

Теория упругости

РОСТ КОГЕЗИОННОЙ ТРЕЩИНЫ В СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ

М.В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ, канд. ф.-м. наук, доцент
Институт математики и механики НАН Азербайджана
Азербайджан, AZ1129, Баку, ул. Н. Туси, д. 14, кв. 63,
e-mail: mir-salim-zade@mail.ru

Рассматривается неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, ослабленная одной прямолинейной трещиной. В концевых зонах берега трещины взаимодействуют. Находятся коэффициенты интенсивности напряжений. Для определения предельно-равновесного состояния трещины используется двухпараметрический критерий разрушения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стрингерная пластина, когезионная трещина, силы сцепления, коэффициенты интенсивности напряжений.

Используя подкрепляющие элементы жесткости (стрингеры) на пути движения трещины можно добиться замедления роста трещины, и возможно, ее остановки [1]. В реальных конструкционных материалах вокруг концевых областей трещины действуют силы сцепления, сдерживающие ее раскрытие. Учет сил сцепления между берегами трещины важен для описания процесса разрушения при расчете конструкций и изделий, поэтому продолжается активное развитие когезионных моделей трещин с явным учетом нелинейных законов взаимодействия поверхностей [2, 3].

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную пластину, усиленную регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники. Стрингерная пластина ослаблена одной прямолинейной трещиной (рис. 1). Ребра жесткости укреплены симметрично относительно поверхности пластины в дискретных точках $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$ ($m=0,1,2,\dots; k=1,2,\dots$) с постоянным шагом по всей длине стрингера. Система подкрепляющих элементов ферменного типа, и ослабление стрингеров за счет постановки точек крепления не учитывается. Точки крепления считаются одинаковыми, с радиусом (площадкой сцепления) малым по сравнению с их шагом и другими характерными размерами.

Пластина и стрингеры взаимодействуют в одной плоскости и только в точках крепления. На бесконечности стрингерная пластина подвергается однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Относительно стрингеров принимается гипотеза об одномерном континууме, т.е. считается, что при деформации толщина стрингера остается неизменной, а напряженное состояние является одноосным. Стрингеры не сопротивляются изгибу и работают только на растяжение. В пластине реализуется плоское напряженное состояние.

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер с пластиной. Величины сосредоточенных сил заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи.

Используется модель трещины с концевыми зонами, в которых ее берега взаимодействуют. Учитывается сингулярность напряжений в вершине трещины, что особенно интересно для композитных материалов. Взаимодействие берегов трещины сдерживает ее раскрытие и моделируется путем введения между

берегами трещины связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования. В связях между берегами трещины при действии внешней нагрузки будут возникать усилия $q(x)$, имеющие из-за симметрии задачи относительно оси абсцисс только нормальную составляющую. Величина этих напряжений $q(x)$ также заранее неизвестна и определяется в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

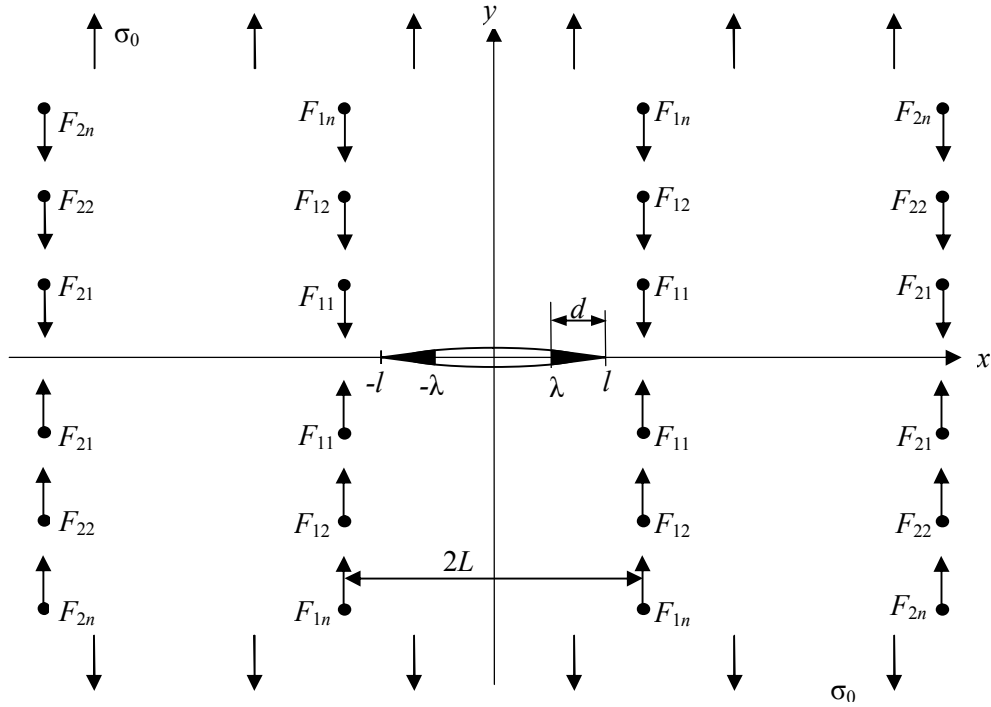


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Выделим части трещины длиной d (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам ($\lambda \leq |x| \leq l$, $y = 0$, $d = l - \lambda$), в которых берега трещины взаимодействуют. Размер концевых зон, в которых осуществляется взаимодействие берегов трещины, зависит от вида материала.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \lambda, \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q(x) \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda < |x| \leq l.$$

Основные соотношения задачи необходимо дополнить уравнением, связывающим перемещения раскрытия трещины и усилия в связях. Это уравнение в рассматриваемой задаче можно представить в виде

$$v^+(x_1) - v^-(x_1) = C(x_1, q)q(x_1) \quad (2)$$

где x_1 – аффикс точек берегов трещины в концевой зоне; функцию $C(x_1, q)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от напряжения связей.

На основании формул Колосова-Мухелишвили [4] и граничных условий на берегах трещины задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + i\bar{\Phi}'(t) + \Psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq \lambda \\ q(x) & \text{при } \lambda < |x| \leq l \end{cases} \quad (3)$$

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (3) ищем в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (4)$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$; $\Psi(z) = \psi'(z)$; функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной среде, т.е. в случае отсутствия трещины.

В рассматриваемом случае, в качестве $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ следует взять [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 z - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} ' P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} \\ \psi_0(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 z - \frac{i\kappa}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} ' P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} ' P_{mn} \left(\frac{m_*L - iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \frac{m_*L + iy_0n}{z - m_*L + iy_0n} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $n = m = 0$; P_{mn} – сосредоточенные силы, подлежащие определению; h – толщина пластины; κ – упругая постоянная Мусхелишвили; $m_* = 2m + 1$.

Для определения аналитических функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z) = z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)$ на основании (4)-(5) получим следующую граничную задачу

$$\text{при } y = 0, \quad |x| \leq \lambda \quad \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Omega_1(z) = f(x), \quad (6)$$

$$\text{при } y = 0, \quad \lambda < x \leq l \quad \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Omega_1(z) = f(x) + q(x),$$

где $f(x) = -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\Phi_0'(x) + \Psi_0(x)]$.

Поскольку в силу условий симметрии относительно оси x функция $f(x)$ действительна, на основании (6) на всей действительной оси будет $\text{Im}\Omega_1(z) = 0$. Учитывая также условия на бесконечности, получаем $\Omega_1(z) = 0$. Для комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ находим

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{t^2 - l^2}}{t - z} f(t) dt. \quad (7)$$

С помощью формул (5) для функции $f(x)$ получим явное соотношение

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sigma_0 + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x - m_*L)^2} \left[\frac{3+v}{2} - \frac{(1+v)(x - m_*L)^2}{n^2 y_0^2 + (x - m_*L)^2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x + m_*L)^2} \left[\frac{3+v}{2} - \frac{(1+v)(x + m_*L)^2}{n^2 y_0^2 + (x + m_*L)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения величин сосредоточенных сил получена бесконечная система уравнений

$$P_{mn} = \frac{E_S F_m}{2y_0 n} \Delta v_{mn} \quad (m=0, 1, 2, \dots; n=1, 2, \dots), \quad (9)$$

где E_S – модуль Юнга материала стрингера; F_m – площадь поперечного сечения стрингера; $2y_0n$ – расстояние между точками крепления; Δv_{mn} – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера. Принимая естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $z = m_*L + i(ny_0 - a_0)$ и $z = m_*L - i(ny_0 - a_0)$ (a_0 – радиус точки крепления) в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления Δv_{mn} , с помощью комплексных потенциалов (4), (5), (7), и формулы Колосова-Мусхелишвили находим взаимное смещение точек крепления Δv_{mn} .

Используя полученное решение задачи, определим раскрытие между противоположными берегами трещины

$$v^+ - v^- = \frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{-l}^l \frac{f(t) + q(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} F_1(t, x) dt, \quad (10)$$

$$\text{где } F_1(t, x) = \sqrt{l^2 - x^2} + \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - t^2} \ln \frac{\sqrt{l^2 - t^2} - \sqrt{l^2 - x^2}}{\sqrt{l^2 - t^2} + \sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Для полного определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ необходимо найти усилия в связях $q(x)$. Подставив выражение (10) в левую часть уравнения (2), получим нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $q(x)$:

$$\frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{-l}^l \frac{F_1(t, x)}{\sqrt{l^2 - t^2}} q(t) dt + \frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{-l}^l \frac{F_1(t, x)}{\sqrt{l^2 - t^2}} f(t) dt = C(x, q) q(x), \quad \lambda < |x| \leq l. \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции. Переходя к безразмерным переменным и заменяя интегралы квадратурными формулами типа Гаусса, уравнение (11) приведем к системе M_1 алгебраических уравнений относительно приближенных значений неизвестной функции в узловых точках τ_k ($k=1, 2, \dots, M_1$)

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu M} \left\{ \sum_{k=1}^M F_1(l\eta_m, l\tau_k) [q(l\tau_k) + f(l\tau_k)] \right\} = C(l\eta_m, q(l\eta_m)) q(l\eta_m). \quad (12)$$

Здесь $\tau_k = \cos \frac{2k-1}{2M} \pi$; $\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ($m = 1, 2, \dots, M_1$); M_1 – число узловых точек, принадлежащих концевым зонам трещины; отрезок интегрирования (трещины) был разбит на M узловых точек.

В частном случае линейно-упругих связей алгебраическая система (12) является линейной и для ее решения применялся метод Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [5]. Закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) полагается линейным когда $(v^+ - v^-) \leq v_*$. Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении системы уравнений (9), (12) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только при выполнении в части концевой зоны условия $(v^+ - v^-) > v_*$, при этом решается система уравнений в каждом приближении для квазихрупких связей с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой зоны трещины и зависящей от усилий в связях, по-

лученных на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [6]. Принято, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

После решения системы уравнений (12) определяются коэффициенты интенсивности напряжений. Согласно принципу суперпозиций, коэффициент интенсивности напряжений K_I при наличии связей в концевой зоне трещины можно представить в виде

$$K_I = K_I^{ext} + K_I^c, \quad (13)$$

где K_I^{ext} , K_I^c – коэффициенты интенсивности напряжений соответственно от действия внешних нагрузок и сил сцепления в концевых зонах трещин.

По известным формулам находим

$$K_I^{ext} = 2 \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{f(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx, \quad K_I^c = 2 \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{q(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx. \quad (14)$$

Для определения предельно-равновесного состояния трещины используется двухпараметрический критерий разрушения: требуется выполнение условия продвижения вершины трещины и условия разрыва связей на краю концевой зоны трещины. В качестве таких условий используется силовой критерий продвижения вершины трещины

$$K_I^{ext} + K_I^c = K_c, \quad (15)$$

где K_c – трещиностойкость, соответствующая механизму деформирования связей в малой области вблизи вершины трещины, и условие критического раскрытия трещины. Будем полагать, что разрыв связей на краю концевой области $x=\lambda$ происходит при выполнении условия

$$v^+ - v^- = \delta_k, \quad (16)$$

где δ_k – предельная вытяжка связи.

Используя предельные значения K_c и δ_k , для заданных размеров трещины и ее концевых зон можно определить режимы равновесия и роста трещины. При выполнении условий $K_I \geq K_c$, $v^+ - v^- < \delta_k$ происходит продвижение вершины трещины и рост концевой зоны без разрыва связей между берегами. В случае $K_I \geq K_c$, $v^+ - v^- \geq \delta_k$ произойдет продвижение вершины трещины одновременно с разрывом связей в концевой зоне. Если $K_I < K_c$, то при $v^+ - v^- \geq \delta_k$ будет происходить разрыв связей при неподвижной вершине трещины, а размер концевой зоны уменьшатся, стремясь к критическому для данной нагрузки значению. Когда $K_I < K_c$ и $v^+ - v^- < \delta_k$ состояние трещины будет стабильным. Таким образом, в зависимости от внешней нагрузки и критических параметров материала пластины возможен различный характер разрушения.

Были проведены расчеты в зависимости от геометрических параметров задачи при $\nu=0,3$; $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$; $\varepsilon = y_0/L = 0,15; 0,25; 0,5$; $E = 7,1 \cdot 10^4 \text{ Па}$ (сплав В95); $E_s = 11,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ (композит Al - сталь); $F/y_0h = 1$. На рис. 2 представлены графики зависимости усилий в связях q/σ_0 от безразмерной координаты x/l для значений $d/l = 0,5$; $\varepsilon = 0,25$. Кривая 1 относится к линейному закону деформирования связей, кривая 2 – к нелинейному (билинейному). На рис. 3 показана зависимость безразмерной предельной нагрузки $\sigma_* = \sigma_0/q_{\max}$ от длины

трещины $l_* = l/L$ (остаточной прочности) для $\varepsilon = 0,15; 0,50$. Расчеты показывают, что частое расположение точек крепления сказывается в увеличении предельных разрушающих нагрузок.

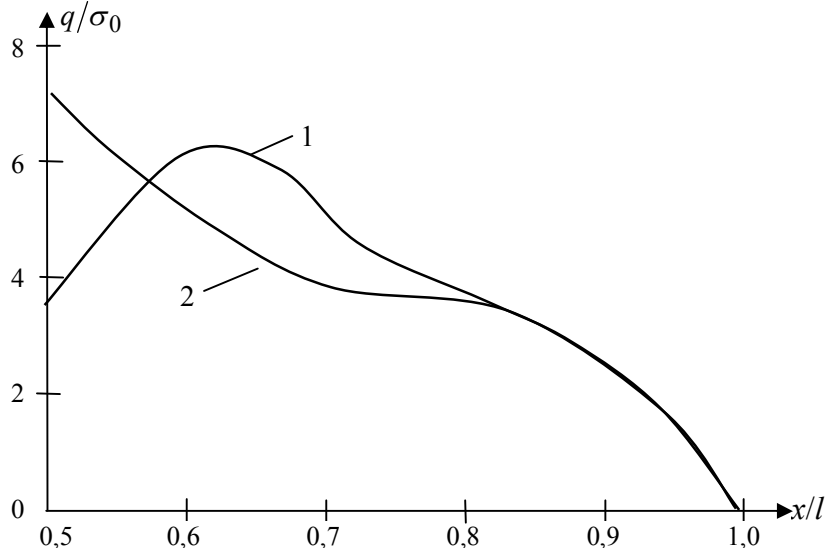


Рис. 2. Зависимость усилий в связях q/σ_0 от безразмерной координаты x/l

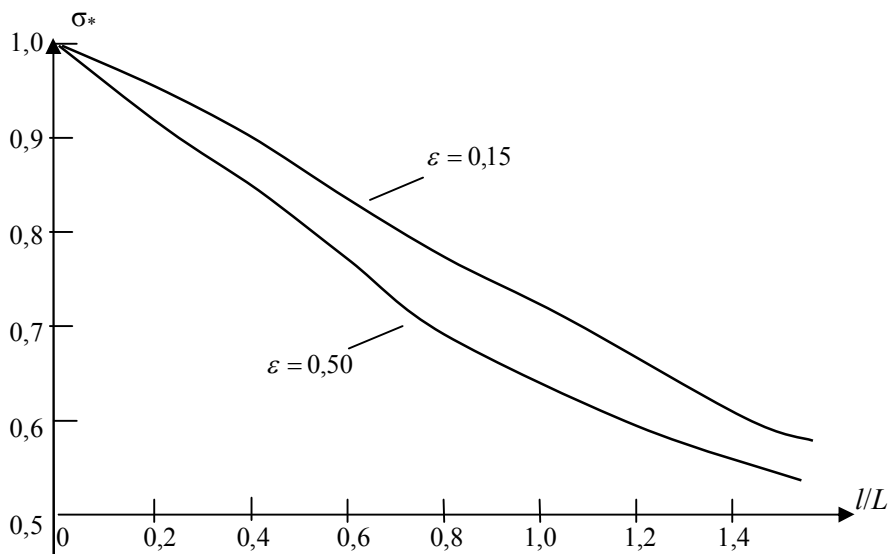


Рис. 3. Зависимость безразмерной предельной нагрузки $\sigma_* = \sigma_0/q_{\max}$ от длины трещины $l_* = l/L$

Выводы. Совместное решение системы (9), (12), (15), (16) дает возможность при заданных характеристиках материала найти критическую внешнюю нагрузку. Расчетами устанавливается зависимость остаточной прочности стрингерной пластины, ослабленной трещиной со связями между берегами в концевых зонах. Модель трещины со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах их деформирования, оценить эффекты упрочнения среды, усиленной регулярной системой стрингеров, вызванные учетом связей в концевой зоне трещины, провести анализ предельного равновесия трещины с помощью деформационного критерия.

Л и т е р а т у р а

1. *Mir-Salim-zade M.V.* Elastoplastic Fracture of a Perforated Stringer Plate // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2012, Vol. 41, No. 3, p. 218–222.
2. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14, p.1741-1987.
3. *Гасанов Ш.Г.* Трещина со связями между берегами на границе раздела дорожного покрытия и упругого основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012, №2. с. 25-32.
4. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Л.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
6. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №2. с.113-119.

R e f e r e n c e s

1. *Mir-Salim-zade M.V.* Elastoplastic Fracture of a Perforated Stringer Plate // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2012, Vol. 41, No. 3, p. 218–222.
2. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14, p.1741-1987.
3. *Hasanov Sh.H.* A crack with interfacial bonds between face on border of the unit of the road covering and the elastic basis // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2012, No.2. p. 25-32.
4. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Amsterdam: Kluwer. 1977.
5. *И'юшин А.А.* Plasticity. Moscow and Leningrad. Gostekhizd, 1948, 376 p.
6. *Birger I.A.* 1965. The design of structures allowing for plasticity and creep. Izv. Akad. Nauk SSSR Mekhanika 2. p. 113 – 119.

THE GROWTH OF COHESIVE CRACK IN A STRINGER PLATE

M.V. Mir-Salim-zade

The Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

The infinite plate, reinforced with a regular system of ribs and weakened by one rectilinear crack is considered. The crack surfaces interact in the end zones. The stress intensity factors are found. For determining limit equilibrium crack the two-parameter fracture criterion is used.

KEYWORDS: stringer plate, cohesive crack, cohesive forces, stresses intensity factors.

