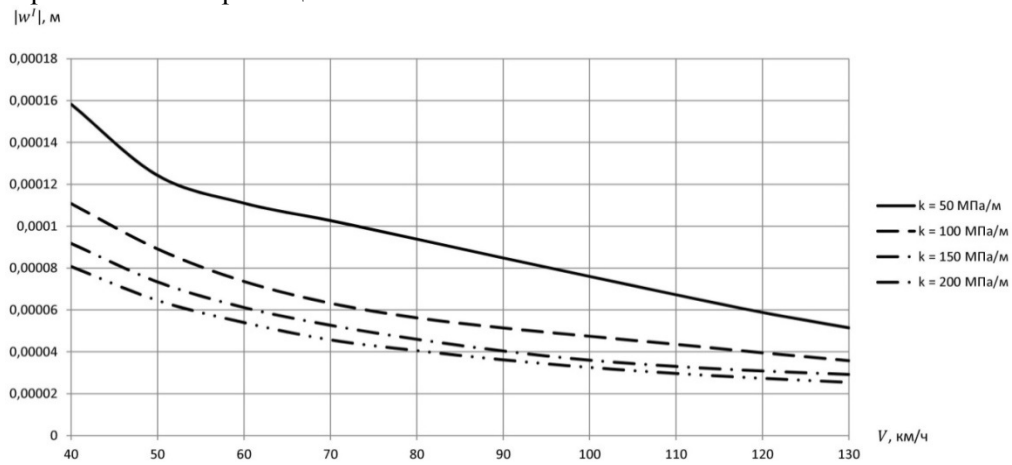


Рис. 8

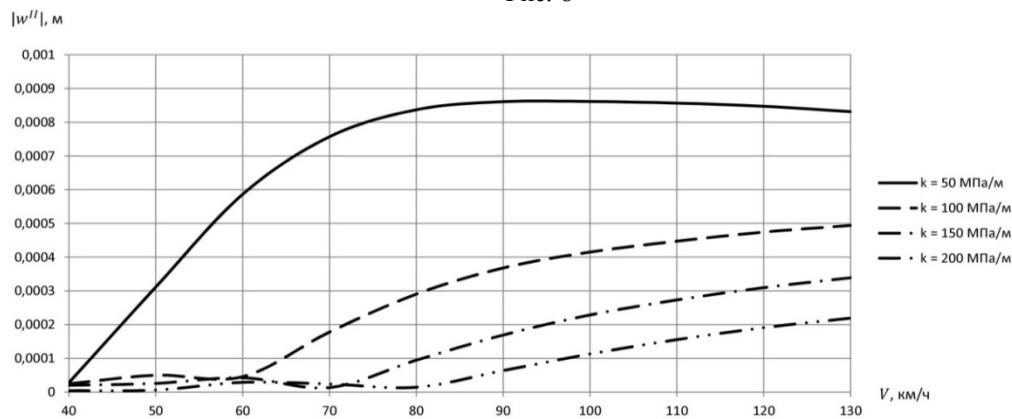


Рис. 9

На рис. 10 показаны отношение перемещений  $w^{II}/w^I$  в зависимости от скорости АТС без демпфирования в расчетной точке. Из рисунка можно получить информацию о том, при какой скорости движения АТС амплитуда перемещений от свободных колебаний начнет превышать амплитуду перемещений от вынужденных колебаний. Скорость, при которой  $w^{II}/w^I = 1$  назовем оптимальной.

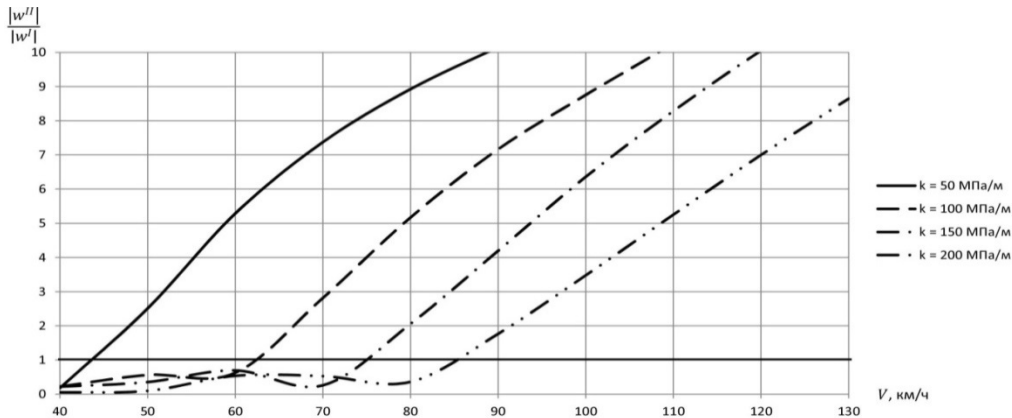


Рис. 10

На рис. 11 показаны амплитуды перемещений  $|w^{II}|$  в зависимости от скорости АТС для грунтов средней плотности без демпфирования в расчетной точке.

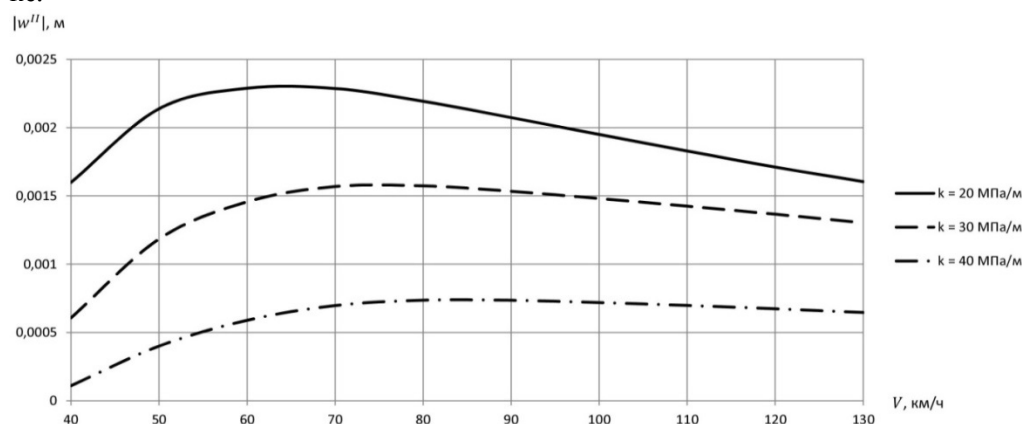


Рис.11

Из рисунка видно, что существуют критические скорости, при которых возникают максимальные амплитуды перемещений от свободных колебаний. Амплитуды  $|w^{II}|$  растут с увеличением скорости до момента совпадения периода собственных колебаний с периодом вынужденных колебаний  $T^{II} = T^I$  (явление резонанса), после чего амплитуды убывают.

#### Выводы

– Вязкоупругие модели асфальтобетона и основания позволили учесть их диссипативные свойства. Дальнейшее использование определяющих соотношений позволит решить широкий класс задач, связанный с оптимальным демпфированием конструкции автомобильной дороги.

– Частотное представление позволило выявить две характерные амплитуды перемещений: от действия нагрузки и от свободных колебаний.

– Увеличение скорости транспортного средства ведет к снижению амплитуды перемещений от вынужденных колебаний и к увеличению амплитуды перемещений от собственных колебаний дорожной конструкции.

– Получены оптимальные скорости движения транспортных средств при различных значениях коэффициента основания без демпфирования.

– Показано явление резонанса в дорожной конструкции от действия движущейся нагрузки при совпадении периодов собственных и вынужденных колебаний.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Смирнов А.В.* Динамическая устойчивость и расчет дорожных конструкций / А.В.Смирнов, С.К.Илиополов, А.С.Александров.– Омск: Изд-во СибАДИ, 2003.– 188 с.
2. *Илиополов С. К., Селезнев М.Г., Углова Е.В.* Динамика дорожных конструкций: Монография – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2002. – 258 с.
3. *Смирнов, А. В.* Колебания и волны в дорожных конструкциях / А. В. Смирнов. – Омск: Издательство СибАДИ, 2006. – 108 с.
4. *Осиновская В.А.* Разработка теории вибрационного разрушения нежестких дорожных одежд и путей повышения их долговечности. Автореф.дисс. на соиск.уч. степени д.т.н. – Москва, 2011. – 43 с.
5. *Углова, Е. В.* Теоретические и методологические основы оценки остаточного усталостного ресурса асфальтобетонных покрытий автомобильных дорог: дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук / Е. В. Углова. – Ростов-на-Дону., 2009. – 372 с.
6. *Kwan A.K.H., Ng P.L.* Effects of traffic vibration on curing concrete stitch: Part I – test method and control program // *Engineering Structures*. – 2007. – Vol. 29. – P. 2871–2880.

7. *LIU Xiao-yun, SHI Chun-juan* Random Characteristics and Reliability Analysis of Asphalt Pavement Under Vehicle Random Load // *China Journal of Highway and Transport*. – 2012. – № 6. – P. 49–55.
8. *Матуа В.П., Баранова Е.М., Чирва Д.В.* Совершенствование методов проектирования нежестких дорожных одежд // *Вестник ХНАДУ*. – 2006. – № 34–35. – С. 23–25.
9. *Осиновская В.А.* Вопросы моделирования колебаний нежестких дорожных одежд // *Наука и техника в дорожной отрасли*. – 2012. – № 4. – С. 26–28.
10. *Осиновская В.А.* Методика проектирования нежестких дорожных одежд при учете вибрационного нагружения // *Интернет-журнал «Наукоедение»*. – 2012. – № 4. – С. 1–4.
11. *Осиновская В.А.* Обоснование величины расчетной скорости движения автомобилей при проектировании нежестких дорожных одежд с учетом вибрационного нагружения // *Известия КГАСУ*. – 2011. – № 3 (17). – С. 179–183.
12. *Короочкин А.В.* Изучение воздействия движущегося транспортного средства на конструкцию дорожной одежды // *Строительные материалы*. – 2011. – № 1. – С. 28–29.
13. *Короочкин А.В.* Расчет жесткой дорожной одежды с учетом воздействия движущегося транспортного средства // *Наука и техника в дорожной отрасли*. – 2011. – № 2. – С. 8–10.
14. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
15. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
16. *Колмогоров Г.Л., Кычкин В.И., Есипенко И.А.* Метод конечных разностей в исследовании дорожных одежд при воздействии реальной транспортной нагрузки // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2014. – № 1. – С. 69–77.
17. *Есипенко И.А., Колмогоров Г.Л., Кычкин В.И.* Численное моделирование колебаний дорожной одежды с учетом изменения приведенных физико-механических свойств материала // *Транспорт. Транспортные сооружения. Экология*. – 2014. – № 3. – С. 57–73.

#### References

1. *Smirnov, A.V., Iliopolov, S.K., Aleksandrov, A.S.* (2003). *Dinamicheskaya Ustoychivost' i Raschet Dorozhnykh Konstruktsiy*. Omsk: Izd-vo SibADI, 188 p.
2. *Iliopolov, S. K., Seleznev, M.G., Uglova, E.V.* (2002). *Dinamika Dorozhnykh Konstruktsiy: Monografiya*. Rostov n/D: Rost. gos. stroit. un-t, 258 p.
3. *Smirnov, A. V.* (2006). *Kolebaniya i Volny v Dorozhnykh Konstruktsiyakh*. Omsk: Izd-vo SibADI, 108 p.
4. *Osinovskaya, V.A.* (2011). *Razrabotka teorii vibratsionnogo razrusheniya nezhestkikh dorozhnykh odezhd i putey povysheniya ih dolgovечnosti. Avtoref. diss. d.t.n.* – Moscow, 43 p.
5. *Uglova, E.V.* (2009). *Teoreticheskie i metodologicheskie osnovy otsenki ostatochnogo ustalostnogo resursa asfal'tobetonnnykh pokrytiy avtomobil'nykh dorog: Dis. na soisk. uch. step. d-ra tekhn. nauk*, Rostov-na-Donu, 372 p.
6. *Kwan, A.K.H., Ng, P.L.* (2007). Effects of traffic vibration on curing concrete stitch: Part I – test method and control program. *Engineering Structures*. Vol. 29, p. 2871–2880.
7. *LIU Xiao-yun, SHI Chun-juan* (2012). Random Characteristics and Reliability Analysis of Asphalt Pavement Under Vehicle Random Load. *China Journal of Highway and Transport*, № 6, p. 49–55.
8. *Matua, V.P., Baranova, E.M., Chirva, D.V.* (2006). Sovershenstvovanie metodov proektirovaniya nezhestkikh dorozhnykh odezhd. *Vestnik KhNADU*, № 34–35, p. 23–25.
9. *Osinovskaya, V.A.* (2012). Voprosy modelirovaniya kolebaniy nezhestkikh dorozhnykh odezhd. *Nauka i tekhnika v dorozhnoy otrasli*, № 4, p. 26–28.
10. *Osinovskaya, V.A.* (2012). Metodika proektirovaniya nezhestkikh dorozhnykh odezhd pri uchete vibratsionnogo nagruzheniya. *Internet-zhurnal «Naukovedenie»*, № 4, p. 1–4.
11. *Osinovskaya, V.A.* (2011). Obosnovanie velichiny raschetnoy skorosti dvizheniya avtomobiley pri proektirovanii nezhestkikh dorozhnykh odezhd s uchetoм vibratsionnogo nagruzheniya. *Izvestiya KGASU*, № 3 (17), p. 179–183.
12. *Korochkin, A.V.* (2011). Izuchenie vozdeystviya dvizhushchegosya transportnogo sredstva na konstruktsiyu dorozhnoy odezhdy. *Stroitel'nye materialy*, № 1, p. 28–29.
13. *Korochkin, A.V.* (2011). Raschet zhestkoy dorozhnoy odezhdy s uchetoм vozdeystviya dvizhushchegosya transportnogo sredstva. *Nauka i Tekhnika v Dorozhnoy Otrاسli*, № 2, p. 8–10.
14. *Novatskiy, V.* (1975). *Teoriya Uprugosti*. Moscow: Mir, 872 p.
15. *Samarskiy, A.A.* (1971). *Vvedenie v Teoriyu Raznostnykh Skhem*. Moscow: Nauka, 552 p.
16. *Kolmogorov, G.L., Kychkin, V.I., Esipenko, I.A.* (2014). Metod konechnykh raznostey v issledovanii dorozhnykh odezhd pri vozdeystvii real'noy transportnoy nagruzki. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 1. p. 69–77.



17. Esipenko, I.A., Kolmogorov, G.L., Kychkin, V.I. (2014). Chislennoe modelirovanie kolebaniy dorozhnoy odezhdy s uchetom izmeneniya privedennykh fiziko-mekhanicheskikh svoystv materiala. *Transport. Transportnye sooruzheniya. Ekologiya*, № 3, p. 57–73.

### **DYNAMIC RESPONSE OF PAVEMENT SUBJECTED TO MOVING LOAD**

G.L. Kolmogorov, V.I. Kychkin, I.A. Esipenko

The problem of dynamic equilibrium of the pavement under the action of moving load using ratios plane strain viscoelastic solid, resting on viscoelastic foundation is considered. By using finite difference method developed economical constitutive relation for numerical implementation of the problem. Approach to analysis in the frequency range is offered. Dependences of the road surface displacement amplitude on moving load speed for different values of foundation modulus are shown. Optimal speed of moving load is determined.

**KEY WORDS:** pavement, finite difference method, frequency response, amplitude of relocation, speed of moving loading, foundation modulus, optimum speed.

