

Теория упругости

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ОСНОВАНИЯ

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент

Ю.М. БУЛДАКОВА, аспирант

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»

424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3

KudryavcevSG@volgatech.net

Предложена методика определения перемещений и напряжений в двухслойном анизотропном основании под действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок. Упругие характеристики ортотропного материала слоев различные. Рассматривается вариант полного сцепления между слоями. Решение проводится на основе уравнений плоской задачи теории упругости. Представлены графики изменения напряжений в зависимости от характеристик материала слоев.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: полоса, упругое основание, анизотропия, напряжение.

Задача об определении под действием поверхностных нагрузок напряжений и перемещений в двухслойном упругом основании, когда верхний слой имеет конечную толщину, а нижний бесконечно простирается по всем направлениям, представляет практический интерес (механика грунтов). Для изотропного материала с разными характеристиками каждого слоя она рассматривалась во многих работах, например [1, 2]. Теоретическое решение задачи о взаимодействии слоя и полупространства из трансверсально-изотропных материалов приведено в [3]. Вариант многослойного основания рассмотрен в [4].

Выясним влияние упругих характеристик материала слоев на напряженное и деформированное состояние двухслойного анизотропного основания.

Для дальнейших выкладок получим формулы для определения функций перемещений и напряжений в произвольной точке полуплоскости из ортотропного материала через нормальное $q_o(x)$ и касательное $\tau_o(x)$ поверхностные усилия (рис.1). Полагаем, что материал следует обобщенному закону Гука и испытывает малые деформации. Ось x направим вдоль границы полуплоскости вправо, y – перпендикулярно границе вниз. Положительные направления напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , перемещений u , v аналогичны обозначениям в работе

[5]. Направления осей анизотропии совпадают с координатными осями.

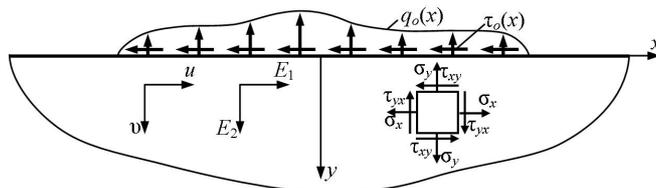


Рис. 1. Схема нагружения полуплоскости из ортотропного материала поверхностными усилиями

Проведем решение задачи в перемещениях. Используя дифференциальные уравнения равновесия, кинематические соотношения Коши, зависимости между деформациями и напряжениями для ортотропного материала, получим систему двух уравнений относительно функций перемещений:

$$\begin{cases} \beta_{22}\beta_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 - \beta_{12}\beta_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_{11}\beta_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 - \beta_{12}\beta_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для обобщенного плоского напряженного состояния $\beta_{ij} = a_{ij}$, при плоской деформации $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3} / a_{33}$, где a_{ij} – коэффициенты деформации, связанные с техническими постоянными известными соотношениями [5].

Выразим u и v через функцию перемещений $F(x, y)$ зависимостями:

$$\begin{aligned} u &= -(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 - \beta_{12}\beta_{66}) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}, \\ v &= \beta_{22}\beta_{66} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое уравнение системы (1) на основании (2) тождественно удовлетворяется. Подставляя (2) во второе уравнение (1), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F = 0, \quad (3)$$

где

$$s_{1,2}^2 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}}.$$

Доказано [5], что в зависимости от характеристик материала возможны следующие комбинации значений s_i : а) $s_1 \neq s_2$; б) $s_1 = s_2 = s$; в) s_1, s_2 – комплексные числа. Используя символический метод [6], проинтегрируем уравнение (3) для варианта $s_1 \neq s_2$. Тогда

$$F(x, y) = e^{is_1 y \partial} \cdot C_1(x) + e^{-is_1 y \partial} \cdot C_2(x) + e^{is_2 y \partial} \cdot C_3(x) + e^{-is_2 y \partial} \cdot C_4(x), \quad (4)$$

где $C_i(x)$ – произвольные функции интегрирования, а производная по x обозначена $\partial (\partial = \partial / \partial x)$. Точки в (4) отделяют дифференциальные операторы от функций, к которым они применяются. Далее точки показывать не будем.

Функции перемещений и напряжений запишем через произвольные функции интегрирования, используя выражения (2), (4) и уравнения обобщенного

закона Гука для ортотропного материала.

Учитывая, что на бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю, принимаем $C_1(x) = C_3(x) = 0$. Произвольные функции $C_2(x)$, $C_4(x)$ найдем из условий: $\sigma_y(x, y=0) = q_o(x)$, $\tau_{xy}(x, y=0) = \tau_o(x)$. После преобразований получим через заданные поверхностные усилия выражения перемещений

$$v = \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{1}{\partial} \left[s_1 s_2 (-\mu_2 e^{-is_1 y \partial} + \mu_1 e^{-is_2 y \partial}) i q_o + (s_1 \mu_2 e^{-is_2 y \partial} - s_2 \mu_1 e^{-is_1 y \partial}) i \tau_o \right] \quad (5)$$

$$u = \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{1}{\partial} \left[(s_2 \mu_1 e^{-is_1 y \partial} - s_1 \mu_2 e^{-is_2 y \partial}) q_o + (\mu_1 e^{-is_1 y \partial} - \mu_2 e^{-is_2 y \partial}) i \tau_o \right]$$

и напряжений

$$\sigma_x = -\frac{1}{s_2 - s_1} \left[s_1 s_2 (s_1 e^{-is_1 y \partial} - s_2 e^{-is_2 y \partial}) q_o + (s_1^2 e^{-is_1 y \partial} - s_2^2 e^{-is_2 y \partial}) i \tau_o \right]$$

$$\sigma_y = \frac{1}{s_2 - s_1} \left[(s_2 e^{-is_1 y \partial} - s_1 e^{-is_2 y \partial}) q_o + (e^{-is_1 y \partial} - e^{-is_2 y \partial}) i \tau_o \right] \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{s_2 - s_1} \left[s_1 s_2 (e^{-is_1 y \partial} - e^{-is_2 y \partial}) i q_o - (s_1 e^{-is_1 y \partial} - s_2 e^{-is_2 y \partial}) \tau_o \right]$$

где $\mu_1 = \beta_{12} - \beta_{11} s_1^2$, $\mu_2 = \beta_{12} - \beta_{11} s_2^2$.

Используя формулы, приведенные в [7] и уравнения (5),(6) данной работы, проведем анализ напряженного и деформированного состояния двухслойного основания, которое состоит из полосы постоянной высоты h и упругой полуплоскости, под действием нормальной $q(x)$ и касательной $\tau(x)$ нагрузки (рис. 2). Материал слоев принимаем ортотропным, но с разными упругими характеристиками. Перемещения, напряжения, коэффициенты, которые учитывают характеристики материала, обозначим для полуплоскости чертой сверху.

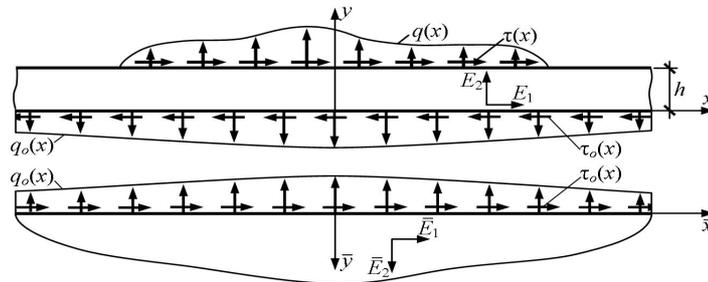


Рис. 2. Расчетная схема взаимодействия полосы и основания

Введем две системы координат с общим началом отсчета и общей осью абсцисс. Оси x и \bar{x} направим вдоль линии контакта полосы и основания. Ось y перпендикулярно линии контакта вверх, \bar{y} – вниз. Координатные оси x и \bar{x} совпадают, поэтому далее используем только координату x .

Обозначим на границе контакта слоев, как показано на рис.2, нормальное напряжение $q_o = q_o(x)$, касательное – $\tau_o = \tau_o(x)$. На линии контакта при условии полного сцепления между слоями имеем

$$u_o(x, y=0) = \bar{u}_o(x, \bar{y}=0), \quad v_o(x, y=0) = -\bar{v}_o(x, \bar{y}=0), \quad (7)$$

$$\sigma_y(x, y=0) = \bar{\sigma}_y(x, \bar{y}=0) = q_o, \quad \tau_{xy}(x, y=0) = \bar{\tau}_{xy}(x, \bar{y}=0) = \tau_o.$$

Нижний индекс "ноль" в выражениях для перемещений означает, что они определены при $y=0$ или $\bar{y}=0$.

На верхней плоскости полосы

$$\sigma_y(x, y = h) = q(x), \quad \tau_{xy}(x, y = h) = \tau(x). \quad (8)$$

Полагая в (5) значение $\bar{y} = 0$ и учитывая направление τ_o , запишем

$$\partial \bar{u}_o = \frac{1}{s}(\bar{k}q_o + \bar{\mu}i\tau_o) = \partial u_o, \quad \partial \bar{v}_o = -\frac{1}{s}(\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}iq_o - \bar{k}\tau_o) = -\partial v_o, \quad (9)$$

где $\bar{s} = \bar{s}_2 - \bar{s}_1$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1$, $\bar{k} = \bar{s}_2\bar{\mu}_1 - \bar{s}_1\bar{\mu}_2 = \bar{s}(\bar{\beta}_{12} - \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\beta}_{11})$.

Выпишем из работы [7] уравнения для определения в произвольной точке полосы из ортотропного материала перемещений

$$\begin{aligned} \mu u = & -(\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) u_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) v_o + \\ & + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1^2 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o, \\ \mu v = & (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) u_o + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) v_o - \\ & - (s_1 \mu_2^2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o, \end{aligned} \quad (10)$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \mu \sigma_x = & (s_1^2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos s_2 y \partial) \partial u_o - (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \partial v_o - \\ & - (s_1^2 \mu_2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o - (s_1 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \\ \mu \sigma_y = & -(\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \partial u_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \sin s_1 y \partial - s_1 \sin s_2 y \partial) \partial v_o + \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \\ \mu \tau_{xy} = & -(s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \partial u_o - (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \partial v_o + \\ & + (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) q_o - (\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \tau_o. \end{aligned} \quad (11)$$

В (10)–(11) обозначения $s_i (i = 1, 2)$, $\mu_i (i = 1, 2)$, μ аналогичны коэффициентам \bar{s}_i , $\bar{\mu}_i$, $\bar{\mu}$ и зависят от характеристик материала полосы; u_o, v_o, q_o, τ_o – функции перемещений и поверхностных усилий на нижней плоскости полосы.

Подставим (9) с учетом (7) в уравнения (11). Принимая в выражениях для напряжений σ_y, τ_{xy} значение $y = h$ и используя граничные условия (8), получим систему двух уравнений относительно неизвестных функций q_o, τ_o . После преобразований найдем

$$\begin{aligned} q_o = & \frac{2\bar{s}\mu}{D^*} \{ [(k_1 \cos s_1 h \partial - k_2 \cos s_2 h \partial) + i\bar{\mu}(s_1 \sin s_1 h \partial - s_2 \sin s_2 h \partial)] s_1 s_2 q(x) + \\ & + [(s_2 k_1 \sin s_1 h \partial - s_1 k_2 \sin s_2 h \partial) - i s_1 s_2 \bar{\mu}(\cos s_1 h \partial - \cos s_2 h \partial)] \tau(x) \}, \\ \tau_o = & \frac{2\bar{s}\mu}{D^*} \{ [(s_1 k_2 \sin s_1 h \partial - s_2 k_1 \sin s_2 h \partial) - i \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}(\cos s_1 h \partial - \cos s_2 h \partial)] s_1 s_2 q(x) - \\ & - [s_1 s_2 (k_2 \cos s_1 h \partial - k_1 \cos s_2 h \partial) + i \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu} (s_2 \sin s_1 h \partial - s_1 \sin s_2 h \partial)] \tau(x) \}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $k_1 = \bar{s}\mu_1 - \bar{k}$, $k_2 = \bar{s}\mu_2 - \bar{k}$,

$$\begin{aligned} D^* = & 4s_1 s_2 (k_1 k_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}^2) - (s_1 - s_2) [s_2 k_1^2 - s_1 k_2^2 + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}^2 (s_1 - s_2)] \cos(s_1 + s_2) h \partial - \\ & - (s_1 + s_2) [s_2 k_1^2 + s_1 k_2^2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}^2 (s_1 + s_2)] \cos(s_1 - s_2) h \partial - \\ & - i \bar{s} \bar{\mu} \mu [(s_1 + s_2) (\bar{s}_1 \bar{s}_2 - s_1 s_2) \sin(s_1 - s_2) h \partial - (s_1 - s_2) (\bar{s}_1 \bar{s}_2 + s_1 s_2) \sin(s_1 + s_2) h \partial]. \end{aligned}$$

Полагаем, что существует интегральное преобразование Фурье от функций $q(x)$ и $\tau(x)$. Функции $q(x)$ и $\tau(x)$ разделим на симметричные $q_s(x)$, $\tau_s(x)$ и кососимметричные $q_a(x)$, $\tau_a(x)$ составляющие [8]. Тогда

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [q_s(\tilde{\lambda}) + iq_a(\tilde{\lambda})] e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \quad \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_s(\tilde{\lambda}) + i\tau_a(\tilde{\lambda})] e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \quad (13)$$

где

$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad q_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$$\tau_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad \tau_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$\tilde{\lambda}$ – любое положительное вещественное число.

Подставим (13) в (12) и выражения q_o , τ_o внесем в уравнения (5), (6). Учитывая новые обозначения \bar{s}_i , $\bar{\mu}_i$, а также, что перемещения и напряжения являются действительными величинами, получим формулы для функций перемещений и напряжений в произвольной точке полуплоскости.

Для определения перемещений и напряжений в полосе найдем, используя (9), (12), (13), функции q_o , τ_o , ∂u_o , ∂v_o , которые подставим в (10) и (11).

Рассмотрим вариант, когда в сечении $x = 0$ приложена перпендикулярно верхней плоскости полосы сила интенсивностью $(-F)$. Сила равномерно распределена вдоль оси перпендикулярной плоскости (рис. 2). При симметричной нагрузке $q_a(x) = 0$. Трансформанта Фурье

$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(-F) \cos \tilde{\lambda}x dx = -\frac{F}{\sqrt{2\pi}}, \quad (14)$$

$\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Используя (9), (12)–(14), найдем

$$q_o = -\frac{\bar{s}\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_1(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad \tau_o = \frac{\bar{s}\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad (15)$$

$$\partial \bar{u}_o = -\frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_3(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad \partial \bar{v}_o = \frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_4(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda,$$

где $\lambda = \tilde{\lambda}h$, $\tilde{x} = x/h$, $A_1(\lambda) = B_1(\lambda) + \bar{\mu}B_2(\lambda)$, $A_2(\lambda) = \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}B_3(\lambda) + B_4(\lambda)$,

$$A_3(\lambda) = \bar{k}B_1(\lambda) + \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}^2 B_3(\lambda) + \bar{\mu}[\bar{k}B_2(\lambda) + B_4(\lambda)],$$

$$A_4(\lambda) = \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}^2 B_2(\lambda) + \bar{k}B_4(\lambda) + \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}[B_1(\lambda) + \bar{k}B_3(\lambda)],$$

$$B_1(\lambda) = k_1chs_1\lambda - k_2chs_2\lambda, \quad B_2(\lambda) = s_1shs_1\lambda - s_2shs_2\lambda,$$

$$B_3(\lambda) = chs_1\lambda - chs_2\lambda, \quad B_4(\lambda) = s_1k_2shs_1\lambda - s_2k_1shs_2\lambda,$$

$$D = \frac{1}{2s_1s_2} \left\{ 4s_1s_2(k_1k_2 - \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}^2) - (s_1 - s_2) \left[s_2k_1^2 - s_1k_2^2 + \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}^2(s_1 - s_2) \right] ch(s_1 + s_2)\lambda - \right. \\ \left. - (s_1 + s_2) \left[s_2k_1^2 + s_1k_2^2 - \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{\mu}^2(s_1 + s_2) \right] ch(s_1 - s_2)\lambda - \right. \\ \left. - \bar{s}\bar{\mu}\mu \left[(s_1 + s_2)(\bar{s}_1\bar{s}_2 - s_1s_2)sh(s_1 - s_2)\lambda - (s_1 - s_2)(\bar{s}_1\bar{s}_2 + s_1s_2)sh(s_1 + s_2)\lambda \right] \right\}.$$

Подставляя (15) в (10)–(11), получим формулы для определения в полосе перемещений

$$\tilde{u} = \int_0^{\infty} \left[(\mu_1chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_2chs_2\lambda\tilde{y})A_3(\lambda) - \frac{1}{s_1s_2} (s_2\mu_1 \sin s_1\lambda\tilde{y} - s_1\mu_2 \sin s_2\lambda\tilde{y})A_4(\lambda) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\bar{s}\mu_1\mu_2(chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y})A_1(\lambda) + \frac{\bar{s}}{s_1s_2}(s_2\mu_1^2shs_1\lambda\tilde{y} - s_1\mu_2^2shs_2\lambda\tilde{y})A_2(\lambda) \left] \frac{\sin \lambda\tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda} + b_1, \\
 \tilde{v} = & -\int_0^\infty [(s_1\mu_2shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_1shs_2\lambda\tilde{y})A_3(\lambda) - (\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_1chs_2\lambda\tilde{y})A_4(\lambda) - \\
 & -\bar{s}(s_1\mu_2^2shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_1^2shs_2\lambda\tilde{y})A_1(\lambda) + \mu_1\mu_2\bar{s}(chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y}) \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda} + b_2,
 \end{aligned} \tag{16}$$

и напряжений

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_x = & \int_0^\infty [-(s_1^2chs_1\lambda\tilde{y} - s_2^2chs_2\lambda\tilde{y})A_3(\lambda) + (s_1shs_1\lambda\tilde{y} - s_2shs_2\lambda\tilde{y})A_4(\lambda) + \\
 & + \bar{s}(s_1^2\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - s_2^2\mu_1chs_2\lambda\tilde{y})A_1(\lambda) - \bar{s}(s_1\mu_1shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_2shs_2\lambda\tilde{y})A_2(\lambda) \left] \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda, \\
 \tilde{\sigma}_y = & \int_0^\infty [(chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y})A_3(\lambda) - \frac{1}{s_1s_2}(s_2shs_1\lambda\tilde{y} - s_1shs_2\lambda\tilde{y})A_4(\lambda) - \\
 & -\bar{s}(\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_1chs_2\lambda\tilde{y})A_1(\lambda) + \frac{\bar{s}}{s_1s_2}(s_2\mu_1shs_1\lambda\tilde{y} - s_1\mu_2shs_2\lambda\tilde{y})A_2(\lambda) \left] \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda, \\
 \tilde{\tau}_{xy} = & \int_0^\infty [-(s_1shs_1\lambda\tilde{y} - s_2shs_2\lambda\tilde{y})A_3(\lambda) + (chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y})A_4(\lambda) + \\
 & + \bar{s}(s_1\mu_2shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_1shs_2\lambda\tilde{y})A_1(\lambda) - \bar{s}(\mu_1chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_2chs_2\lambda\tilde{y})A_2(\lambda) \left] \frac{\sin \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $\tilde{u} = \frac{u\pi}{\mu F}$, $\tilde{v} = \frac{v\pi}{\mu F}$, $\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x\pi h}{F}$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y\pi h}{F}$, $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}\pi h}{F}$, $\tilde{y} = \bar{y}/h$.

Учитывая (5), (6), (12)–(14), запишем функции для определения в полу-плоскости перемещений

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} = & -\int_0^\infty [(\bar{s}_2\bar{\mu}_1e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_2\bar{\mu}_2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_1(\lambda) + \\
 & + (\bar{\mu}_1e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{\mu}_2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_2(\lambda) \left] \frac{\sin \lambda\tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda} + b_3, \\
 \tilde{v} = & \int_0^\infty [(\bar{s}_1\bar{s}_2(\bar{\mu}_2e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{\mu}_1e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_1(\lambda) + \\
 & + (\bar{s}_1\bar{\mu}_2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_2\bar{\mu}_1e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}})A_2(\lambda) \left] \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda} + b_4,
 \end{aligned} \tag{18}$$

и напряжений

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_x = & \mu \int_0^\infty [(\bar{s}_1e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})\bar{s}_1\bar{s}_2A_1(\lambda) + (\bar{s}_1^2e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_2^2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_2(\lambda) \left] \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda, \\
 \tilde{\sigma}_y = & -\mu \int_0^\infty [(\bar{s}_2e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_1e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_1(\lambda) + (e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_2(\lambda) \left] \frac{\cos \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda, \\
 \tilde{\tau}_{xy} = & -\mu \int_0^\infty [(e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})\bar{s}_1\bar{s}_2A_1(\lambda) + (\bar{s}_1e^{-\bar{s}_1\lambda\tilde{y}} - \bar{s}_2e^{-\bar{s}_2\lambda\tilde{y}})A_2(\lambda) \left] \frac{\sin \lambda\tilde{x}}{D} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $\tilde{u} = \frac{u\pi}{\mu F}$, $\tilde{v} = \frac{v\pi}{\mu F}$, $\tilde{\sigma}_x = \frac{\bar{\sigma}_x \pi h}{F}$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{\bar{\sigma}_y \pi h}{F}$, $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy} \pi h}{F}$, $\tilde{y} = \bar{y}/h$.

В (16) и (18) произвольные постоянные b_1, b_2, b_3, b_4 характеризуют «жесткие» смещения в плоскости xu ($x\bar{y}$). Интегралы, которые определяют перемещения \tilde{u}, \tilde{v} при значениях $\tilde{y} = \bar{y} = 0$ расходятся. При их вычислении используем прием, предложенный в [8].

Варьируя в (16)–(19) значениями коэффициентов $s_i, \bar{s}_i, \mu_i, \bar{\mu}_i$ можно провести анализ напряженного и деформированного состояния двухслойного основания от сосредоточенной силы, приложенной перпендикулярно границе основания, в зависимости от характеристик материалов полосы и полуплоскости.

Полагая в (16), (17) значения $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$, получим решение задачи о полосе из ортотропного материала, лежащей на жестком основании [7].

Пусть слои состоят из одного ортотропного материала и направления осей анизотропии с равными упругими характеристиками в полосе и полуплоскости параллельны. Тогда

$$s_i = \bar{s}_i, \mu_i = \bar{\mu}_i, k_1 = s_1 \mu, k_2 = s_2 \mu, s = \bar{s}, k = s_2 \mu_1 - s_1 \mu_2. \quad (20)$$

Формулы для определения напряжений, в данном случае в полуплоскости, можно получить, используя два варианта. В первом – из уравнений (19). Запишем (19), учитывая (20), через размерные величины и полагаем $h = 0$. Рассмотрим, например, напряжение σ_y . После преобразований, используя [9], найдем

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{\mu F}{\pi s} \int_0^\infty (s_2 e^{-s_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - s_1 e^{-s_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \cos \tilde{\lambda} x d\tilde{\lambda} = -\frac{F}{\pi} \frac{s_1 s_2 (s_1 + s_2) \bar{y}^3}{(s_1^2 \bar{y}^2 + x^2)(s_2^2 \bar{y}^2 + x^2)}. \quad (21)$$

Принимая в (21) значения $s_1 = s_2 = 1$, получим выражение для напряжения σ_y в полуплоскости из изотропного материала [8].

Второй – основан на применении формул (17), которые также запишем через размерные величины. В полосе, при условиях (20), напряжение

$$\sigma_y = \frac{s \mu^2 F}{\pi} \int_0^\infty (s_2 e^{s_2 \tilde{\lambda} h} e^{s_1 \tilde{\lambda} y} - s_1 e^{s_1 \tilde{\lambda} h} e^{s_2 \tilde{\lambda} y}) \frac{\cos \tilde{\lambda} x}{D^{**}} d\tilde{\lambda}, \quad (22)$$

где $D^{**} = -s_2 \mu^2 e^{(s_1 + s_2) \tilde{\lambda} h}$.

Учитывая для полосы направление оси y и начало точки отсчета, введем новую переменную $y_1 = h - y$. После замены переменной приходим к решению, представленному уравнением (21). Формулы для напряжений σ_x, τ_{xy} получим аналогично.

Функции перемещений в полуплоскости из ортотропного материала найдем из уравнений (16) или (18). Полагая, например, в (18) значение $h = 0$ и учитывая обозначения (20), запишем через размерные величины

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{F}{\pi s} \int_0^\infty (s_2 \mu_1 e^{-s_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - s_1 \mu_2 e^{-s_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \sin \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} + b_3, \\ \bar{v} &= \frac{s_1 s_2 F}{\pi s} \int_0^\infty (\mu_2 e^{-s_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - \mu_1 e^{-s_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \cos \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} + b_4. \end{aligned} \quad (23)$$

Интеграл для вычисления \bar{v} при значении $\bar{y} = 0$ также расходящийся.

После интегрирования уравнений (23), используя [9], и определения произвольных постоянных получим

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{F}{\pi s} \left(s_2 \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x}{s_1 \bar{y}} - s_1 \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x}{s_2 \bar{y}} \right), \\ \bar{v} &= -\frac{s_1 s_2 F}{\pi s} \left(\mu_2 \ln \sqrt{s_1^2 \bar{y}^2 + x^2} - \mu_1 \ln \sqrt{s_2^2 \bar{y}^2 + x^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Переход к изотропному материалу на основе уравнений (24) требует из-за коэффициента s в знаменателе, дополнительных преобразований. Функции, входящие в выражения перемещений, необходимо разложить в ряды и выделить коэффициент s . Выполнив сокращение на s , перейти от коэффициентов деформации к техническим постоянным и, принимая $s_1 = s_2 = 1$, ряды обратно свернуть. Покажем на примере функции перемещения \bar{v} другой путь.

Найдем производную по переменной \bar{y} от функции \bar{v} , используя второе уравнение (23), и полученное выражение проинтегрируем. После вычислений

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{s_1 s_2 (s_1 + s_2) F}{\pi} \frac{\beta_{11} s_1^2 s_2^2 \bar{y}^3 + \beta_{12} x^2 \bar{y}}{(s_1^2 \bar{y}^2 + x^2)(s_2^2 \bar{y}^2 + x^2)}. \quad (25)$$

Для обобщенного плоского напряженного состояния $\beta_{11} = 1/E$, $\beta_{12} = -\nu/E$, где E – модуль упругости материала, ν – коэффициент Пуассона. Учитывая, что $s_1 = s_2 = 1$, а также новые обозначения характеристик материала, перепишем (25) в виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{2F}{\pi E} \frac{\bar{y}^3 - \nu x^2 \bar{y}}{(x^2 + \bar{y}^2)^2}. \quad (26)$$

Интегрируя (26), найдем

$$\bar{v} = \frac{2F}{\pi E} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + \bar{y}^2) - (1 + \nu) \frac{\bar{y}^2}{2(x^2 + \bar{y}^2)} \right] + c_1 x + c_2. \quad (27)$$

При симметричной поверхностной нагрузке перемещение \bar{v} должно быть симметричным относительно оси \bar{y} . Отсюда следует, что $c_1 = 0$. Из условия, что на линии действия силы перемещение точки, расположенной на расстоянии d от границы полуплоскости, запрещено [10], определим

$$c_2 = \frac{F}{\pi E} [(1 + \nu) - \ln d^2]. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получим

$$\bar{v} = \frac{F}{\pi E} \left[2 \ln \frac{\sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)}}{d} + (1 + \nu) \frac{x^2}{(x^2 + \bar{y}^2)} \right]. \quad (29)$$

Формула (29), если выполнить переход от декартовой к полярной системе координат, совпадает с приведенной в [10].

Функции для определения перемещений в ортотропной полуплоскости можно вывести и из уравнений (16), изменив направление оси y на противоположное и полагая $h = 0$. Данный переход показывать не будем.

Формулы для перемещений и напряжений в полосе и основании, когда материал каждого слоя изотропный, но с разными упругими характеристиками получим, используя (16)–(19) и зависимости между коэффициентами деформации и техническими постоянными [5].

Результаты численного анализа приведены для двухслойного основания, слои которого состоят из разных изотропных материалов. Коэффициент Пуассона для материала слоев $\nu = 0,25$. Расчеты выполнены для двухслойного основания в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (толщина $b = 1$). Коэффициент $\alpha = E/\bar{E}$, где E – модуль упругости материала полосы, \bar{E} – полуплоскости. Для варианта, когда слои из одного изотропного материала, данные сопоставлялись с результатами, приведенными в [8]. На рисунках, представленных ниже, безразмерные параметры напряжений для полосы и основания обозначены одинаково $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\tau}_{xy}$.

На рисунках 3–5 показаны графики распределения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_y$ в зависимости от значений $\alpha, \tilde{x}, \tilde{y}$ (\tilde{y}). Максимальные значения $\tilde{\sigma}_y$ в

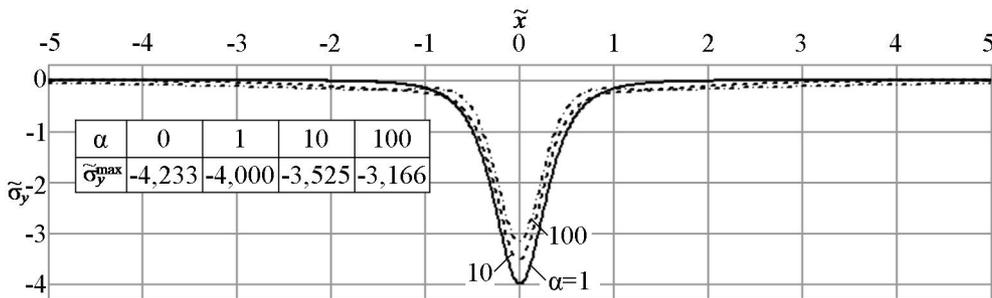


Рис. 3. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ вдоль горизонтальной оси при $\tilde{y}_2 = 0,5$

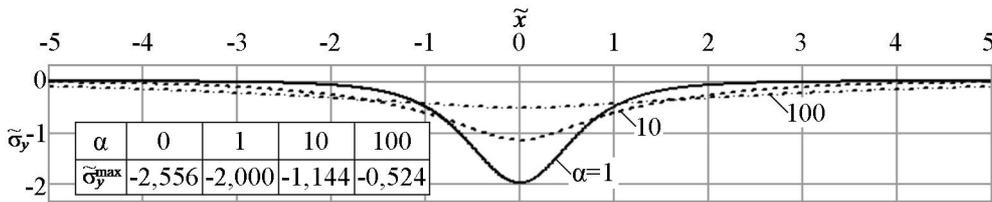


Рис. 4. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ на линии контакта полосы и основания

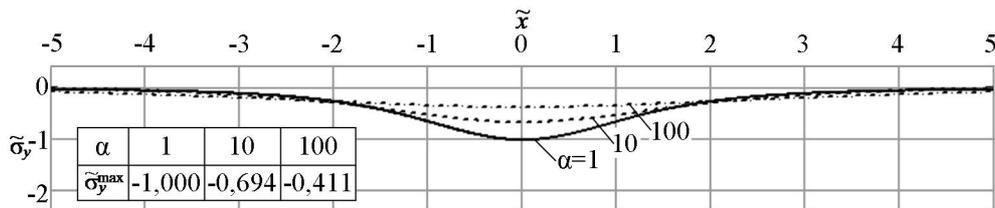


Рис. 5. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ вдоль горизонтальной оси при $\tilde{y}_1 = 1,0$

сечении $\tilde{x} = 0$ приведены в таблицах на рисунках. Значение $\alpha = 0$ соответствует случаю, когда полоса скреплена с жестким основанием. Из сравнения кривых видно, что при увеличении модуля упругости материала верхнего слоя, максимальное значение параметра $\tilde{\sigma}_y$ уменьшается, а область его распространения в направлении горизонтальной оси увеличивается.

Характер изменения параметра касательного напряжения $\tilde{\tau}_{xy}$, в зависимости от характеристик материала слоев и значений \tilde{x}, \tilde{y} (\tilde{y}), показан на рис.6–8. При анализе графиков на рис.8 необходимо учитывать направление оси \tilde{y} .

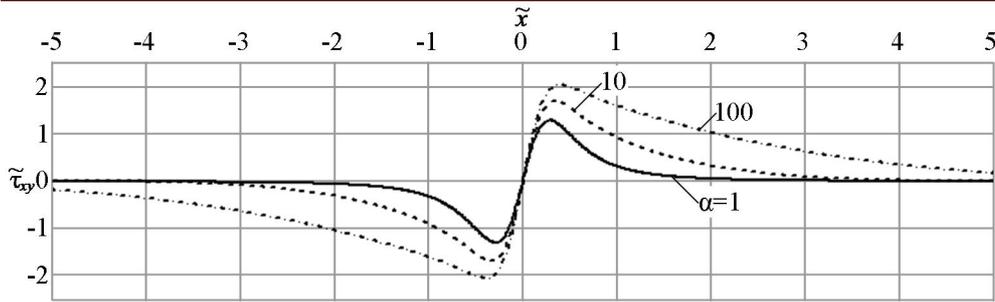


Рис. 6. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ вдоль горизонтальной оси при $\tilde{y}_2 = 0,5$

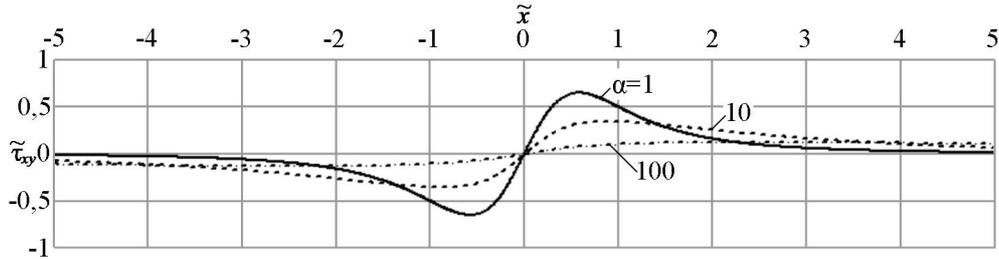


Рис. 7. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ на линии контакта полосы и основания

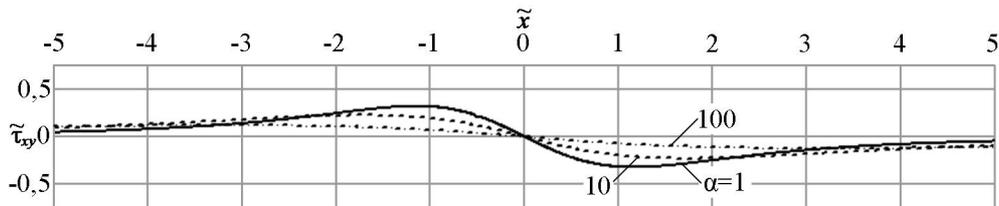


Рис. 8. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ вдоль горизонтальной оси при $\tilde{y}_1 = 1,0$

Максимальное значение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ и расстояние \tilde{x} от линии приложения силы до сечения, в котором возникает $\tilde{\tau}_{xy}^{\max}$, в зависимости от значений α , $\tilde{y}(\tilde{y})$ сведены в табл. 1.

Таблица 1. Максимальные значения параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ в зависимости от упругих характеристик материала слоев и значений \tilde{x} , $\tilde{y}(\tilde{y})$

α	1	10	100	1	10	100	1	10	100
	$\tilde{y}_2 = 0,5$			$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$			$\tilde{y}_1 = 1,0$		
$ \tilde{\tau}_{xy}^{\max} $	1,300	1,697	2,051	0,650	0,352	0,131	0,325	0,230	0,122
$ \tilde{x} $	0,32	0,35	0,40	0,58	0,86	2,52	1,15	1,72	3,16

Характер изменения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_x$ на линии контакта слоев показан для полосы на рис.9, основания – на рис.10. Из анализа кривых на рис. 9 видно, что значения параметра $\tilde{\sigma}_x$ в сечении $\tilde{x} = 0$ и область его распространения по горизонтальной оси возрастают с увеличением α . В основании, на линии контакта слоев (рис.10), значение параметра $|\tilde{\sigma}_x|$ больше для двухслойного основания, составленного из одного материала. При значении $\alpha = 1$ знак у параметра $\tilde{\sigma}_x$ не меняется. При значениях $\alpha = 10$ и $\alpha = 100$ происходит смена знака у параметра $\tilde{\sigma}_x$ на некоторых расстояниях от линии действия силы.

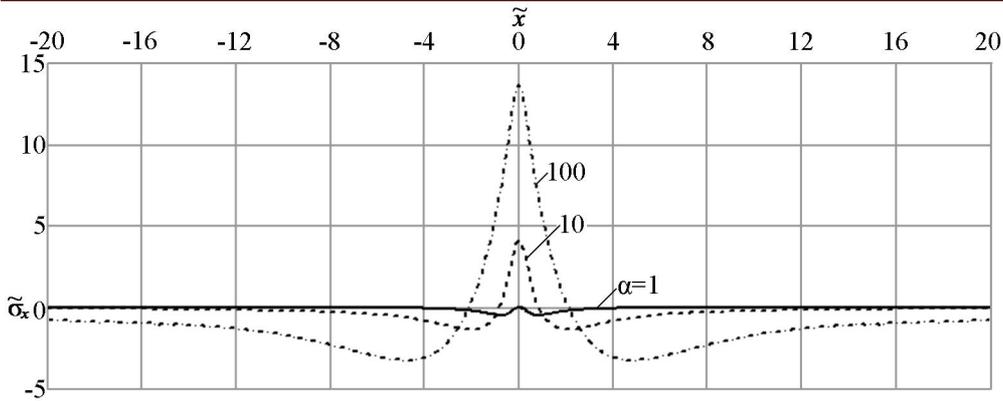


Рис. 9. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ в полосе на линии контакта слоев

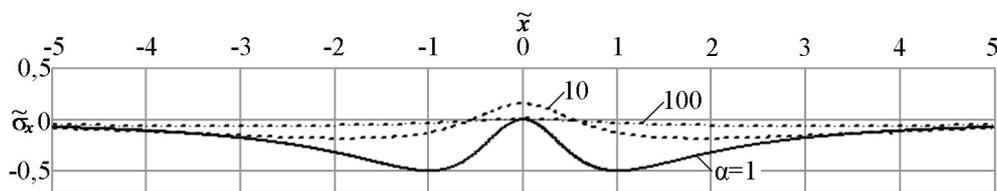


Рис.10. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ в основании на линии контакта слоев

В таблице 2 приведены данные расчетов параметра $\tilde{\sigma}_x$ в зависимости от значений α и \tilde{y} (\tilde{y}) при фиксированных значениях \tilde{x} .

Таблица 2. Значения параметра $\tilde{\sigma}_x$ в зависимости от упругих характеристик материала слоев и параметров \tilde{x} , \tilde{y} (\tilde{y})

	$\tilde{x} = 0.5$			$\tilde{x} = 1.0$		
α	1	10	100	1	10	100
\tilde{y}	$\tilde{\sigma}_x$ в полосе					
0.5	-1,000	-1,572	-2,072	-0,640	-1,267	-1,855
0.0	-0,320	2,184	10,853	-0,500	0,072	6,997
\tilde{y}	$\tilde{\sigma}_x$ в основании					
0.0	-0,320	0,012	-0,012	-0,500	-0,130	-0,036
0.5	-0,120	0,039	0,004	-0,284	-0,047	-0,011
1.0	-0,055	0,042	0,014	-0,160	-0,010	-0,003

В заключение отметим, что формулы (16)–(19) можно использовать и при действии распределенной нормальной поверхностной нагрузки на двухслойное основание. Для этого в (16)–(19) полагаем значение $F = 1$ и заменяем переменную x на $x - \xi$. В результате получим функции, которые можно рассматривать как функции Грина для задачи о двухслойном основании при полном сцеплении между слоями. Функции Грина позволят записать функции перемещений, напряжений в полосе и полуплоскости, когда двухслойное основание нагружено на участке распределенной поверхностной нагрузкой интенсивностью $q(\xi)$.

Л и т е р а т у р а

1. Раппопорт, Р.М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства/ Р. М. Раппопорт// Труды Ленинградского политехнического института. – Л., 1948, - №5. – С.3-18.

2. Коган, Б.И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б.И. Коган // Труды ХАДИ. – Харьков, 1953, - вып.14. – С.33-46.
3. Fabrikant, V.I. Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. - 2011. – vol. 70, issue 4, p. 363-388.
4. Fabrikant, V.I. Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. - 2013 – vol. 81, issue 1, p.93-126.
5. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. - 416 с.
6. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. - М.: Наука, 1970. - 940 с.
7. Кудрявцев, С. Г. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания / С. Г. Кудрявцев, Ю. М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2012. - № 4. - С. 29-35.
8. Новацкий, В. Теория упругости / В.Новацкий. - М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1978. – 228 с.
10. Тимошенко, С.П. Теория упругости/ С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

References

1. Rappoport, R.M. (1948). The challenge for the Boussinesq layered elastic half-space islands. *Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute*, L., № 5, p. 3-18.
2. Kogan, B.I. (1953). Stresses and strains of multilayer coatings. *Proceedings HADI*, Kharkov, Iss. 14, p. 33-46.
3. Fabrikant, V.I. (2011). Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 70, Iss. 4, p. 363-388.
4. Fabrikant, V.I. (2013). Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 81, Iss. 1, p.93-126.
5. Lehnitsky, S.G. (1977). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Moscow: Nauka, 416 p.
6. Lurie, A.I. (1970). *Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka, 940 p.
7. Kudryavtsev, S.G, Buldakova, Y.M. (2012). Interaction anisotropic strips and rigid base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p. 29-35.
8. Nowacki, W. (1975). *Theory of Elasticity*. Moscow: Publishing House "Mir", 872 p.
9. Dwight, G.B. (1978). *Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas*. Moscow: Nauka, 228 p.
10. Timoshenko, S.P., Goodier L.N. (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, N.Y., 576 p.

STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYERED ANISOTROPIC FOUNDATION

KUDRYAVTSEV S.G., BULDAKOVA J.M.

FGBOU VPO "Povolzhskiy Gosudarstvenniy Tehnologicheskiy Universitet", Ioshkar-Ola

The method of determination of displacements and stresses in the two-layer anisotropic foundation under the action of normal and tangential surface loads is given. Orthotropic elastic characteristics of various layers. We consider the version of the full adhesion between the layers. The decision is based on the equations of the plane problem of elasticity theory. Graphical representations of changing stresses depending on the characteristics of the material of layers are shown.

KEY WORDS: band, elastic foundation, anisotropy, stress.