

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ КОНСОЛИ КРЫЛА С ОТВЕРСТИЕМ

С.Е. ЗАЙЦЕВ, аспирант *

В.С. САФРОНОВ, канд. техн. наук, доцент **

* ООО «АНТ-Информ»

**Московский авиационный институт (Государственный технический университет)

141983 Дубна ул. Тверская д.6а тел. 89154690683 SergeyE.Z@yandex.ru

105264 Москва ул. 5-ая Парковая д.40, корп.1, кв.2, тел. 89262104892,

v.s.safronov@mail.ru

В статье представлена аналитическая модель оценки напряженно-деформируемого состояния и устойчивости консоли крыла с вырезом, построенная на основе энергетического метода. Приведены результаты расчетов и их сопоставление с результатами, полученными методом конечного элемента. Полученные в работе расчетные зависимости имеют аналитический характер.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Консоль крыла, вырез, напряжения, прогиб, напряженно-деформируемое состояние, устойчивость, энергетический метод.

Данная работа является продолжением серии работ [1-7], посвященным аналитической оценке несущей способности неоднородных конструкций летательных аппаратов.

Рассмотрим консоль крыла большого удлинения, силовой набор которого состоит из обшивки, кессона и нервюры, защемленное по одной кромке, находящегося под действием равномерного поперечного давления P с отверстием радиусом R , с размахом l , толщиной обшивки δ , толщиной нервюры δ_n , шириной нервюры b_n , толщиной кессона δ_k , бортовой хордой b_0 , концевой хордой b , корневой хордой кессона b_k , переменной строительной высотой $z(x)$, относительной толщиной профиля $c = z(x)/b(x)$, сужением крыла $\eta = b_0/b$, углом стре-

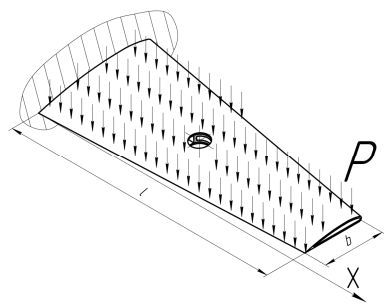


Рис. 1 Схема нагружения кессонного крыла с отверстием

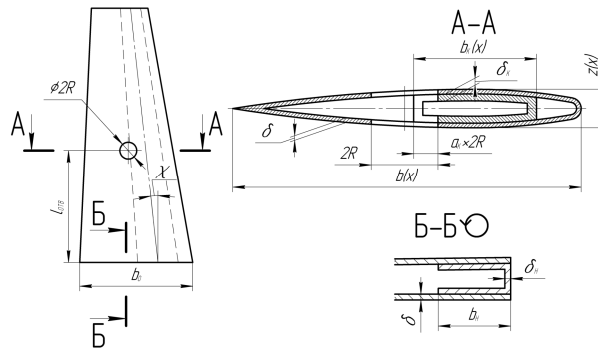


Рис. 2. Профиль крыла

ловидности по нейтральной оси кессона χ (рис.1). Пусть начало координат ($x = 0$) находится в заделке [1]. Профиль крыла показан на рис. 2.

Для получения аналитического решения задачи примем, что сечение крыла можно заменить приведенным сечением в виде, показанном на рис. 3. Коэффициент приведения обшивки к плоскому виду $k_z = z_0(x)/z(x)$ выбирается на основании равенства моментов инерции исходного рис. 2 и приведенного сечений при расчетах методом конечного элемента в программе Компас 3D.

Примем, что форма колебаний (прогиб w) для крыла моделируется как для консольной балки и имеет вид

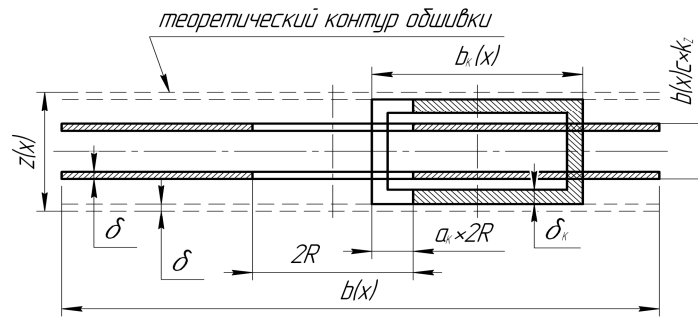


Рис.3. Приведенное сечение профиля крыла

$$w = w_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right). \quad (1)$$

Выбор подходящей формы колебаний служит основным моментом в рассматриваемой задаче. Для упругой консоли допустимая форма деформируемой оси должна удовлетворять условиям нулевого прогиба и угла поворота в заделке, а также максимального прогиба и нулевой второй производной (отсутствию момента сил) на свободном конце. Выражение (1) удовлетворяет всем перечисленным граничным условиям.

Аналитическая оценка действующих напряжений консоли крыла с отверстием

Строится приближенное решение задачи, для которого будем считать достаточным выполнение кинематических граничных условий на внешнем контуре крыла, т.е. будем учитывать влияние выреза только на внутреннюю потенциальную энергию. В качестве допущений, примем техническую теорию пластин, построенную на основных гипотезах, введенных Г. Кирхгоффом.

Предполагая, что деформации малы (упругий изгиб Бернулли – Эйлера), для потенциальной энергии деформации крыла используем выражение

$$U_{кр} = U_{об} + U_{к} + U_{н} - U_{омс}, \quad (2)$$

где $U_{об}$ – потенциальная энергия деформации обшивки крыла, $U_{к}$ – потенциальная энергия деформации кессона, $U_{н}$ – потенциальная энергия деформации нервюры, $U_{омс}$ – потенциальная энергия деформации выреза.

Запишем составляющие потенциальной энергии в виде

$$U_{об} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^l I_{об} \frac{d^2 w}{dx^2} dx, \quad U_{к} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\frac{l}{\cos(\chi)}} I_{к} \frac{d^2 w_{к}}{dx^2} dx,$$

$$U_{н} = U_{н.ст} + U_{н.пол} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\delta_n} I_{н.ст} \frac{d^2 w}{dx^2} dx + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^{b_n} 2I_{н.пол} \frac{d^2 w}{dx^2} dx,$$

$$U_{омс} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{l_{омс}+R}^{l_{омс}+R} I_{омс} \frac{d^2 w_{к}}{dx^2} dx, \quad (3)$$

где $I_{об}$, $I_{к}$, $I_{н.ст}$, $I_{н.пол}$, $I_{омс}$ – моменты инерции обшивки, кессона, стенки нервюры, полки нервюры и выреза крыла соответственно, E – модуль упругости материала обшивки, нервюры и кессона, $l_{омс}$ – координата центра выреза по оси x , χ – угол стреловидности по нейтральной оси кессона (рис. 1, 2), ν – коэффициент Пуассона.

Форму прогиба кессона $w_{к}$ аналогично (1) запишем в виде

$$w_k = w_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x \cos(\chi)}{2l}\right) \right). \quad (4)$$

Момент инерции обшивки запишем в виде

$$I_{об} = 2 \left(\frac{\delta^3 b(x)}{12} + b(x) \delta z_0^2(x) \right), \quad (5)$$

где $b(x)$ – хорда крыла в сечении с координатой x , $z_0(x)$ – высота приведенного сечения с координатой x (рис.5)

$$b(x) = b_0 \left(1 - \frac{x}{2l} \right), \quad z_0(x) = k_z z(x) = k_z \left(\frac{b(x)c - \delta}{2} \right), \quad (6)$$

Момент инерции кессона запишем в виде

$$I_k = \frac{b_k(x) h_{k1}^3(x) - (b_k(x) - 2\delta_k) h_{k2}^3(x)}{12}, \quad (7)$$

где $b_k(x)$ – хорда кессона в сечении с координатой x , $h_{k1}(x)$ – внешняя высота кессона с координатой x , $h_{k2}(x)$ – внутренняя высота кессона с координатой x .

$$b_k(x) = b(x)k, \quad h_{k1}(x) = b(x)c - 2\delta, \quad h_{k2}(x) = h_{k1}(x) - 2\delta_k, \quad (8)$$

где k – отношение хорда кессона к хорде крыла в сечении с координатой x .

Момент инерции нервюры запишем в виде

$$I_n = I_{н.см} + I_{н.н} = \frac{b(x)(h_n(x) - \delta_n)^3}{12} + 2 \left(b(x)\delta_n \left(\frac{h_n(x)}{2} \right)^2 + \frac{b(x)\delta_n^3}{12} \right), \quad (9)$$

где $h_n(x)$ – строительная высота нервюры в сечении x

$$h_n(x) = 2k_z \left(z(x) - \frac{\delta - \delta_n}{2} \right), \quad (10)$$

Момент инерции выреза запишем в виде

$$I_{овс.} = I_{об.овс} + I_{к.овс} = \frac{\pi}{2} \left(2R\delta z^2(x) + \frac{2R\delta^3}{12} \right) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\delta_k h_{k2}^3(x)}{12} + 2 \left(2R\delta_k a_k \left(\frac{h_{k2}(x) + \delta_k}{2} \right)^2 + \frac{2R\delta_k^3 a_k}{12} \right) \right), \quad (11)$$

где $a_k = [0, 1]$ – коэффициент, показывающий на сколько радиусов R пробиты полки кессона (рис. 3).

Подставляя выражения (1, 4, 5, 7, 9, 11) в (3) и интегрируя по координате x , получим для потенциальных энергий деформаций следующие выражения.

Потенциальная энергия деформации обшивки примет вид

$$U_{об} = Ew_0^2 Q_{об}, \quad (12)$$

Выражение для $Q_{об}$ запишется в виде

$$Q_{об} = \frac{1}{(1-\nu^2)48B_1^4} * \left(\begin{aligned} & 3B_1 \sin(2B_1 l) \left(G_5 \left(2B_1^2 l (G_1 l^2 + G_2 l + G_3) - 3G_1 l - G_2 \right) + 2G_4 B_1^2 \right) + \\ & + 3G_5 \cos(B_1 l)^2 \left(2B_1^2 (6G_1 l^2 + 2G_2 l + G_3) - 3G_1 \right) + \\ & + B_1^2 \left(\begin{aligned} & B_1^2 l (G_5 l (3G_1 l^2 + 4G_2 l + 6G_3) + 12G_4) - \\ & 3G_5 (3G_1 l^2 + 2G_2 + 2G_3) \end{aligned} \right) + 9G_1 G_5 \end{aligned} \right), \quad (13)$$

где

$$B_1 = \frac{\pi}{2l}, \quad G_1 = 2b_0^3 \delta k_z^2 B_3^3 c^2, \quad G_2 = 2b_0^2 \delta k_z^2 B_3^2 c (2\delta - b_0 c), \quad B_3 = \frac{\eta - 1}{\eta l},$$

$$G_3 = -2b_0 \delta B_3 \left(k_z^2 (\delta - b_0 c)^2 + \frac{\delta^2}{3} \right), \quad G_4 = \frac{b_0 \delta^3 \pi^4}{96l^4}, \quad G_5 = \frac{\pi^4}{64l^4}. \quad (14)$$

Потенциальная энергия деформации кессона примет вид

$$U_\kappa = Ew_0^2 Q_\kappa, \quad (15)$$

Выражение для Q_κ запишется в виде

$$Q_\kappa = \frac{L_5}{(1-\nu^2)24B_2^4} \left(\begin{aligned} & 2B_2 \sin(2B_2 r) \left(\begin{aligned} & 2B_2^2 (L_1 r^3 + L_2 r^2 + L_3 r + L_4) - \\ & -3L_1 r - L_2 \end{aligned} \right) + \\ & + 3 \cos(B_2 r)^2 \left(2B_2^2 (3L_1 r^2 + 2L_2 r + L_3) - 3L_1 \right) + 9L_1 + \\ & + B_2^2 \left(\begin{aligned} & B_2^2 (3L_1 r^4 + 4L_2 r^3 + 2L_3 r^2 + 12L_4) - 9L_1 r^2 - \\ & -6L_2 r - 6L_3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right), \quad (16)$$

где

$$B_2 = \frac{\pi \cos(\chi)}{2l}, \quad L_1 = 2\delta_\kappa b_0^3 B_3^3 c^2 (1 + 3k),$$

$$L_2 = 3b_0^2 B_3^2 c \left(k(b_0 c - 2\delta)^2 - (b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa) \left(\begin{aligned} & k(b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa) + \\ & + b_0 k - 2\delta_\kappa \end{aligned} \right) \right),$$

$$L_3 = b_0 B_3 \left(\begin{aligned} & 2(b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa) (k(2b_0 c - \delta - \delta_\kappa) - 3c\delta_\kappa) - \\ & - k(b_0 c - 2\delta)^2 (3c - b_0 c + 2\delta) \end{aligned} \right), \quad (17)$$

$$L_4 = b_0 k (b_0 c - 2\delta)^3 - (b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa)^2 (b_0 k - 2\delta_\kappa), \quad L_5 = \frac{\pi^4 \cos(\chi)^4}{192l^4}.$$

Потенциальная энергия деформации нервюры примет вид

$$U_{н.см} = Ew_0^2 (Q_{н.см} + Q_{н.пол}). \quad (18)$$

Выражение для $Q_{н.см}$ запишется в виде

$$Q_{н.см} = \frac{N_5}{(1-\nu^2)240B_1^5} * \left(\begin{aligned} & 15 \sin(2B_1\delta_n) \left(B_1 \left(\begin{aligned} & 2B_1^4 (N_1\delta_n^4 + N_2\delta_n^3 + N_3\delta_n^2 + N_4\delta_n + N_6) + \\ & 3N_1(1-2\delta_n^2) - 3N_2\delta_n - N_3 \end{aligned} \right) \right) + \\ & * + 15 \cos(B_1\delta_n)^2 \left(2B_1^2 (4N_1\delta_n^3 + 3N_2\delta_n^2 + 2N_3\delta_n + N_4) - 3N_2 - 12N_1\delta_n \right) + \\ & + B_1^2 (B_1^2\delta_n (15N_2\delta_n^3 + 20N_3\delta_n^2 + \delta_n (60N_4 + 12N_1) + 120N_6) - \\ & - 15(4N_1\delta_n^3 + 3N_2\delta_n^2 + 2N_3\delta_n + 2N_4) + 45(N_2 + 2N_1\delta_n)) \end{aligned} \right), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= -b_0^3 k_z^3 B_3^4 c^3, \quad N_2 = b_0^2 k_z^2 B_3^2 c^2 (b_0 c - 3(k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n)), \\ N_3 &= 3b_0 c k_z B_3^2 (k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n) \left(\begin{aligned} & b_0 c k_z + \\ & + (k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n) \end{aligned} \right), \\ N_4 &= -B_3 (k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n)^2 (3b_0 c k_z + (k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n)), \quad (20) \\ N_5 &= \frac{\pi^4 b_0}{192l^4}, \quad N_6 = (k_z (b_0 c - 2\delta - \delta_n) - \delta_n)^3. \end{aligned}$$

Выражение для $Q_{н.пол}$ запишется в виде

$$Q_{н.пол} = \frac{M_5}{(1-\nu^2)48B_1^4} * \left(\begin{aligned} & 3B_1 \sin(2B_1 b_n) (2B_1^2 (M_1 b_n^3 + M_2 b_n^2 - M_3 b_n + M_4) - 3M_1 b_n - M_2) + \\ & * + 3 \cos(B_1 b_n)^2 (2B_1^2 (3M_1 b_n^2 + 2M_2 b_n - M_3) - 3M_1) + \\ & + B_1^2 (B_1^2 b_n (3M_1 b_n^3 + 4M_2 b_n^2 - 6M_2 b_n + 12M_4) + 9M_1 (1 - b_n^2) + 6M_3) \end{aligned} \right), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= -2b_0^3 \delta_n k_z B_3^3 c^2, \quad M_2 = 2b_0^2 \delta_n k_z^2 B_3^2 c (2b_0 c - 2\delta - \delta_n), \\ M_3 &= b_0 \delta_n B_3 \left(\frac{\delta_n^2}{6} + 2k_z^2 \left(\frac{b_0 c}{2} - \delta - \frac{\delta_n}{2} \right) \left(\frac{5b_0 c}{2} - \delta - \frac{\delta_n}{2} \right) \right), \quad (22) \\ M_4 &= b_0 \delta_n \left(2k_z^2 \left(\frac{b_0 c}{2} - \delta - \frac{\delta_n}{2} \right)^2 + \frac{\delta_n^2}{6} \right), \quad M_5 = \frac{\pi^4}{16l^4}. \end{aligned}$$

В работе [7] показано, что потенциальную энергию деформации кругового выреза радиусом R для упрощения выкладок можно моделировать потенциальной энергией деформации квадратного выреза со стороной $2R$ умножением последней на $\pi/4$. При этом погрешность расчетов составляет не более 1%.

С учетом этого потенциальная энергия деформации выреза обшивки примет вид

$$U_{об.омв} = Ew_0^2 Q_{об.омв}. \quad (23)$$

Выражение для $Q_{об.омв}$ запишется в виде

$$Q_{об.омс} = \frac{B_1}{24(1-\nu^2)} * \left(\begin{aligned} & \frac{2}{3} \sin(2B_1 r_1) (2B_1^2 (K_1 r_1 l^2 + K_2 r l + K_3) - K_1) - \\ & * \frac{3}{2} \sin(B_1 r_2) (2B_1^2 (K_1 r^2 + K_2 r + K_3) - K_1) + \\ & + B_1 \left(3 \cos(B_1 r_1)^2 (2K_1 r_1 + K_2) - 3 \cos(B_1 r_2)^2 (2K_1 r_2 + K_2) + \right. \\ & \left. + B_1^2 (2K_1 (r_1^3 - r_2^3) + 3K_2 (r_1^2 - r_2^2) + 6K_3 r_1) + 3K_1 (r_1 - r_2) \right) \end{aligned} \right), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{b_0^2 \delta \pi B_3^2}{4}, \quad K_2 = \frac{b_0 \delta^2 \pi R B_3 c}{2}, \quad r_1 = l_{омс} - R, \\ K_3 &= \delta \pi R \left(\frac{\delta^2}{3} - \frac{b_0 \delta c}{2} + \frac{b_0^2 c^2}{4} \right), \quad r_2 = l_{омс} + R. \end{aligned} \quad (25)$$

Потенциальная энергия деформации выреза кессона примет вид

$$U_{к.омс} = E W_0^2 Q_{к.омс}. \quad (26)$$

Выражение для $Q_{к.омс}$ запишется в виде

$$Q_{к.омс} = \frac{J_5}{(1-\nu^2) 48 B_2^4} * \left(\begin{aligned} & 3 \cos(B_2 r_3)^2 (2B_2^2 ((3J_1 r_3^2 + 2J_2 r_3 + J_3) + a_\kappa (2J_6 r_3 + J_7)) - 3J_1) - \\ & - 3 \cos(B_2 r_4)^2 (2B_2^2 ((3J_1 r_4^2 + 2J_2 r_4 + J_3) + a_\kappa (2J_6 r_4 + J_7)) - 3J_1) + \\ & * + B_2 \left(\begin{aligned} & 3 \sin(2B_2 r_3) \left(\begin{aligned} & \left(2B_2^2 (r_3 (J_1 r_3^2 + J_2 r_3 + J_3) + J_4) - J_2 \right) + \\ & + a_\kappa (2B_2^2 (J_6 r_3^2 + J_7 r_3 + J_8) - J_6) \end{aligned} \right) - \\ & - 3 \sin(2B_2 r_4) \left(\begin{aligned} & \left(2B_2^2 (r_4 (J_1 r_4^2 + J_2 r_4 + J_3) + J_4) - J_2 \right) + \\ & + a_\kappa (2B_2^2 (J_6 r_4^2 + J_7 r_4 + J_8) - J_6) \end{aligned} \right) + \end{aligned} \right) + \\ & + B_2 \left(\begin{aligned} & B_2^2 (r_3 - r_4) \left(\begin{aligned} & 3(r_3 + r_4) \left(\begin{aligned} & (J_1 (r_3^2 + r_4^2) + 2J_3) \end{aligned} \right) + \\ & + 2a_\kappa J_7 \end{aligned} \right) + \\ & + 4(r_3^2 - r_3 r_4 + r_4^2) (J_2 + 4a_\kappa J_6) \end{aligned} \right) + \\ & + 3(r_3 - r_4) (2J_2 + 3a_\kappa J_6) - 9(r_3^2 + r_4^2) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{b_0^3 \delta_\kappa B_3^3 c^3}{12}, \quad J_2 = \frac{b_0^2 \delta_\kappa (b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa) B_3^2 c^2}{4}, \\
 J_3 &= -\frac{b_0 \delta_\kappa (b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa) B_3^2 c}{4}, \quad J_4 = \frac{\delta_\kappa (b_0 c - 2\delta - 2\delta_\kappa)^3}{12}, \\
 J_5 &= \frac{\pi^5 \cos(\chi)^4}{64l^4}, \quad J_6 = b_0^2 \delta_\kappa R B_3^2 c^2, \quad r_3 = \frac{l_{омв}}{\cos(\chi)} - R, \\
 J_7 &= -4b_0 \delta_\kappa R \left(\frac{b_0 c}{2} - \delta - \frac{\delta_\kappa}{2} \right) B_3 c, \quad r_4 = \frac{l_{омв}}{\cos(\chi)} + R.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Строится приближенное решение задачи, для которого будем считать достаточным выполнение кинематических граничных условий на внешнем контуре крыла. То есть, решая задачу на основе энергетического метода, будем учитывать влияние выреза только на потенциальную энергию деформации крыла [7].

Максимально возможная работа нагрузки с давлением P , совершаемая над крылом, равна

$$A = P \int_0^l b(x) w dx = P w_0 Y. \tag{29}$$

Здесь Y определяется выражением

$$Y = \frac{b_0 (2B_3 (1 - \cos(B_1 l)) + B_1 (B_1 l (B_3 l - 2) + 2 \sin(B_1 l) (1 - B_3 l)))}{2B_1^2}, \tag{30}$$

Приравняв выражения (2) и (29) для потенциальной энергии деформации и работы внешних сил и преобразуя полученные результаты, получим зависимость для максимальной амплитуды прогиба поврежденного кессонного крыла

$$w_0 = \frac{PY}{E(Q_{об} + Q_\kappa + Q_{н.ст} + Q_{н.пол} - Q_{об.омв} - Q_{\kappa.омв})}, \tag{31}$$

При отсутствии выреза в крыле выражения $Q_{об.омв} = Q_{\kappa.омв} = 0$ в зависимости (31). Запишем выражение для изгибающего момента в виде

$$M_u(x) = EI_{кр}(x) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2I_{кр}(x) \sigma_{\delta.кр}(x)}{z(x)}, \tag{32}$$

где $\sigma_{\delta.кр}(x)$ – действующие напряжения в крыле по размаху с координатой x .

С учетом (1), (4) и (32) получим выражения для действующих напряжений в заделке (при $x = 0$) в обшивке и кессоне поврежденного крыла

$$\sigma_{об.омв.x=0} = \frac{w_0 \pi^2 E (b_0 c - \delta)}{16l^2}, \tag{33}$$

$$\sigma_{\kappa.омв.x=0} = \frac{w_0 \pi^2 E \cos^2(\chi) (b_0 c - 2\delta)}{16l^2}, \tag{34}$$

и напряжения в сечении хорды крыла по оси отверстия ($x=l_{омв}$) (без учета концентрации напряжений около отверстия)

$$\sigma(l_{омв}) = \frac{w_0 \pi^2 z(l_{омв}) E [I_{об}(l_{омв}) + I_{\kappa}(l_{омв})] \cos\left(\frac{\pi l_{омв}}{2l}\right)}{2l^2 [I_{об}(l_{омв}) + I_{\kappa}(l_{омв}) - I_{омв}(l_{омв})]}, \tag{35}$$

где w_0 – определяется выражением (31).

При наличии во внешней нагрузке крутящего момента $M_{кр}$ в выражение (32) следует ввести расчетный момент M_p , величина которого будет зависеть

как от $M_{кр}$ и M_u так и от принятой теории прочности. Он равен

- по теории наибольших нормальных напряжений

$$M_{p1} = \frac{1}{2} \left[M_u + \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2} \right], \quad (36)$$

- по теории наибольших удлинений

$$M_{p2} = 0,35M_u + 0,65\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}, \quad (37)$$

- по теории наибольших касательных напряжений

$$M_{p3} = \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}, \quad (38)$$

- по теории потенциальной энергии формоизменения

$$M_{p4} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}. \quad (39)$$

Касательные напряжения вдоль оси z в сечении с координатой x :

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{(b(x)c)^2}{4} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right) = \frac{E\pi^3 w_0}{64(1-\mu^2)} \frac{(b(x)c)^2}{l^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right). \quad (40)$$

Нормальные напряжения σ_z , действующие по площадкам, параллельным срединной плоскости в сечении с координатой x :

$$\sigma_z = \frac{E(b(x)c)^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{d^4w}{dx^4} \right) = -\frac{E\pi^4 w_0}{384(1-\mu^2)} \frac{(b(x)c)^3}{l^4} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right). \quad (41)$$

В зависимостях (40) и (41) w_0 определяется по (31).

Нормальные напряжения вдоль оси y определяются зависимостью:

$$\sigma_y = \mu\sigma_x. \quad (42)$$

Эквивалентные напряжения:

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (43)$$

Результаты расчета напряженно-деформируемого состояния консоли крыла с отверстием

В качестве примера рассмотрено крыло со следующими характеристиками: $b_0 = 390$ мм; $l = 878$ мм; $E = 0,72 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$; $\eta = 2$, $\chi = 6$ град., $\delta = 1,5$ мм; $\delta_n = 3$ мм, $\delta_k = 3$ мм; $k_z = 0,595$; $c = 0,11$, $k = 0,36$, $\sigma_t = 300 \cdot 10^6$ Па, при действующем внешнем давлении $P = 43000$ Па.

На рис. 4 показана зависимость отношения действующих эквивалентных напряжений в обшивке и кессоне крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести в заделке $\sigma_{oms.max} / \sigma_{0,2}$ и в сечении по оси отверстия $\sigma_{oms} / \sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия $c = l_{oms} / l$ по размаху крыла. Из рис. 4 видно, что обшивка теряет несущую способность раньше кессона, следовательно, примем за несущую способность крыла несущую способность обшивки.

На рис. 5, 6 показаны зависимости отношения действующих эквивалентных напряжений в обшивке крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{oms.max} / \sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия s по размаху крыла при различных радиусах отверстия R при различных коэффициентах перебития кессона a_k .

На рис. 7 показана зависимость отношения действующих эквивалентных напряжений в обшивке крыла с отверстием в сечении у заделки к условному пределу текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{0,2}$ и отношения действующих напряжений в обшивке в сечении по отверстию к условному пределу текучести $\sigma_{отв.}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия s по размаху крыла при различных радиусах отверстия R при перекрытии кессона отверстием с коэффициентом $a_k = 0,6$.

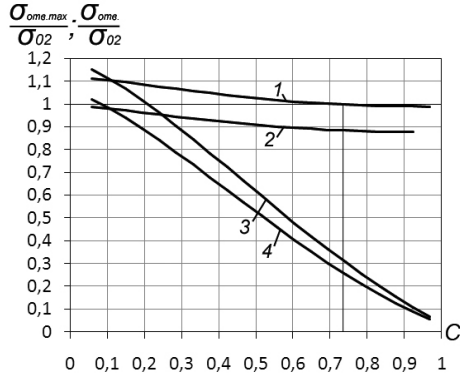


Рис. 4. Зависимость отношения действующих напряжений в обшивке и кессоне крыла в заделке к условному пределу текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{0,2}$ и действующих напряжений в обшивке и кессоне крыла в сечении по оси $\sigma_{отв.}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , при $R = 24$ мм и $a_k = 0,6$ (кривая 1, 3- обшивка; кривая 2, 4 – кессон).

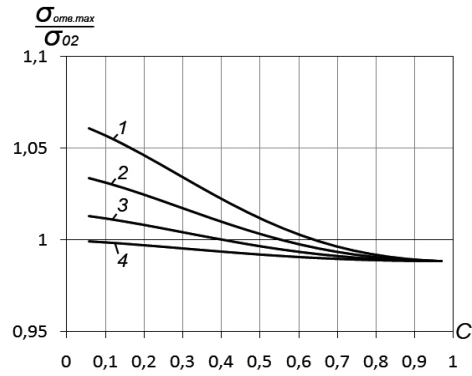


Рис. 5. Зависимость отношения действующих напряжений в обшивке крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0$ (кривая 1 – $R = 25$ мм, 2 – $R = 20$ мм, 3 – $R = 15$ мм, 4 – $R = 10$ мм)

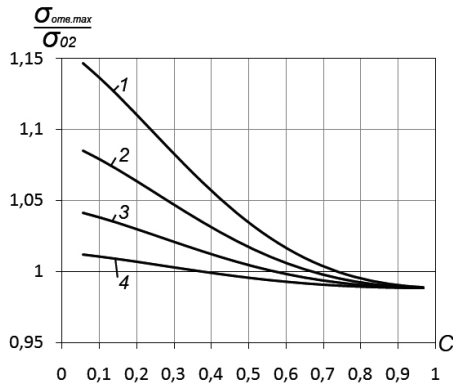


Рис. 6. Зависимость отношения действующих напряжений в обшивке крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0,6$ (кривая 1 – $R = 25$ мм, 2 – $R = 20$ мм, 3 – $R = 15$ мм, 4 – $R = 10$ мм)

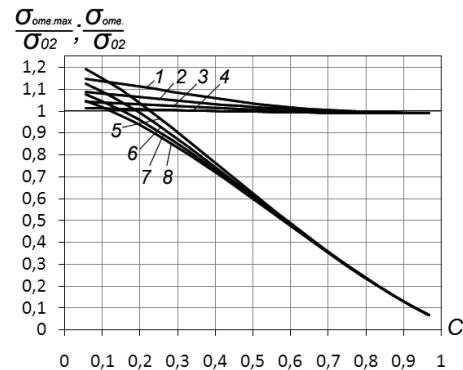


Рис. 7. Зависимость отношения действующих напряжений в обшивке в сечении у заделки к условному пределу текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c (1, 2, 3, 4 - обшивка с отверстиями $R = 50, 40, 30, 20$ мм соответственно при $a_k = 0,6$) и отношения действующих напряжений в обшивке в сечении по отверстию к условному пределу текучести $\sigma_{отв.}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c (5, 6, 7, 8 - обшивка с отверстиями $R = 25, 20, 15, 10$ мм соответственно при $a_k = 0,6$).

**Определение критической нагрузки консоли крыла с отверстием
Устойчивость обшивки подкрепленной кессоном**

Критическое погонное сжимающее усилие на сжатую обшивку и сжатую часть кессона консоли крыла найдем из условия равенства потенциальной энергии деформации и работы:

$$\left(\frac{U_{об} + U_{к} - U_{об.отв} - U_{к.отв}}{2} \right) = A_x \quad (42)$$

Примем для прогиба сжимаемой части консоли выражение (1.1).

Энергии деформации, входящие в (42) определяются зависимостями (12), (15), (23), (26).

Максимально возможная работа погонной сжимающей нагрузки N_x , совершаемая над сжимаемой частью консоли крыла равна:

$$A_x = \frac{N_{x.кр}}{2} \int_0^l b(x) \frac{dw}{dx} dx = \frac{N_{x.кр} w_0^2 b_0}{32l\eta} [4(1-\eta) + \pi^2(\eta+1)]. \quad (43)$$

Из (42) найдем критическую погонную силу для обшивки и кессона консоли крыла:

$$N_{x.кр.}^{\Sigma} = \frac{16l\eta E(Q_{об} + Q_{к} - Q_{об.отв} - Q_{к.отв})}{b_0 [4(1-\eta) + \pi^2(\eta+1)]}. \quad (44)$$

Действующее погонное усилие на сжатую часть консоли определим исходя из выражения:

$$N_{x.об.} = \frac{M_u(x)}{z(x)b(x)}, \quad (45)$$

где $M_u(x)$ определяется согласно (32).

Устойчивость обшивки консоли крыла

Из (42) найдем критическую погонную силу обшивки консоли крыла:

$$N_{x.кр.}^{об.} = \frac{16l\eta E(Q_{об} - Q_{об.отв})}{b_0 [4(1-\eta) + \pi^2(\eta+1)]}. \quad (46)$$

Действующее погонное усилие на сжатую обшивку определим исходя из выражения:

$$N_{x.об.} = \frac{M_u(x)S_{об}(x)}{z(x)b(x)S_{кр}(x)} \quad (47)$$

где $S_{об}(x)$ – площадь сечения обшивки, $S_{кр}(x)$ – площадь сечения обшивки и кессона.

Устойчивость кессона консоли крыла

Из (42) найдем критическую погонную силу кессона консоли крыла:

$$N_{x.кр.}^{кес.} = \frac{16l\eta E(Q_{к} - Q_{к.отв})}{b_0 [4(1-\eta) + \pi^2(\eta+1)]}. \quad (48)$$

Действующее погонное усилие на сжатую часть кессона определим исходя из выражения:

$$N_{x.кес.} = \frac{M_u(x)S_{кес}(x)}{z(x)b(x)S_{кр}(x)}, \quad (49)$$

где $S_{кес}(x)$ – площадь сечения кессона, $S_{кр}(x)$ – площадь сечения обшивки и кессона.

Результаты расчета по определению критической нагрузки консоли крыла с отверстием

На рис. 8 – 10 показаны зависимости отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x,кр.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x,кр.}^{\Sigma}$ при различных радиусах отверстия R и коэффициентах перебития кессона a_k от изменения центра расположения отверстия c по размаху крыла.

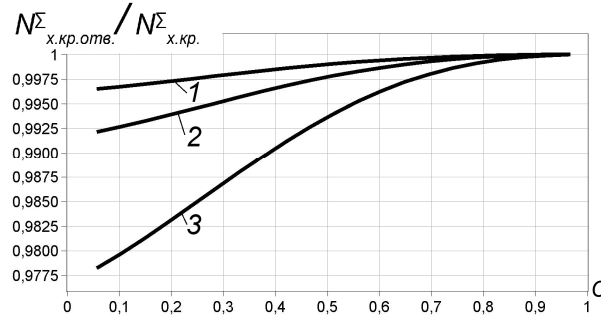


Рис. 8. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x,кр.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x,кр.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0$ (кривая 1 – $R = 10$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 25$ мм)

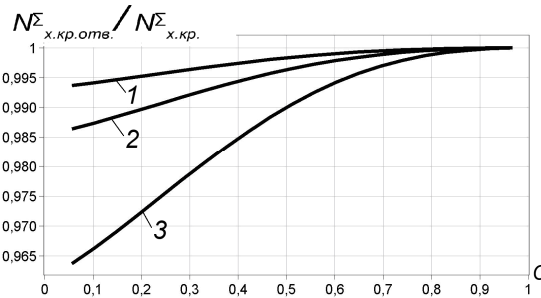


Рис. 9. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x,кр.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x,кр.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0,5$ (кривая 1 – $R = 10$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 25$ мм)

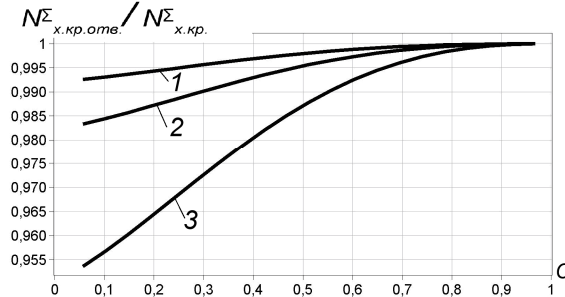


Рис. 10. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x,кр.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x,кр.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 1$ (кривая 1 – $R = 10$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 25$ мм)

На рис. 11 – 13 показаны зависимости отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к действующим погонным усилиям на обшивку и кессон консоли крыла $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ при различных радиусах отверстия R и коэффициентах перебития кессона a_k от изменения центра расположения отверстия c по размаху крыла.

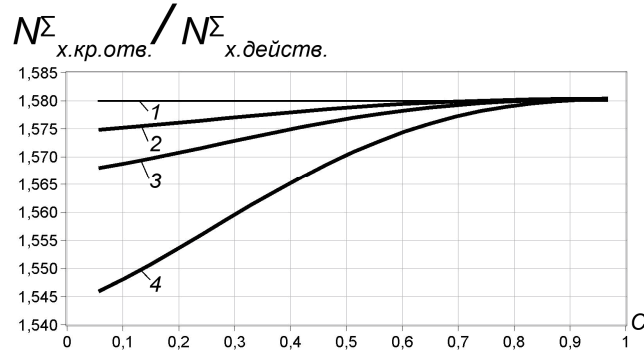


Рис. 11. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к действующим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0$ (кривая 1 – $R = 0$ мм, 2 – $R = 10$ мм, 3 – $R = 15$ мм, 4 – $R = 25$ мм)

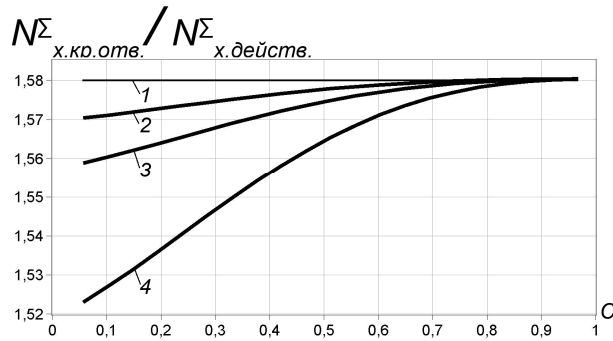


Рис. 12. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к действующим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 0,5$ (кривая 1 – $R = 0$ мм, 2 – $R = 10$ мм, 3 – $R = 15$ мм, 4 – $R = 25$ мм)

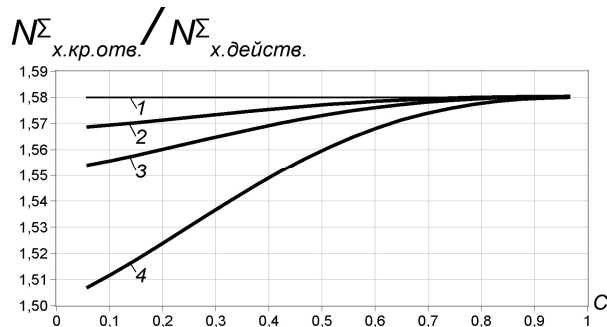


Рис. 13. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и кессона консоли крыла с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к действующим погонным усилиям обшивки и кессона консоли крыла без отверстия $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c , $a_k = 1$ (кривая 1 – $R = 0$ мм, 2 – $R = 10$ мм, 3 – $R = 15$ мм, 4 – $R = 25$ мм)

Результаты исследования напряженно-деформируемого состояния консоли крыла с отверстием методом конечного элемента (МКЭ)

На рис. 14-16 показана зависимость отношения действующих напряжений в консоли крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.мах}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c по размаху консоли при радиусе отверстия $R = 24$ мм, при различных значениях коэффициента перебития кессона a_k . Приведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ в программе SOLIDWORKS.

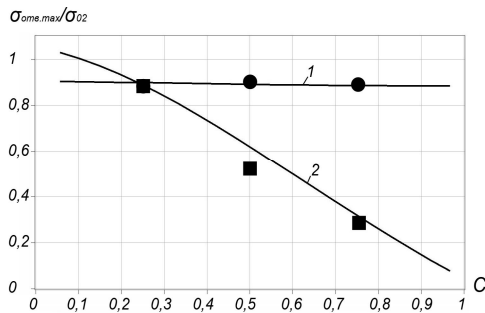


Рис. 14. Зависимость отношения действующих напряжений в консоли крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.мах}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R = 25$ мм, $a_k = 0$ (кривая 1 – в заделке, кривая 2 – в хорде по сечению отверстия, ● – МКЭ в заделке, ■ – МКЭ в хорде по сечению отверстия)

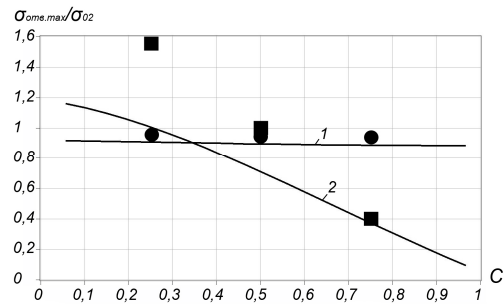


Рис. 15. Зависимость отношения действующих напряжений в консоли крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.мах}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R = 25$ мм, $a_k = 0,4$ (кривая 1 – в заделке, кривая 2 – в хорде по сечению отверстия, ● – МКЭ в заделке, ■ – МКЭ в хорде по сечению отверстия)

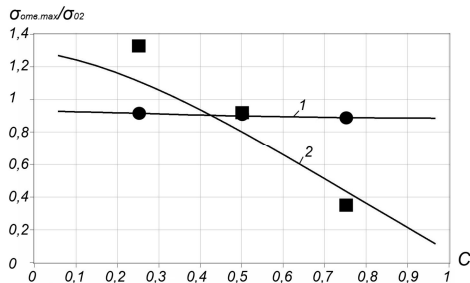


Рис. 16. Зависимость отношения действующих напряжений в консоли крыла с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.мах}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R = 25$ мм, $a_k = 1$ (кривая 1 – в заделке, кривая 2 – в хорде по сечению отверстия, ● – МКЭ в заделке, ■ – МКЭ в хорде по сечению отверстия)

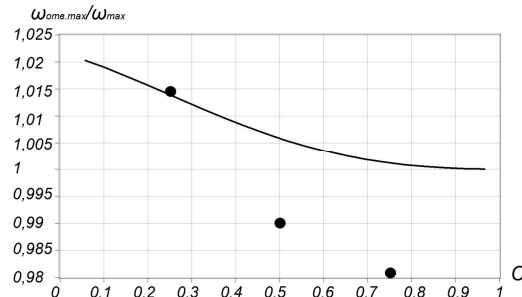


Рис. 17. Зависимость отношения максимального прогиба консоли крыла с отверстием к максимальному прогибу консоли без отверстия $w_{отв.мах}/w_{мах}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R=25$ мм, $a_k = 0$ (кривая 1 – теория, ● – МКЭ)

На рис. 17-19 показана зависимость отношения максимального прогиба консоли крыла с отверстием к максимальному прогибу консоли без отверстия $w_{отв.мах}/w_{мах}$ от изменения центра расположения отверстия c по размаху консоли при радиусе отверстия $R=25$ мм, при различных значениях коэффициента перебития кессона a_k . Приведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ в программе SOLIDWORKS.

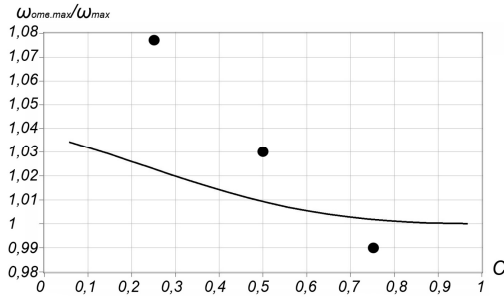


Рис. 18. Зависимость отношения максимального прогиба консоли крыла с отверстием к максимальному прогибу консоли без отверстия $w_{отв.мах}/w_{мах}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R=25$ мм, $a_k = 0,4$ (кривая 1 – теория, ● – МКЭ)

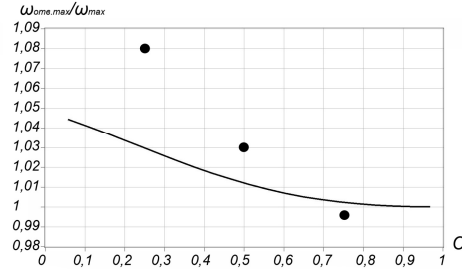


Рис. 19. Зависимость отношения максимального прогиба консоли крыла с отверстием к максимальному прогибу консоли без отверстия $w_{отв.мах}/w_{мах}$ от изменения центра расположения отверстия c , $R=25$ мм, $a_k=1$. (кривая 1 – теория, ● – МКЭ)

В табл. 1 приведены значения действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв.мах}$ консоли крыла, полученные в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R = 25$ мм по размаху консоли, при различных значениях коэффициента перебития кессона a_k .

Табл. 1 Сравнение действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв.мах}$ консоли крыла

Положение отверстия $R=25$ мм по размаху c	$\sigma_{отв.мах}$ [МПа] Теория	$\sigma_{отв.мах}$ [МПа] МКЭ	Разница в %
$a_k=0$			
0,25	273	260	4,8
0,5	270	270	0,0
0,75	269	275	2,1
$a_k=0,4$			
0,25	276	280	1,4
0,5	272	260	0,7
0,75	270	245	9,3
$a_k=1$			
0,25	278	270	2,9
0,5	273	240	12,2
0,75	270	260	3,7

Табл. 2 Сравнение максимальных прогибов $w_{отв.мах}$ консоли крыла

Положение отверстия $R=25$ мм по размаху c	$w_{отв.мах}$ [мм] Теория	$w_{отв.мах}$ [мм] МКЭ	Разница в %
$a_k=0$			
0,25	54,7	48,4	11,5
0,5	54,3	47,6	12,4
0,75	54,0	47,0	13,0
$a_k=0,4$			
0,25	55,2	51,4	6,9
0,5	54,4	49,1	9,8
0,75	54,0	47,6	11,9
$a_k=1$			
0,25	55,6	51,6	7,1
0,5	54,6	49,5	9,3
0,75	54,0	47,5	12,0

В табл. 2 приведены значения максимальных прогибов $w_{\text{отв.мах}}$ консоли крыла, полученные в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R = 25$ мм по размаху консоли, при различных значениях коэффициентах перебития кессона a_k .

Л и т е р а т у р а

1. Зайцев С.Е., Сафронов В.С. Аналитическая оценка несущей способности плоских пластин с отверстием при изгибе// *Авиакосмическое приборостроение*. – Изд-во «Научтехлитиздат». – 2010. – №7.
2. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости трехслойных пластин с отверстием при действии осевого сжатия// *Известия РАН: «Механика твердого тела»*. – 1998. – № 2,
3. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости восстановленных трехслойных пластин при действии осевого сжатия// *Известия РАН: «Механика твердого тела»*. – 1999. – № 3.
4. Сафронов В.С. Аналитическая оценка устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки с отверстием при комплексном нагружении// *«Вестник МАИ»*, Изд-во МАИ-ПРИНТ, т.16, № 5, 2009.
5. Сафронов В.С., Туркин И.К., Чан Ба Тан. Влияние компенсации отверстия на устойчивость пластины// *«Полет»*. – М.: Изд-во Машиностроение, № 6, 2004.
6. Евдокимов Е.В., Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование несущей способности цилиндрической оболочки с вырезом// *Известия РАН: «Механика твердого тела»*. – 2007. – №1.
7. Сафронов В.С. Аналитическая оценка несущей способности восстанавливаемых силовых конструкций летательных аппаратов: Монография. – М.: МАИ – ПРИНТ, 2009. – 216 с.

R e f e r e n c e s

1. Zaytsev, S.E., Safronov, V.S. (2010). Analytical estimation of bearing ability of flat panels with the aperture at the bend, *Aerospace instrument making*, № 7.
2. Safronov, V.S., Turkin, I.K. (1998). Investigation of the stability of three-layer plates with a hole under the action of axial compression, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 2.
3. Safronov, V.S., Turkin, I.K. (1999). Investigation of the stability of restored sandwich plates under the action of axial compression, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 3.
4. Safronov, V.S. (2009). Analytical assessment of sustainability backed by a cylindrical shell with a hole at the complex loading, *Vestnik MAI*, Publishing House of the MAI-PRINT, vol.16, № 5.
5. Safronov, V.S., Turkin, I.K., Tran Ba Tan (2004). Impact on the stability of the compensation hole plate, *Flight*, Moscow: Publisher Engineering, № 6.
6. Evdokimov, E.V., Safronov, V.S., Turkin, I.K. (2007). Investigation of the bearing capacity of cylindrical shells with a cut, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 1.
7. Safronov, V.S. (2009). Analytical evaluation of the carrying capacity of renewable power structures of aircraft: Monograph, Moscow: MAI - PRINT, 216 p.

INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE CONSOLE WITH HOLE

Zaytsev S.E.*, Safronov V.S.**

* *OOO "ANT-Inform"*, ** *Moskovskiy aviatsionniy institute (GTU)*

The paper presents an analytical model estimates the stress-strain state and stability of the wing with a cutout, built on the basis of the energy method. The results of the calculations and their comparison with the results obtained by the finite element. Obtained in this study are calculated according to analytical.

KEYWORDS: Console wing cutout, stress, deflection, stress-strain state, stability, energy method.