

Динамика конструкций и сооружений

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

А.Г. ХАКИМОВ*, канд. физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник

М.М. ШАКИРЬЯНОВ**, канд. физ.-мат. наук, доцент

* Институт механики Уфимского научного центра РАН,

** Уфимский государственный авиационный технический университет
450077, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12, УГАТУ

Исследуются пространственные нелинейные вынужденные колебания двухопорного трубопровода, находящегося под действием переменного внутреннего давления. Получены зависимости амплитуд крутильных и изгибных колебаний трубы от величин статической и динамической составляющих, круговой частоты и начальной фазы переменного внутреннего давления. Показано, что при наличии сил сопротивления амплитуды и угловых и изгибных перемещений трубы значительно меньше по сравнению с тем, что имеет место в отсутствие этих сил. Установлено, что относительно небольшое увеличение статической составляющей давления может привести к значительному увеличению амплитуд как угловых, так и изгибных перемещений трубы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: двухопорный трубопровод, вынужденные колебания, крутильные и изгибные колебания, внутреннее давление, процедура Бубнова - Галеркина.

Рассматриваются пространственные нелинейные вынужденные колебания двухопорного трубопровода и заключенной в нем жидкости относительно гори-

зонтальной оси, проходящей через опоры. В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием переменного внутреннего давления. Предполагается, что она выводится из этого состояния путем отклонения на угол θ от вертикальной плоскости. Коэффициент упругости опор и деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. Длина трубы равна L , толщина ее стенки – h , а суммарная масса однородной трубы и жидкости – m . Продольные силы инерции, трение потока считаются малыми.

На рис. 1 слева изображен элемент трубы длиной dx и массой $dm = (m/L)dx$, а справа на этом же рисунке показаны ускорения и силы, действующие на выделенный элемент трубы.

Распределенная нагрузка q_n на трубопровод выражается формулой [1]:

$$q_n = -\frac{m}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_i F_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad F_i = \pi R_i^2, \quad P_i = P_0 + P_a \sin \Omega t + \varphi, \quad (1)$$

где w – прогиб элемента трубы, Ω , φ , P_0 , P_a – круговая частота, начальная фаза, статическая и амплитуда динамической составляющих внутреннего давления P_i в трубе; R_i , F_i – внутренний радиус и площадь проходного сечения трубопровода, x – продольная координата, t – время. Касательное a_x , нормальное a_n и кориолисово a_k ускорения элемента равны

$$a_x = w \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_n = w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial w}{\partial t},$$

где θ – угол поворота трубы как твердого тела относительно оси Dx .

Таким образом, силы инерции $d\Phi_\tau$, $d\Phi_n$ и $d\Phi_k$ выделенного элемента трубы запишутся

$$d\Phi_\tau = dm \cdot w \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad d\Phi_n = dm \cdot w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad d\Phi_k = 2 dm \cdot \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение условного равновесия трубы в виде суммы моментов всех приложенных сил и сил инерции относительно оси Dx имеет вид

$$-\int_{(m)} g w \sin \theta dm - \int_{(m)} w d\Phi_\tau - \int_{(m)} w d\Phi_k - M_y - M_c = 0, \quad (3)$$

где g – гравитационное ускорение. Суммарный момент M_y сил упругости в опорах прямо пропорционален углу θ поворота трубы как твердого тела относительно оси Dx :

$$M_y = c \cdot \theta, \quad (4)$$

а момент сил сопротивления M_c – первой степени угловой скорости:

$$M_c = \mu_1 \frac{d\theta}{dt}, \quad (5)$$

где c и μ_1 – коэффициенты упругости опор и сопротивления вращению всей трубы.

Уравнение (3) с учетом равенства (2) и соотношений (4), (5) примет вид

$$-\frac{m}{L} g \sin \theta \int_0^L w dx - \frac{m}{L} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int_0^L w^2 dx - \frac{2m}{L} \frac{d\theta}{dt} \int_0^L w \frac{\partial w}{\partial t} dx - c\theta - \mu_1 \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (6)$$

Сила T продольного натяжения трубопровода определяется интегралом

$$T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (7)$$

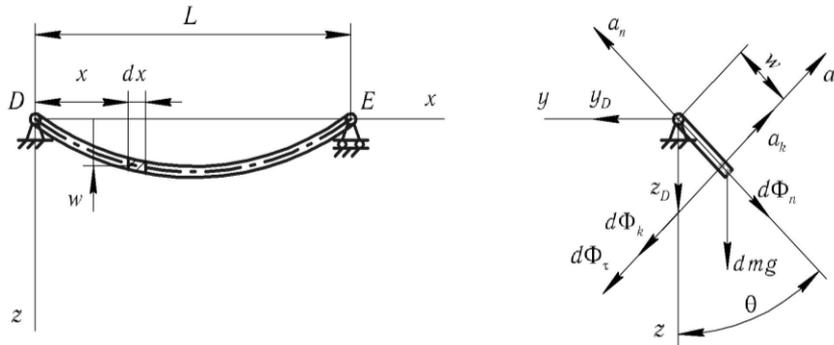


Рис. 1

где E и $F = 2\pi R_i h$ – модуль Юнга материала и площадь поперечного сечения трубы.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы в своей плоскости следующее

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{EJL}{m} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{T - P_i F_i}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \cos \theta + w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\mu_2 L}{m} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (8)$$

где μ_2 – коэффициент сопротивления движению элемента трубы в плоскости изгиба, $J \cong \pi R_i^3 h$ – осевой момент инерции площади поперечного сечения трубопровода.

Функцию прогиба трубопровода, удовлетворяющую граничным условиям

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0,$$

примем в виде

$$w(x, t) = [W_0 + w_0 t] \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (9)$$

где W_0 и $w_0 t$ – статическая и амплитуда динамической составляющих прогиба.

Подставляя функцию (9) в уравнения (6) и (8) и, применяя к последнему процедуру Бубнова – Галеркина [2], после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} [W_0 + w_0 t]^2 + \frac{\mu_1}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{c}{m} \theta + [W_0 + w_0 t] \left(\frac{2g}{\pi} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{dw_0}{dt} \right) = 0, \\ & \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{\mu_2 L}{m} \frac{dw_0}{dt} + \frac{\pi^4 EJ}{mL^3} [W_0 + w_0 t] = \frac{4g}{\pi} \cos \theta + [W_0 + w_0 t] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \\ & - \left\{ \frac{\pi^2 EF}{4L^2} [W_0 + w_0 t]^2 - F_i P_0 + P_a \sin \Omega t + \varphi \right\} \frac{\pi^2}{mL} [W_0 + w_0 t]. \quad (10) \end{aligned}$$

Полагая во втором уравнении (10) $\theta t \equiv 0$, $w_0 t \equiv 0$, $P_a = 0$, получим следующее алгебраическое уравнение для определения статической составляющей W_0 прогиба трубопровода

$$\frac{\pi^4 EF}{4L^2} W_0^3 + \pi^2 \left(\frac{\pi^2 EJ}{L^2} - F_i P_0 \right) W_0 - \frac{4gmL}{\pi} = 0.$$

Отметим также, что из этого уравнения определяется приближенное значение критического статического давления P_0

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{F_i L^2} = \frac{\pi^2 ER_i h}{L^2}.$$

Система уравнений (10) решается при следующих начальных условиях

$$t=0, \theta=\theta_0, \frac{d\theta}{dt} = \omega_0, w_0 = 0, \frac{dw_0}{dt} = 0. \quad (11)$$

Здесь θ_0, ω_0 – начальные угол поворота и угловая скорость трубы.

Исследуем влияние статической P_0 , амплитуды P_a динамической составляющих, круговой частоты Ω , начальной фазы φ переменного внутреннего давления, коэффициентов сил сопротивления μ_1 и μ_2 на колебательные движения трубопровода.

Численное решение задачи Коши (10), (11) определялось методом Рунге – Кутты. Результаты вычислений, полученные для следующих основных параметров

$$m = 7.41 \cdot 10^4 \text{ кг}, L = 40 \text{ м}, c = 0, g = 9.8 \text{ м/с}^2, R_i = 0.6935 \text{ м}, h = 0.01 \text{ м},$$

$\theta_0 = 0.3$ рад, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\omega_0 = 0$ рад/с, $\mu_1 = 100$ Нмс/рад, $\mu_2 = 400$ Нс/м², представлены на рис. 2 – 9 в виде графиков зависимостей угла θ (слева) поворота трубы и динамического прогиба w_0 (справа) ее средней точки пролета от времени t , соответственно.

На рисунках сплошными линиями нанесены результаты численного интегрирования с учетом сил сопротивления, а штриховыми – без учета этих сил; t – в секундах, θ – в радианах, w_0 – в метрах.

Влияние сил сопротивления и статического давления в трубопроводе

На рис. 2, 3 указанные выше графики изображены для $P_a = 0$ (режим свободных колебаний [3]), $\varphi = 0$ и двух значений статического давления:

$$P_0 = 5 \text{ МПа} \text{ – рис. 2 и } P_0 = 5.5 \text{ МПа} \text{ – рис. 3.}$$

Видно, что при наличии сил сопротивления амплитуды и угловых и изгибных перемещений трубы значительно меньше по сравнению с тем, что имеет место в отсутствие этих сил.

Можно видеть также, что, при принятых значениях основных параметров, с течением времени амплитуды изгибных колебаний уменьшаются быстрее, чем амплитуды крутильных колебаний трубы.

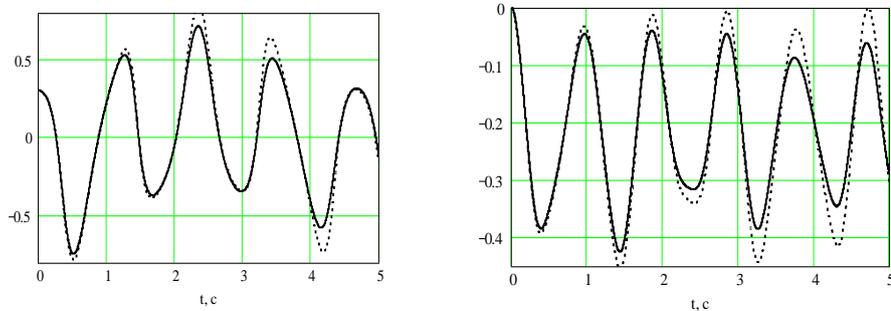


Рис. 2. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5$ МПа и $P_a = 0$.

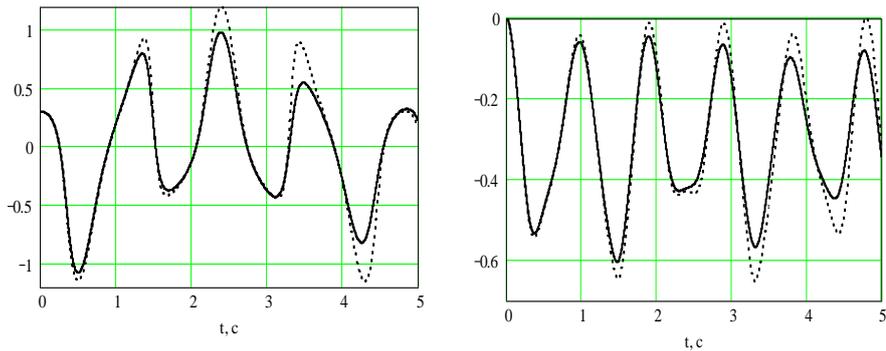


Рис. 3. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5.5$ МПа и $P_a = 0$.

Из сравнения соответствующих графиков на рис. 2 и 3 следует, что относительно небольшое увеличение статической составляющей давления может привести к значительному увеличению амплитуд как угловых, так и изгибных перемещений трубы.

Влияние амплитуды динамической составляющей давления на колебательные движения трубы иллюстрируется графиками на рис. 4, 5.

Здесь расчеты проводились для околокритического статического давления $P_0 = 5.5$ МПа, круговой частоты $\Omega = 6.63$ рад/с, начальной фазы $\varphi = \pi$ и двух значений амплитуд динамической составляющей давления:

$P_a = 0.1$ МПа – рис. 4, $P_a = 0.2$ МПа – рис. 5.

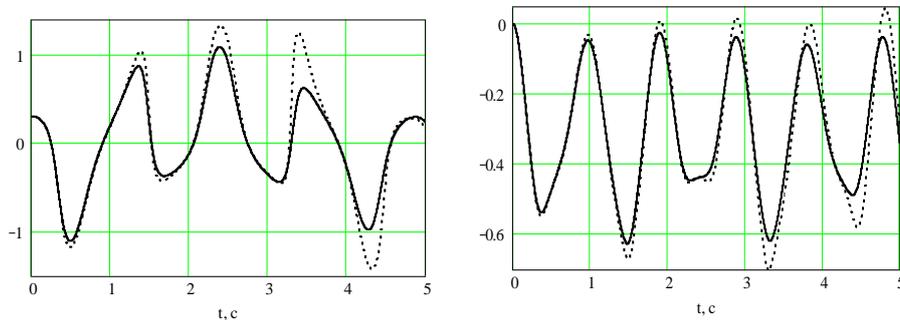


Рис. 4. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5.5$ МПа, $P_a = 0.1$ МПа, $\Omega = 6.63$ рад/с, $\varphi = \pi$.

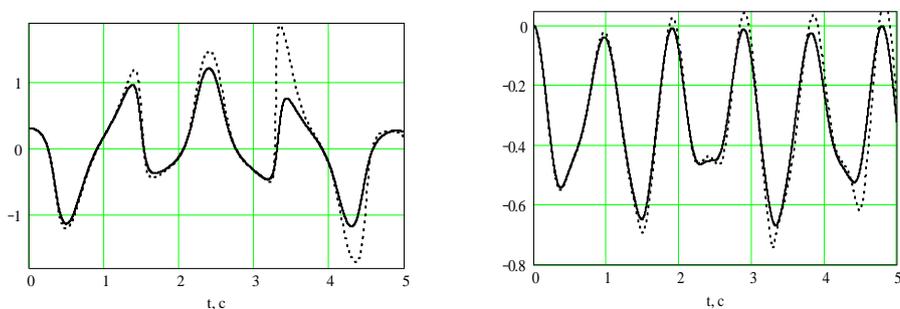


Рис. 5. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5.5$ МПа, $P_a = 0.2$ МПа, $\Omega = 6.63$ рад/с, $\varphi = \pi$.

Из сравнения соответствующих графиков на рис. 4 и 5 видно, что с увеличением динамической составляющей давления происходит значительное увеличение амплитуды изгибных колебаний трубы. Можно также отметить смещение равновесного положения прогиба трубы в отрицательную зону.

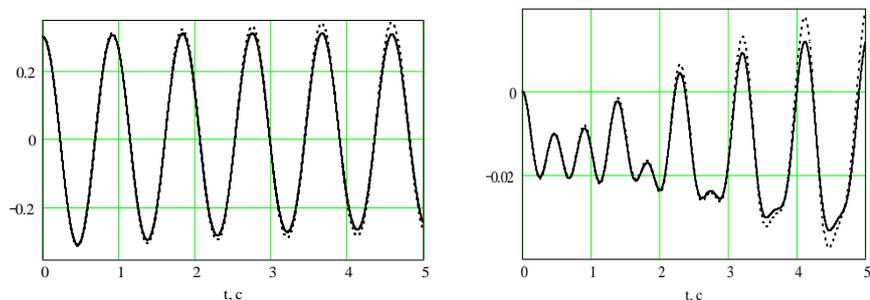


Рис. 6. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 0.1$ МПа, $P_a = 0.1$ МПа, $\Omega = 6.63$ рад/с, $\varphi = 0$.

Влияние начальной фазы изменения давления на колебания трубы представлено графиками на рис. 6, 7. Вычисления проводились для докритического статического давления $P_0 = 0.1$ МПа, амплитуды динамической составляющей давления: $P_a = 0.1$ МПа, круговой частоты $\Omega = 6.63$ рад/с и двух значений начальной фазы: $\varphi = 0$ – рис. 6 и $\varphi = \pi$ – рис. 7.

Из сравнения соответствующих графиков на рис. 6 и 7 видно, что, если изменение начальной фазы динамической составляющей давления на противоположную вызывает незначительное увеличение амплитуды крутильных колебаний трубопровода, то амплитуда его изгибных колебаний зависит от этого изменения в значительной мере.

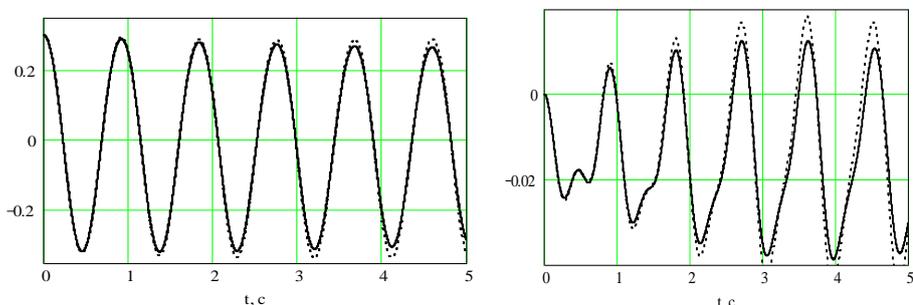


Рис. 7. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 0.1$ МПа, $P_a = 0.1$ МПа, $\Omega = 6.63$ рад/с, $\varphi = \pi$.

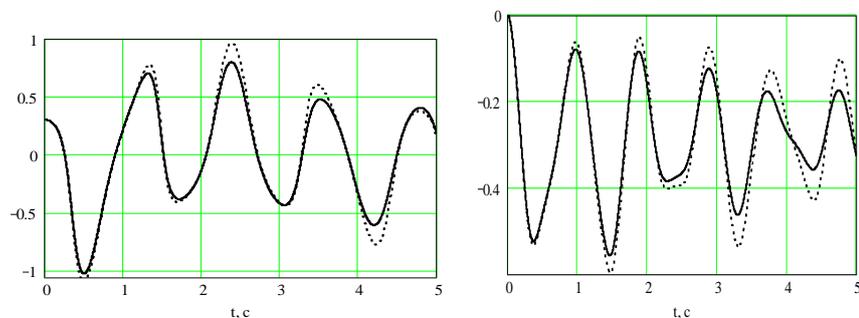


Рис. 8. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5.5$ МПа, $P_a = 0.2$ МПа, $\varphi = 0$, $\Omega = 6.63$ рад/с

Влияние круговой частоты изменения давления на крутильные и изгибные колебания трубы изображено графиками на рис. 8, 9.

Вычисления были проведены для принятых выше основных параметров, околокритического статического давления $P_0 = 5.5$ МПа, амплитуды динамической составляющей $P_a = 0.2$ МПа, начальной фазы $\varphi = 0$ и двух значений круговой частоты изменения давления:

дорезонансной $\Omega = 6.63$ рад/с – рис. 8 и околорезонансной $\Omega = 8.0$ рад/с – рис. 9.

Из сравнения соответствующих графиков на рис. 8 и 9 видно, что в околорезонансном режиме колебаний трубы ее амплитуды крутильных и изгибных перемещений больше, чем это имеет место в дорезонансном режиме колебаний.

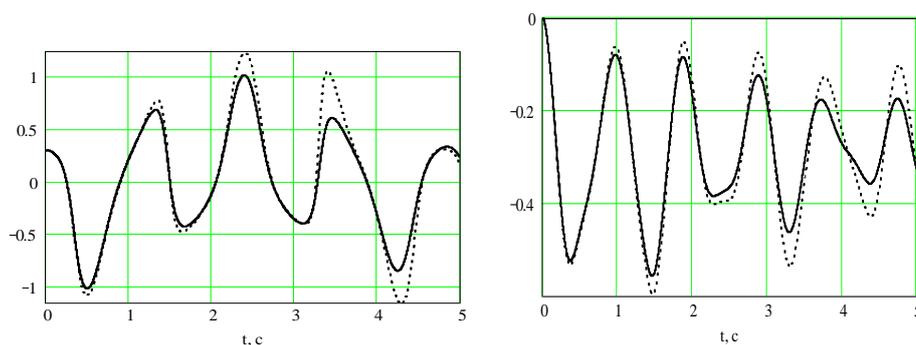


Рис. 9. Зависимости угла поворота θ и прогиба w_0 средней точки пролета трубы от времени t для $P_0 = 5.5$ МПа, $P_a = 0.2$ МПа, $\varphi = 0$, $\Omega = 8.0$ рад/с.

Авторы выражают благодарность М.А. Ильгамову за постановку задачи и помощь в выполнении работы.

Л и т е р а т у р а

1. Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. – Казань: ИММ РАН, 1994. – 208 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. – 954 с.
3. Шакирьянов М.М. Пространственные колебания статически изогнутого трубопровода. Тр. Института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем». 2007.- С.335-339.

SPATIAL COMPELLED VIBRATIONS OF PIPELINE UNDER INTERNAL PRESSURE

A.G. Khakimov, M.M. Shakiryaynov

Investigation is focused on spatial nonlinear compelled vibrations of a double support pipeline affected by variable internal pressure. The dependencies have been obtained between the amplitude of pipe torsional and flexural vibrations and the values of static and dynamic components, circular frequency and initial internal pressure.

It was shown that in the presence of resistance forces the amplitudes of pipe angular and flexural motions are essentially lower as compared to what takes place in the absence of these forces.

It was found that a relatively small increase in the pressure static component can cause a considerable increase in the amplitudes of both angular and flexural motions.

KEY WORDS: a pipe line on two supports, forced vibration, torsional and flexural vibrations, variable internal pressure, Bubnov – Galerkin procedure, the pressure static component.