

Расчет строительных конструкций

РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

И.Н. СТАРИШКО, канд. техн. наук, доцент, кафедра Автомобильные дороги, Вологодский государственный университет, 160000, Вологда, ул. Ленина, 15

Приводится теория расчета внецентренно сжатых железобетонных элементов в предельном состоянии по несущей способности, с учетом всех возможных напряжений в продольной арматуре от R_s до R_{sc} , вызванных различными значениями эксцентриситета e продольной силы. Методика расчета основана на совместном решении уравнений равновесия продольных сил и внутренних усилий с уравнениями равновесия изгибающих моментов. Совместное решение указанных, а также дополнительных уравнений, отражающих напряжённо-деформированное предельное состояние элементов, даёт возможность получить более высокую сходимостъ расчётной несущей способности с опытной, а также повысить долговечность и надёжность в их эксплуатации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: внецентренно-сжатые элементы, уравнения равновесия, несущая способность.

Расчет внецентренно сжатых железобетонных элементов в предельном состоянии по прочности нормальных сечений, заложенный в нормативных документах [1] и [2], действующих на территории России и некоторых других стран, включает два случая напряжений в продольной арматуре площадью A_s , расположенной с противоположной стороны от линии действия нагрузки (рис.1):

случай 1 – случай больших эксцентриситетов, при котором арматура с площадью A_s к моменту разрушения элемента окажется растянутой, и напряжение в ней σ_s достигает предельных значений равных R_s ;

случай 2 – случай малых эксцентриситетов, при котором напряжение в арматуре площадью A_s не достигает предельных значений.

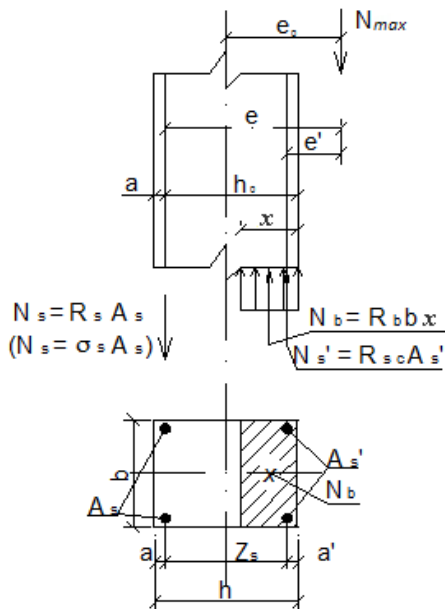


Рис.1 Расчетная схема внецентренно сжатых элементов прямоугольного сечения.

Одним из существенных недостатков указанной методики расчета является то, что при определении высоты сжатой зоны бетона x из уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий, влияние эксцентриситета продольных сил не учитывается и это же значение x используется при проверке несущей способности элементов. Это приводит к тому, что при известной площади продольной арматуры A_s и A_s' высота сжатой зоны бетона x определяемая из уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий ($N \leq N_{сеч}$) часто значительно отличается от высоты сжатой зоны бетона x определяемой из уравнения равновесия изгибающих моментов ($N \cdot e \leq M_{сеч}$) (см. ниже пример расчёта 1).

В некоторых случаях может оказаться, что при определении значения x из уравне-

ния равновесия продольных сил и внутренних усилий рассматриваемый элемент относится к расчетному случаю 2 внецентренно сжатых железобетонных элементов (случай малых эксцентриситетов), а при определении x из уравнения равновесия изгибающих моментов этот же элемент относится к расчетному случаю 1 (случай больших эксцентриситетов) (см. пример расчётов в (3)).

В действующих нормативных документах, при проверке условия $N \leq N_{сеч}$, значение $N_{сеч}$ не есть несущая способность элемента, так как значение x , для определения $N_{сеч}$ определяется в зависимости от известной внешней нагрузки N . Поэтому, по существующей в нормативных документах методике расчета, проверяя условие $N \leq N_{сеч}$, можно только сделать заключение - выдержит ли колонна заданную нагрузку, или не выдержит.

Однако, при этом неизвестно какую же максимальную нагрузку выдержит колонна, так как при другом значении внешней нагрузки N получим и другое значение x и, соответственно, другое значение $N_{сеч}$.

Несущая же способность колонны - это предельная нагрузка N_{max} , которую колонна может выдержать неограниченно долгое время без разрушения.

Если при решении задач по определению несущей способности внецентренно сжатых железобетонных элементов использовать формулы (36, 38 и 39) [1], где вместо фактической нагрузки N использовать предельную нагрузку N_{max} , т. е. несущую способность элемента, которой будет соответствовать и значение x , в предельном его состоянии, а не какое-то мнимое значение x , зависящее от N (как изложено в действующих нормативных документах), то в указанных уравнениях окажутся следующие неизвестные значения: x , σ_s , N_{max} , а также значение η (определяемое по формуле 19 [1]), но зависящее от N_{max} и $N_{сеч}$. Для определения указанных неизвестных необходимо решать кубическое уравнение при неизвестном значении x или N_{max} . После этого необходимо выполнять проверку обеспечения несущей способности элемента ($N \leq N_{max}$).

Решение кубического уравнения вместо квадратного вызвано тем, что в нижеприведенных формулах используется неизвестное значение несущей способности N_{max} вместо известной нагрузки N как в [1] и [2].

Предлагаемый в статье метод расчета носит конкретный характер, а не расчет методом проверок условий прочности, как в действующих нормативных документах, где по результатам расчета, как отмечено выше, неизвестно какую же предельную нагрузку может выдержать внецентренно сжатый элемент. Таким образом, более точное определение влияния основных факторов на несущую способность внецентренно сжатых элементов может быть получено из совместного решения ряда уравнений, отражающих их напряжено- деформированное предельное состояние.

Изложенные выше исследования явились основанием для разработки методики расчёта несущей способности внецентренно сжатых элементов состоящей из 2-х вариантов возникновения возможных напряжений в продольной арматуре площадью A_s :

вариант 1 – когда арматура с площадью A_s в предельном состоянии элемента окажется растянутой;

вариант 2 – когда арматура с площадью A_s в предельном состоянии элемента окажется сжатой.

Первый вариант в свою очередь предусматривает два случая возможных напряжений растяжения в арматуре площадью A_s :

случай 1 – когда напряжение в указанной арматуре, определяемое по формуле (1), достигает предельных значений т.е. $\sigma_s \geq R_s$ (случай больших эксцентриситетов). Здесь в расчётных формулах принимается только одно значение $\sigma_s = R_s$.

Случай 2 – когда растягивающее напряжение в арматуре находится в пределах $0 \leq \sigma_s < R_s$ (случай малых эксцентриситетов).

Второй вариант также предусматривает два случая возможных напряжений сжатия в арматуре площадью A_s :

случай 3 – когда указанная арматура окажется сжатой и напряжение в ней определяемое по формуле (1) не достигает предельных значений, т.е. $0 < |\sigma_s| = \sigma_{SC} < R_{SC}$ (случай малых эксцентриситетов);

Случай 4 – когда сжимающие напряжения в арматуре достигают предельных значений, т.е. $|\sigma_s| = \sigma_{SC} \geq R_{SC}$ (центрально-сжатые элементы со случайными эксцентриситетами). При этом в расчётных формулах принимается только одно значение $|\sigma_s| = \sigma_{SC} = R_{SC}$.

Напряжение в арматуре площадью A_s определяется по формуле:

$$\sigma_s = \left(2 \frac{1 - \xi}{1 - \xi_R} - 1 \right) R_s. \quad (1)$$

Если относительная высота сжатой зоны бетона в предельном состоянии элемента равна:

$$\xi = \xi_0 = 0,5(1 + \xi_R), \quad (2)$$

то из формулы (1) значение $\sigma_s = 0$. При этом на фактической криволинейной эпюре напряжений в бетоне сжатой зоны напряжение в бетоне на уровне центра тяжести арматуры площадью A_s также равно нулю, то есть $\xi_\phi = x_\phi / h_0 = 1$. Из формулы (2) высота сжатой зоны бетона при условной прямоугольной эпюре напряжений равна:

$$x_0 = 0,5h_0(1 + \xi_R), \quad (3)$$

или же из формулы (3) значение $x_0 = \xi_0 h_0$.

Таким образом, если значение $\xi \leq \xi_0$, где значение ξ_0 определяется по формуле (2), или же если значение σ_s в арматуре с площадью A_s в предельном состоянии элемента, определяемое по формуле (1), окажется положительным – указанная арматура перед разрушением элемента окажется растянутой, при этом имеем вариант 1 расчета внецентренно сжатых элементов. И наоборот, если значение $\xi > \xi_0$, или же если по формуле (1) окажется, что $\sigma_s < 0$ (отрицательное число) арматура с площадью A_s окажется сжатой, при этом имеем вариант 2 расчета внецентренно сжатых элементов.

В расчетных формулах внецентренно-сжатых элементов напряжение в продольной арматуре площадью A_s принимается не более расчетного сопротивления растяжению, т.е. $\sigma_s \leq R_s$, а так же не более расчетного сопротивления сжатию т.е. $|\sigma_s| = \sigma_{SC} \leq R_{SC}$.

При решении практических задач по определению несущей способности или по определению площади поперечного сечения продольной арматуры внецентренно сжатых элементов, необходимо установить к какому расчетному варианту и случаю внецентренного сжатия относится решаемая задача.

В начале расчета для определения σ_s по формуле (1) значение ξ неизвестно. Поэтому, на основании обработки значительного количества опытных результатов, расчетный вариант и случай ориентировочно, в первом приближении, устанавливается по значению эксцентриситета продольной силы $e_0 \eta$, что будет уточняться в каждом примере по ходу его решения. При этом значение η , также предварительно, определяем в зависимости от фактически приложенной нагрузки N и условной критической силы N_{cr} аналогично как в [1] или [2].

1. Если значение $e_0\eta > 0,3h_0$ - имеем случай расчета 1-случай больших эксцентриситетов, при этом в предельном состоянии элемента напряжение σ_s в арматуре площадью A_s , определяемая по формуле (1), будет достигать предельных значений, то есть $\sigma_s \geq R_s$;

2. Если значение $0,17h_0 < e_0\eta \leq 0,3h_0$ - имеем случай расчета 2-случай малых эксцентриситетов. При этом напряжение растяжения в арматуре площадью A_s в предельном состоянии элемента будет находиться в пределах $0 \leq \sigma_s < R_s$;

3. Если значение $0,09h_0 < e_0\eta \leq 0,17h_0$ - имеем случай расчета 3-так же случай малых эксцентриситетов, но при этом, напряжение сжатия в арматуре площадью A_s в предельном состоянии элемента будет находиться в пределах: $-R_s < \sigma_s \leq 0$, то есть по абсолютной величине $0 \leq |\sigma_s| = \sigma_{sc} < R_{sc}$.

4. Если значение $e_0\eta \leq 0,09h_0$ - имеем случай расчета 4-при этом расчет необходимо выполнять как для внецентренно сжатых элементов со случайными эксцентриситетами, принимая $|\sigma_s| = \sigma_{sc} = R_{sc}$.

Если условная критическая сила N_{cr} определяется в соответствии с [2 – Пособие к СП – 52 – 101 – 2003], выше указанные в пунктах 1-4 границы для определения расчетного случая внецентренного сжатия элементов, рекомендуется несколько увеличить до значений приведенных в [4].

Вышеуказанные границы значений эксцентриситета продольных сил $e_0\eta$, влияющие на границы возможных напряжений в продольной арматуре в предельном состоянии элементов зависят от многих факторов и могут незначительно изменяться, поэтому в дальнейших исследованиях возможно их уточнение.

Для определения высоты сжатой зоны бетона x в предельном состоянии внецентренно сжатых элементов прямоугольных сечений, как с симметричной, так и несимметричной арматурой, с учетом влияния основных факторов, в расчетах любых вариантов и случаев внецентренного сжатия, вначале используем уравнение равновесия изгибающих моментов от внешней нагрузки и внутренних усилий:

$$N_{\max} \cdot e \leq R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a'), \quad (4)$$

где e – эксцентриситет продольной силы N_{\max} относительно центра тяжести площади арматуры A_s с учетом коэффициента увеличения прогиба η в гибких внецентренно сжатых элементах, который определяется по формуле:

$$e = e_0\eta + \frac{h}{2} - a, \quad (5)$$

а значение
$$\eta = \frac{1}{1 - N_{\max} / N_{cr}}. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (6), (5) и (4) получим:

$$N_{\max} \left(\frac{N_{cr} e_0}{N_{cr} - N_{\max}} + \frac{h}{2} - a \right) \leq R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a'), \quad (7)$$

Левую и правую части формулы (7) умножая на $(N_{cr} - N_{\max})$, окончательно получим:

$$N_{\max} \cdot N_{cr} e_0 + \left(\frac{h}{2} - a \right) N_{\max} \cdot N_{cr} - \left(\frac{h}{2} - a \right) N_{\max}^2 - R_b b h_0 N_{cr} \cdot x + 0,5 R_b b N_{cr} \cdot x^2 + R_b b h_0 N_{\max} x - 0,5 R_b b N_{\max} x^2 - R_{sc} A'_s (h_0 - a') N_{cr} + R_{sc} A'_s (h_0 - a') N_{\max} = 0. \quad (8)$$

1. Определение несущей способности внецентренно-сжатых элементов по варианту 1 – случай 1 (случай больших эксцентриситетов), когда арматура с площадью A_s в предельном их состоянии растянута и выполняется условие $\xi \leq \xi_R$. При этом в дальнейших расчетах необходимо принимать $\sigma_s = R_s$.

Условие равновесия продольных сил и внутренних усилий имеет вид:

$$N_{\max} = R_b b x + R_{sc} A'_s - R_s A_s. \quad (9)$$

Подставляя значение N_{\max} из формулы (9) в формулу (8), обозначив $R_{sc} A'_s - R_s A_s = P$ и после преобразований получим:

$$x^3 - \left(h + \frac{N_{cr} - P}{R_b b} \right) x^2 - [N_{cr}(e_0 + \frac{h}{2} - a) - (h - 2a)P - h_0(N_{cr} - P) + R_{sc} A'_s (h_0 - a')] \frac{2}{R_b b} x - [N_{cr} P (e_0 + \frac{h}{2} - a) - (\frac{h}{2} - a) P^2 - R_{sc} A'_s (h_0 - a') (N_{cr} - P)] \frac{2}{R_b^2 b^2} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) можно записать в виде:

$$x^3 - b_1 x^2 - b_2 x - b_3 = 0. \quad (11)$$

После определения высоты сжатой зоны бетона x , несущую способность внецентренно-сжатого элемента по величине изгибающего момента можно определить по формуле (4), где для определения эксцентриситета e используем формулы (6) и (5).

Несущую способность элемента по величине нагрузки можно также определить, используя формулу (9), или из уравнения равновесия изгибающих моментов по формуле (7) после ее преобразования, где обозначим:

$$R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') = M_{\max}, \quad (12)$$

а значение $h/2 - a = 0,5z_s$, (см. рис. 1) получим:

$$N_{\max} \left(\frac{N_{cr} e_0}{N_{cr} - N_{\max}} + 0,5z_s \right) \leq M_{\max}, \text{ или: } N_{\max} \left(\frac{N_{cr} e_0 + (N_{cr} - N_{\max}) \cdot 0,5z_s}{N_{cr} - N_{\max}} \right) \leq M_{\max}.$$

$$\text{Так как } e_0 + 0,5z_s = e \text{ (см. рис. 1), то } N_{\max} \left(\frac{N_{cr} e - 0,5Nz_s}{N_{cr} - N_{\max}} \right) \leq M_{\max}.$$

Раскрываем скобки и после преобразований в полученном уравнении, формула (7) окончательно будет иметь вид:

$$N_{\max}^2 - \frac{M_{\max} + N_{cr} \cdot e}{0,5z_s} N_{\max} + \frac{M_{\max} N_{cr}}{0,5z_s} = 0;$$

Решая приведенное квадратное уравнение, получим формулу для определения несущей способности внецентренно-сжатого элемента:

$$N_{\max} = \frac{M_{\max} + N_{cr} \cdot e}{z_s} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{\max} + N_{cr} \cdot e}{z_s} \right)^2 - \frac{M_{\max} \cdot N_{cr}}{0,5z_s}}. \quad (13)$$

2. Определение несущей способности внецентренно сжатых элементов по варианту 1 – случай 2 (случай малых эксцентриситетов), когда арматура с площадью A_s в предельном состоянии растянута и выполняется условие

$$\xi_R < \xi \leq 0,5(1 + \xi_R).$$

При выполнении указанного условия напряжение в продольной арматуре, расположенной с противоположной стороны от линии действия нагрузки, находится в пределах $0 \leq \sigma_s < R_s$. При этом условие равновесия продольной силы и внутренних усилий в сечении элемента имеет вид:

$$N_{\max} \leq R_b b x + R_{sc} A'_s - \sigma_s A_s. \quad (14)$$

Из формулы (14) определяем высоту сжатой зоны бетона x в предельном состоянии внецентренно сжатого элемента:

$$x = \frac{N_{\max} - R_{sc} A'_s + \sigma_s A_s}{R_b b}, \quad (15)$$

где значение σ_s определяем по формуле (1)

Подставляя значение σ_s из формулы (1) в формулу (15), с учетом что $\xi = x/h_0$, получим:

$$x = \frac{N_{\max} - R_{sc} A'_s - R_s A_s}{R_b b} + \frac{2R_s A_s}{R_b b(1 - \xi_R)} - \frac{2R_s A_s x}{R_b b(1 - \xi_R)h_0}. \quad (16)$$

В формуле (16) обозначим: $\frac{2R_s A_s}{R_b b(1 - \xi_R)} = K$, (17)

тогда:
$$x = \frac{(N_{\max} - R_{sc} A'_s - R_s A_s)h_0}{R_b b(h_0 + K)} + \frac{Kh_0}{h_0 + K}. \quad (18)$$

В формуле (18) обозначим:

$$\frac{(R_{sc} A'_s + R_s A_s)h_0}{R_b b(h_0 + K)} = c, \quad (19) \quad \frac{Kh_0}{h_0 + K} = d. \quad (20)$$

Получим:
$$x = \frac{N_{\max} h_0}{R_b b(h_0 + k)} - c + d. \quad (21)$$

В формуле (21) обозначим: $\frac{h_0}{R_b b(h_0 + K)} = z$. (22)

Тогда высота сжатой зоны бетона x внецентренно-сжатых элементов, но пока без учета эксцентриситета продольных сил, из формулы (21) равна:

$$x = N_{\max} \cdot z - c + d. \quad (23)$$

Из формулы (23) определяем значение продольной силы N_{\max} :

$$N_{\max} = \frac{x}{z} - \frac{d - c}{z}, \text{ или } N_{\max} = \frac{x + c - d}{z}. \quad (24)$$

Для определения высоты сжатой зоны бетона внецентренно сжатых элементов, с учетом эксцентриситета e и коэффициента η , когда арматура с противоположной стороны от действия нагрузки N_{\max} растянута, подставим значение N_{\max} из формулы (24) в формулу (8) получим:

$$\begin{aligned} & x^3 + \left[\left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{2}{R_b b z} - N_{cr} z - 2h_0 - d + c \right] x^2 - \left[N_{cr} \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) + 2 \left(\frac{h}{2} - a \right) \cdot \frac{d - c}{z} - \right. \\ & \left. - R_b b h_0 (N_{cr} z + d - c) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') \right] \frac{2}{R_b b} x + \left[N_{cr} (d - c) \cdot \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) + \left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{(d - c)^2}{z} + \right. \\ & \left. + R_{sc} A'_s (h_0 - a') (N_{cr} z + d - c) \right] \frac{2}{R_b b} = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Окончательно формулу (25) можно записать в виде:

$$x^3 + b_1 x^2 - b_2 x + b_3 = 0, \quad (26)$$

где b_1 - в см; b_2 - в см²; b_3 - в см³.

Подставляя полученное значение x из формулы (26) в формулу (24), можно определить несущую способность внецентренно сжатого элемента по величине нагрузки с учетом всех основных факторов, влияющих на напряженно-дефор-

мированное состояние элементов, когда напряжение в арматуре площадью A_s находится в пределах $0 \leq \sigma_s < R_s$.

3. Определение несущей способности внецентренно сжатых элементов по варианту 2 – случай 3 (случай малых эксцентриситетов), когда арматура с площадью A_s в предельном их состоянии сжата и выполняется условие

$$0,5(1 + \xi_R) \leq \xi < 1.$$

При выполнении указанного условия напряжение в арматуре площадью A_s , расположенной с противоположной стороны от линии действия нагрузки σ_s , изменяется от нуля до $-R_s$, т.е. до R_{SC} .

Условие равновесия продольной силы и внутренних усилий в сечении элемента имеет вид:

$$N_{\max} = R_b b x + R_{sc} A'_s + \sigma_{sc} A_s, \quad (27)$$

Из формулы (27) получим:
$$x = \frac{N_{\max} - R_{sc} A'_s - \sigma_{sc} A_s}{R_b b}, \quad (28)$$

где σ_{SC} определяется аналогично, как и σ_s по формуле (1)

Подставляя σ_{SC} из формулы (1) в формулу (28), и выполнив преобразования аналогично, как и в пункте 2, получим:

$$x = N_{\max} \cdot z' - c' - d', \quad (29)$$

где:
$$z' = \frac{h_0}{R_b b (h_0 - K)}, \quad (30) \quad c' = \frac{(R_{sc} A'_s - R_s A_s) h_0}{R_b b (h_0 - K)}, \quad (31)$$

При симметричной продольной арматуре, когда $A_s = A'_s$, в формуле (31) значение $c' = 0$,

$$d' = \frac{K h_0}{h_0 - K}. \quad (32)$$

Из формулы (29) можно определить несущую способность внецентренно-сжатых элементов по величине нагрузки, когда арматура площадью A_s сжата:

$$N_{\max} = \frac{x + c' + d'}{z'}. \quad (33)$$

Для определения высоты сжатой зоны бетона внецентренно-сжатых элементов, с учетом эксцентриситета e и коэффициента η , подставим значение N_{\max} из формулы (33) в формулу (8) и выполнив преобразования аналогично, как и в пункте 2, окончательно получим:

$$\begin{aligned} x^3 + \left[\left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{2}{R_b b z'} - N_{cr} z' - 2h_0 + d' + c' \right] x^2 - \left[N_{cr} \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) - 2 \left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{d' + c'}{z'} - R_b b h_0 (N_{cr} z' - d' - c') + R_{sc} A'_s (h_0 - a') \right] \frac{2}{R_b b} x - \left[N_{cr} (d' + c') \cdot \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) - \left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{(d' + c')^2}{z'} - R_{sc} A'_s (h_0 - a') (N_{cr} z' - c' - d') \right] \frac{2}{R_b b} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Формулу (34) можно записать в виде:

$$x^3 + b_1 x^2 - b_2 x - b_3 = 0, \quad (35)$$

где b_1 - в см; b_2 - в см²; b_3 - в см³.

Подставляя полученное значение x из формулы (35) в формулу (33) можно определить несущую способность внецентренно сжатого элемента по величине нагрузки, с учетом эксцентриситета e и коэффициента η , а так же с учетом вели-

чины напряжения в продольной арматуре с площадью A_s равно σ_{sc} в случае, когда эта арматура в предельном состоянии элемента работает на сжатие.

4. Определение несущей способности внецентренно сжатых элементов по варианту 2 – случай 4 (центрально сжатые элементы со случайными эксцентриситетами) когда арматура с площадью A_s в предельном их состоянии сжата и выполняется условие $\xi \geq 1$, что по формуле (1) соответствует напряжению в арматуре $|\sigma_s| \geq R_s$, при этом в расчетных формулах необходимо принимать $\sigma_{sc} = R_{sc}$.

Дальнейший расчет выполняется с учетом влияния случайных эксцентриситетов.

Пример №1. Колонна с симметричной продольной арматурой.

В данном примере рассматривается вариант расчета 1 – случай 1 внецентренного сжатия колонны, когда арматура площадью A_s в предельном состоянии элемента растянута, и напряжение в ней достигает предельных значений, т.е. $\sigma_s = R_s$ (случай больших эксцентриситетов).

Данные для расчета приняты из примера 22 [2] с целью сравнения результатов, полученных по методике, изложенной в СП 52-101-2003 и по предлагаемой автором методике.

Дано: колонна среднего этажа рамного каркаса с сечением размерами $b \times h = 40 \times 50 \text{ см}$, $a = a' = 4 \text{ см}$; бетон класса В25 ($E_b = 300000 \text{ МПа}$, $R_b = 14,5 \text{ МПа}$); арматура класса А-400 ($R_s = R_{sc} = 355 \text{ МПа}$); площадь сечения $A_s = A'_s = 12,32 \text{ см}^2$ ($2\text{Ø}28$); продольная сила и изгибающие моменты в опорном сечении: от вертикальных нагрузок: всех $N_v = 650 \text{ кН}$, $M_v = 140 \text{ кНм}$, постоянных и длительных $N_l = 620 \text{ кН}$, $M_l = 130 \text{ кНм}$; от ветровых нагрузок $N_h = 50 \text{ кН}$, $M_h = 73 \text{ кНм}$; высота этажа $l = 6 \text{ м}$. Требуется определить несущую способность опорного сечения колонны.

Решение.

Для решения поставленной задачи необходимо определить общие расчетные характеристики. Рабочая высота сечения колонны равна $h_0 = h - a = 50 - 4 = 46 \text{ см}$. Расчет ведем с учетом влияния прогиба согласно п. 3.53 [2]. Поскольку рассматриваемое сечение опорное и колонна у этой опоры имеет податливую заделку, принимаем $\eta_v = 1,0$. Для вычисления коэффициента $A_s \eta_h$ принимаем согласно п. 3.56, б расчетную длину колонны равной $l_0 = 1,2l = 1,2 \cdot 6 = 7,2 \text{ м}$. При этом $\frac{l_0}{h} = \frac{7,2}{0,5} = 14,4 > 4$, т.е. учет прогиба обязателен.

Усилия от всех нагрузок равны $M = M_v + M_h = 140 + 73 = 213 \text{ кНм}$, $N = N_v + N_h = 650 + 50 = 700 \text{ кН}$. При этом $e_0 = \frac{M}{N} = \frac{213}{700} = 0,304 \text{ м} > e_a = \frac{h}{30}$, т.е. согласно п. 3.49 [2] значение момента M не корректируем.

Значения N_{cr} , η_v и η_h в соответствии с примером (22) [2] равны: $N_{cr} = 5181 \text{ кН}$, $\eta_v = 1,0$, $\eta_h = 1,156$.

Расчет в соответствии с требованиями СП 52-101-2003.

Первый вариант расчета.

Первый вариант расчета изложен в примере (22) [2], где высота сжатой зоны бетона x определена через a_n из уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий, которое для элементов с симметричной арматурой имеет вид: $N \leq R_b b x$, откуда:

$$x = \frac{N}{R_b b} = \frac{700000}{14,5(100)40} = 12,05 \text{ см}.$$

Несущая способность колонны определена из условия прочности по величине изгибающего момента относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, которое имеет вид:

$$M \leq M_{сеч} = R_b b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + \left(R_{sc} A_s' - \frac{N}{2} \right) (h_0 - a') = 14,5(100)40 \cdot 12,05 \left(46 - \frac{12,05}{2} \right) + \left[355(100)12,32 - \frac{700000}{2} \right] (46 - 4) = 31607000 \text{ Нсм}.$$

Так как условие $M = 224,4 \text{ кНм} < M_{сеч} = 316,07 \text{ кНм}$ выполняется, несущая способность сечения обеспечена, где M - изгибающий момент от внешних нагрузок относительно центра тяжести сечения, определяемый в примере (22) [2], с учетом прогиба элемента, который равен:

$$M = M_v \eta_v + M_h \eta_h = 140 \cdot 1,0 + 73 \cdot 1,156 = 224,4 \text{ кНм},$$

где момент от вертикальных нагрузок M_v с коэффициентом $\eta_v = 1,0$ составляет 62,39% от полного момента M , а момент от горизонтальных нагрузок M_h с коэффициентом $\eta_h = 1,156$ составляет 37,61% от полного момента.

При этом величина эксцентриситета продольной силы относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения колонны для N_v равна: $e_v = e_0 \eta_v = 30,4 \cdot 1,0 = 30,4 \text{ см}$; для N_h равна $e_h = e_0 \eta_h = 30,4 \cdot 1,156 = 35,1424 \text{ см}$.

Несущая способность по величине нагрузки равна:

$$N_{сеч} = \frac{M_{сеч}}{e} = \frac{0,6239 M_{сеч}}{e_v} + \frac{0,376 M_{сеч}}{e_h} = \frac{19720000}{30,4} + \frac{11887000}{35,1424} = 986936 \text{ Н} = 987 \text{ кН} > N = 700 \text{ кН}$$

т.е. несущая способность колонны обеспечена.

При этом отношение изгибающих моментов составляет

$$\frac{M_{сеч}}{M} = \frac{316,07}{224,4} = 1,41, \text{ отношение продольных сил } \frac{N_{сеч}}{N} = \frac{987}{700} = 1,41.$$

Второй вариант расчета

Определяем высоту сжатой зоны бетона из уравнения равновесия изгибающих моментов, формула (3.91) [2].

$$M \leq R_b b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + \left(R_{sc} A_s' - \frac{N}{2} \right) (h_0 - a').$$

Подставим значения:

$$22440000 \leq 14,5(100)40 \cdot 46x - 0,5 \cdot 14,5(100)40x^2 + \left[355(100)12,32 - \frac{700000}{2} \right] (46 - 4);$$

$$22440000 \leq 2668000x - 29000x^2 + 3669120;$$

$$x^2 - 92x + 645,89 = 0; x_{1,2} = 46 \pm \sqrt{2116 - 645,89}; x = 7,62 \text{ см}.$$

Так как высота сжатой зоны бетона x определена из уравнения равновесия изгибающих моментов, следовательно, несущую способность необходимо определить из уравнения равновесия продольной силы и внутренних усилий, т.е. для элементов с симметричной продольной арматурой:

$$N_{сеч} = R_b b x = 14,5(100)40 \cdot 7,62 = 441960 \text{ Н} < N = 700000 \text{ Н},$$

следовательно, несущая способность колонны не обеспечена.

Таким образом, при решении одного и того же примера по определению несущей способности колонны двумя путями, используя одни и те же формулы, оказалось, что несущая ее способность обеспечена (1-й вариант расчета), а при решении этого же примера по 2-му варианту, оказалось, что несущая способность колонны не обеспечена.

Следовательно, в расчетах внецентренно сжатых элементов при определении их несущей способности, или при определении площади продольной арматуры, необходимо

использовать совместное решение уравнения равновесия изгибающих моментов, уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий, а также дополнительных уравнений отражающих напряженно-деформированное предельное их состояние.

Расчет по предлагаемой автором методике.

Расчетный момент от действия внешних нагрузок с учетом прогиба элемента принят из примера 22 [2], который равен:

$$M = M_v \eta_v + M_h \eta_h = 140 \cdot 1,0 + 73 \cdot 1,156 = 224,4 \text{ кНм.}$$

В дальнейшем расчете для упрощения расчетных формул принимаем одно значение η для M_v и M_h , полученное по интерполяции в зависимости от $M_v \eta_v$ и $M_h \eta_h$. Для этого составим уравнение вида: $M = M_v \eta + M_h \eta = 224,4 \text{ кНм}$, откуда

$\eta = \frac{224}{140 + 73} = 1,052$. Из формулы 3.86 [2] по η определяем значение условной критической силы, которая равна:

$$N_{cr} = \frac{N \eta}{\eta - 1} = \frac{700 \cdot 1,052}{1,052 - 1} = 14162 \text{ кН.}$$

В соответствии, с п. 6.4.4 при выполнении условия:

$$e_0 \eta = 30,4 \cdot 1,052 = 31,98 \text{ см} > 0,35 h_0 = 0,35 \cdot 46 = 16,1 \text{ см,}$$

необходимо расчет выполнять по варианту 1 – случай 1 (случай больших эксцентриситетов), когда арматура с площадью A_s в предельном состоянии элемента растянута и напряжение в ней достигает предельных значений, т. е. $\sigma_s = R_s$.

Определяем значения коэффициентов b_1 и b_2 при неизвестном значении x в кубическом уравнении (11), а также свободный член уравнения b_3 :

$$b_1 = \left(h + \frac{N_{cr} - P}{R_b \cdot b} \right) = \left(50 + \frac{14162000 - 0}{14,5(100)40} \right) = 294,172 \text{ см;}$$

где $P = R_{sc} A'_s - R_s A_s = 0$ (при симметричной арматуре в колонне),

$$b_2 = \left[N_{cr} \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) - (h - 2a)P - h_0 (N_{cr} - P) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') \right] \frac{2}{R_b b} =$$

$$= \left[14162000 \left(30,4 + \frac{50}{2} - 4 \right) - (50 - 2 \cdot 4)0 - 46(14162000 - 0) + 35500 \cdot 12,32(46 - 4) \right] \times$$

$$\times \frac{2}{14,5(100)40} = (727926800 - 0 - 651452000 + 18369120) \frac{2}{14,5(100)40} = 3270,48 \text{ см}^2;$$

$$b_3 = \left[N_{cr} P \left(e_0 + \frac{h}{2} - a \right) - \left(\frac{h}{2} - a \right) P^2 - R_{sc} A'_s (h_0 - a') (N_{cr} - P) \right] \frac{2}{R_b^2 b^2} =$$

$$= 14162000 \cdot 0 \left(30,4 + \frac{50}{2} - 4 \right) - \left(\frac{50}{2} - 4 \right) 0^2 - 35500 \cdot 12,32(46 - 4)(14162000 - 0) \times$$

$$\times \frac{2}{(14,5 \cdot 100)^2 \cdot 40^2} = (0 - 0 - 260143477400000) \frac{2}{1450^2 40^2} = -154663,185 \text{ см}^3.$$

Для определения высоты сжатой зоны бетона x в предельном состоянии элемента используем кубическое уравнение (11), то есть:

$$x^3 - b_1 x^2 - b_2 x - b_3 = 0.$$

Подставляя значения b_1 , b_2 и b_3 в формулу (11) получим:

$$x^3 - 294,172 x^2 - 3270,48 x + 154663,185 = 0.$$

Из решения приведенного кубического уравнения высота сжатой зоны бетона x равна: $x = 18,485 \text{ см}$. Т. к. относительная высота сжатой зоны бетона

$$\zeta = x/h_0 = 21,521/46 = 0,468 < \zeta_R = 0,531,$$

сечение элемента действительно оказалось не переармированным.

По формуле (1) определяем напряжение в арматуре площадью A_s в предельном состоянии элемента:

$$\sigma_s = \left(2 \frac{1 - \zeta}{1 - \zeta_R} - 1\right) R_s = \left(2 \frac{1 - 0,468}{1 - 0,531} - 1\right) R_s = 1,268 R_s.$$

Так как, напряжение в арматуре площадью A_s достигает предельных значений, т. е. $\sigma_s = R_s$, следовательно, вариант расчета 1 – случай 1 (случай больших эксцентриситетов) принят изначально в данном примере расчета правильно.

Определяем несущую способность колонны из уравнения равновесия продольной силы N_{\max} и внутренних усилий в сечении элемента по формуле (9), которая при симметричной продольной арматуре будет иметь вид:

$$N_{\max} = R_b b x = 14,5(100)40 \cdot 18,485 = 1072130 H = 1072,1 кН > N = 700 кН,$$

следовательно, несущая способность колонны обеспечена.

Для проверки полученного результата несущей способности колонны воспользуемся решением уравнения (13):

$$N_{\max} = \frac{M_{\max} + N_{cr} e}{Z_s} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{\max} + N_{cr} e}{Z_s}\right)^2 - \frac{M_{\max} N_{cr}}{0,5 z_s}},$$

где по формуле (12)

$$\begin{aligned} N_{\max} &= R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A_s' (h_0 - a') = \\ &= 14,5(100)40 \cdot 18,485(46 - 0,5 \cdot 18,485) + 355(100)12,32(46 - 4) = \\ &= 39408818 + 18369120 = 57777938 \text{ Нсм}, \end{aligned}$$

$$z_s = h_0 - a = 46 - 4 = 42 \text{ см}, \quad e = e_0 + 0,5 z_s = 30,4 + 0,5 \cdot 42 = 51,4 \text{ см}.$$

При этом:

$$\begin{aligned} N_{\max 1,2} &= \frac{57777938 + 14162000 \cdot 51,4}{42} \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{57777938 + 14162000 \cdot 51,4}{42}\right)^2 - \frac{57777938 \cdot 14162000}{0,5 \cdot 42}} = \\ &= 18707256 \pm \sqrt{349961427049000 - 38964340855000} = \\ &= 18707256 \pm \sqrt{310977086194000} = 18707256 \pm 17635109, \\ N_{\max} &= 1072147 H = 1072,1 кН. \end{aligned}$$

Для подтверждения надежности предлагаемой методики расчета несущую способность колонны по величине нагрузки определяем 3-й раз через предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением M_{\max} (см. выше). При этом, для определения эксцентриситета e продольной силы N_{\max} относительно центра тяжести поперечного сечения арматуры площадью A_s , необходимо уточнить значение коэффициента η в зависимости от полученного выше значения N_{\max} ,

$$\eta = \frac{1}{1 - N_{\max} / N_{cr}} = \frac{1}{1 - 1072,1 / 14162} = 1,0819,$$

$$e = e_0 \eta + \frac{h}{2} - a = 30,4 \cdot 1,0819 + \frac{50}{2} - 4 = 53,89 \text{ см}.$$

Несущая способность колонны равна:

$$N_{\max} = \frac{M_{\max}}{e} = \frac{57777938}{53,89} = 1072146 H = 1072,1 кН.$$

Выводы:

1. Методика расчета внецентренно сжатых железобетонных элементов, заложенная в действующих нормативных документах по случаю 2 внецентренного

сжатия, когда $\sigma_S < R_S$, включает 2 вида напряженно – деформированного состояния элементов, когда арматура площадью A_S в предельном состоянии элементов растянута, а также когда она окажется сжатой при напряжениях в ней $\sigma_{SC} < R_{SC}$. Для решения задач по случаю 2 внецентренного сжатия, когда $\zeta > \zeta_R$, в соответствии с действующими нормативными документами относительную высоту сжатой зоны бетона допускается принимать равной ζ_R , при этом $\sigma_S = R_S$. Это является недостатком существующей методики расчета по случаю 2, так как арматура площадью A_S в предельном состоянии элемента может оказаться сжатой, что иногда существенно повлияет на его несущую способность.

2. Как показывают опыты, высота сжатой зоны бетона x существенно зависит от величины эксцентриситета приложения продольных сил e_0 , что не учитывается при использовании уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий, как предлагается в нормативных документах [1] и [2].

Особенно опасным фактором является неточность монтажа внецентренно сжатых элементов в производственных условиях, что приводит к увеличению эксцентриситета продольных сил, а соответственно и снижению их несущей способности, а иногда и к разрушению элементов (рис. 2).

3. В действующих нормативных документах высота сжатой зоны бетона x , в предельном состоянии элемента, определяется из уравнения равновесия продольных сил и внутренних усилий, где значение N есть фактически приложенная нагрузка, однако, эпюра напряжений в бетоне сжатой зоны при этом принимается прямоугольной напряжением в бетоне принимается равным его предельному значению R_b , что соответствует значению N_{max} . При изменении нагрузки от N до N_{max} вид (очертание) и площадь эпюры напряжений, а также высота сжатой зоны бетона могут существенно изменяться. Отсюда следует, что для проверки условия $N \leq N_{сеч}$ или $M \leq M_{сеч}$ высоту сжатой зоны бетона x необходимо определять в зависимости от $N_{сеч} = N_{max}$, а не в зависимости от фактически приложенной нагрузки N , как приводится в нормативных документах.

4. Теоретические исследования, приведенные в данной статье, с их обоснованием на конкретных примерах, в т.ч. примеры 2 и 3 опубликованные в источнике [5], также показали, что при уменьшении эксцентриситета продольной силы N в предельном состоянии внецентренно сжатых железобетонных элементов высота сжатой зоны бетона x возрастает, напряжение в продольной арматуре площадью A_S плавно переходит из состояния растяжения в состояние сжатия, а несущая способность элементов при этом повышается (см. примеры расчетов в [5]), что также подтверждается и опытными результатами.

5. Разработанные автором статьи расчеты внецентренно сжатых железобетонных элементов для 4-х случаев внецентренного сжатия, вместо 2-х – как изложено в нормативных документах [1] и [2], полностью охватывают весь спектр возможных случаев напряженно – деформированного предельного состояния элементов в зависимости от величины эксцентриситета e_0 продольной силы N_{max} ,



Рис. 2. Разрушение колонны в связи с неточностью монтажа, вызвавшего увеличение эксцентриситета продольных сил в плоскости изгиба и в перпендикулярной к ней плоскости

когда напряжение в продольной арматуре площадью A_S в предельном состоянии элемента может иметь различные значения-от предельных напряжений растяжения равных R_S до предельных напряжений сжатия равных R_{SC} , что соответствует требованиям Европейских норм по железобетону, в частности Еврокода 2 (2003) [6].

Л и т е р а т у р а

1. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. – М., 2002.
2. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003) / ЦНИИПромзданий, НИИЖБ. – М.: ЦНИИПромзданий, 2005. – 214 с.
3. *Старишко И.Н.* Совершенствование теории расчетов внецентренно сжатых железобетонных элементов путем совместного решения уравнений, отражающих их напряженно-деформированное состояние [текст] / И.Н. Старишко // Вестник гражданских инженеров. – 2012. - №Б (34). – С. 72-81.
4. *Старишко И.Н.* Варианты и случаи, предлагаемые для расчетов внецентренно сжатых элементов // Бетон и железобетон. - 2012. - №3. - С.14-20.
5. Старишко И.Н. Особенности предлагаемой методики расчета внецентренно сжатых железобетонных элементов с практическим решением задач // Бетон и железобетон. – 2012. – № 4. – С. 9-14.
6. Еврокод 2: Проектирование железобетонных конструкций-Часть 1-1: Общие правила и правила для зданий / Европейский комитет по стандартизации, 2002 / 226р.

R e f e r e n c e s

1. *SNiP 2.03.01—84**. *Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii* [Construction Norms and Regulations 2.03.01—84*. Concrete and Reinforced Concrete Structures]. Moscow, 2002, 76 p.
2. *SP 52-101—2003. Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury* [Regulations 52-101—2003. Concrete and Reinforced Concrete Structures without Prestress of the Reinforcement]. Moscow, 2004, 53 p.
3. *Starishko, I.N.* (2012). *Sovershenstvovanie teorii raschetov vnetsentrenno szhatykh zhelezobetonnykh elementov putem sovmestnogo resheniya uravneniy, otrazhayushchikh ikh napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie* [Improving Theory of Eccentrically Compressed Concrete Elements Calculations by Solving the Equations that Reflect their Stress-strain State]. *Vestnik Grazhdanskikh Inzhenerov* [Proceedings of Civil Engineers], no. 5(34), pp. 72-81.
4. *Starishko, I.N.* (2012). *Varianty i sluchai, predlagaemye dlya raschetov vnetsentrenno szhatykh elementov* [Variants and Cases Offered for the Calculations of the Eccentric Compressed Elements]. *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete], no. 3, pp. 14-20.
5. *Starishko, I.N.* (2012). *Osobennosti predlagaemoy metodiki rascheta vnetsentrenno szhatykh zhelezobetonnykh elementov s prakticheskim resheniem zadach* [Features of the Offered Method for Calculating Reinforced Concrete Beam Columns with the Practical Tasks Solution]. *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete], no. 4, pp. 9-14.
6. Eurocode 2: Design of concrete structures-Part 1-1: general rules and rules for buildings/European Committee for Standardization, 2002/226p.

ANALYSIS OF CARRYING CAPACITY OF ECCENTRIC COMPRESSED REINFORCED CONCRETE BLOCKS UNDER DIFFERENT VALUES OF ECCENTRICITIES OF LONGITUDINAL FORCES

I.N. Starishko

Vologda State University, Vologda

The paper presents a theory for calculating eccentrically compressed concrete elements in the ultimate limit state of bearing capacity, taking into account all the possible stresses in the longitudinal reinforcement from RS to RSC, caused by different values of the eccentricity e of the longitudinal force N . Method of calculation is based on the simultaneous solution of the equilibrium equations of longitudinal forces and internal forces with equilibrium equations of bending moments. The joint solution of the above as well as additional equations that reflect the stress-strain limit state elements makes it possible to obtain a higher convergence of the calculated bearing capacity with an experienced, as well as to enhance the durability and reliability in their operation.

KEYWORDS: eccentrically-compressed elements, the equilibrium equations, load-bearing capacity.